Algebră II
02 aprilie 2020

Seminar 6

– Grupuri ciclice –

Recapitulare:

- $(G, \cdot)$ este un grup ciclic dacă $\exists\, x \in G$ a.î.
$$G = \langle x \rangle = \{ x^k \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

Aici, $\operatorname{ord} x = n \iff |G| = n \iff G \simeq (\mathbb{Z}_n, +)$
$$\left(G = \{ 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \} \right)$$
sau $\operatorname{ord} x = \infty \iff \forall\, k, l \in \mathbb{Z}, k \neq l$ avem $x^k \neq x^l$.
$$\iff G \simeq (\mathbb{Z}, +).$$

- Teoremă. Subgrupurile unui grup ciclic sunt ciclice.
$(S \leq G \iff \exists\, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ a.î. $k \mid n$ și $S = \langle x^k \rangle)$

1) Pentru $n = 45, 48$ și 102 considerăm grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$.

a) Determinați generatorii pentru $\mathbb{Z}_n$.

b) Folosind un generator al lui $\mathbb{Z}_n$, listați toate subgrupurile din $\mathbb{Z}_n$.

c) Calculați $\operatorname{ord}(\widehat{30})$ și $\operatorname{ord}(\widehat{36})$ în $\mathbb{Z}_n$.

Soluție:

Reamintim $ord(a^k) = \frac{ord(a)}{cmmdc(k; ord(a))}$.

a) Fie $\hat{y} \in \mathbb{Z}_n$.

$\hat{y}$ generator pt $\mathbb{Z}_n \Leftrightarrow \langle \hat{y} \rangle = \mathbb{Z}_n \Leftrightarrow |\langle \hat{y} \rangle| = n$
$\Leftrightarrow ord(\hat{y}) = n$.

$$\hat{y} = \widehat{y \cdot 1} = y \cdot \hat{1} \Rightarrow ord(\hat{y}) = ord(y \cdot \hat{1}) = \frac{ord(\hat{1})}{cmmdc(y; ord(\hat{1}))}$$
$$= \frac{n}{cmmdc(y; n)}.$$

Așadar $\hat{y}$ este generator pt $\mathbb{Z}_n \Leftrightarrow \frac{n}{cmmdc(y;n)} = n$
$\Leftrightarrow cmmdc(y; n) = 1$.

Prin urmare:

- pt $n = 45$, $\hat{y}$ este generator pt $\mathbb{Z}_n \Leftrightarrow cmmdc(y; 45) = 1$
  $\Leftrightarrow \hat{y} \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{7}, \hat{8}, \hat{11}, \hat{13}, \hat{14}, \hat{16}, \hat{17}, \dots\}$

... (temă restul)

b) Fie $S \leq (\mathbb{Z}_n, +)$, dar $(\mathbb{Z}_n, +)$ este grup ciclic
$\overset{th.}{\Longrightarrow} S$ ciclic.

Mai exact, din moment ce $\mathbb{Z}_n = \langle \hat{1} \rangle \Rightarrow$
$\exists k \in \{1, 2, \dots, n\}$ a.î. $k | n$ și $S = \langle k \cdot \hat{1} \rangle$.

Pentru $n=45 \Rightarrow k \in \mathcal{D}_{45}=\{1,3,5,9,15,45\}$

$k=1 \Rightarrow S=<\hat{1}>=\mathbb{Z}_{45}$

$k=3 \Rightarrow S=<\hat{3}>=\{k\cdot\hat{3} \mid k\in\mathbb{Z}\}=\{\hat{0},\hat{3},\hat{6},\dots,\widehat{42}\}$

$=\{\widehat{3k} \mid k\in\mathbb{Z}\}=3\mathbb{Z}_{45}$

$k=5 \Rightarrow S=<\hat{5}>=5\mathbb{Z}_{45}=\{\hat{0},\hat{5},\widehat{10},\dots,\widehat{45}\}$

$k=9 \Rightarrow S=<\hat{9}>=9\mathbb{Z}_{45}=\{\hat{0},\hat{9},\widehat{18},\widehat{27},\widehat{36}\}$

$k=15 \Rightarrow S=<\widehat{15}>=15\mathbb{Z}_{45}=\{\hat{0},\widehat{15},\widehat{30}\}$

$k=45 \Rightarrow S=<\widehat{45}>=45\mathbb{Z}_{45}=\{\hat{0}\}$.

Temă pentru $n=48$ și 102.

c) Pentru $n=45$,

$$ord(\widehat{30})=ord(30\cdot\hat{1})=\frac{ord(\hat{1})}{cmmdc(30;ord(\hat{1}))}=\frac{45}{cmmdc(30;45)}=$$

$$=\frac{45}{15}=3.$$

Temă restul calculelor

② Calculați subgrupurile ciclice din $\mathcal{D}_4$ și $\mathcal{D}_5$. Dați exemplu de un subgrup care nu este ciclic.

Soluție: Pentru $\mathcal{D}_4=\{1,r,r^2,r^3,s,sr,sr^2,sr^3\}$ (temă $\mathcal{D}_5$)

$<1>=\{1^k \mid k\in\mathbb{Z}\}=\{1\}$.

$<r>=\{1,r,r^2,r^3\}=<r^3>$ $(ord(r^3)=4)$

$<r^2>=\{1,r^2\}$ $(ord(r^2)=2)$

$<s>=\{1,s\}$.

$\forall x \in D_4 \setminus \{1, r, r^2, r^3\}$ am calculat în Seminarul 2 că $ord(x) = 2 \Rightarrow \langle x \rangle = \{1, x\}$.

Ca exemplu de subgrup care NU este ciclic îl vom lua pe D_4:

PpRA că D_4 este ciclic $\Rightarrow \exists\, x \in D_4$ a.î. $D_4 = \langle x \rangle$ $\Rightarrow \exists\, x \in D_4$ a.î. $ord\, x = |D_4| = 8$ contradicție (am calculat ordinele tuturor elementelor din D_4 în Seminarul 2) $\Rightarrow D_4$ NU este ciclic.

- <u>Obs.</u> De fapt, orice grup ciclic este comutativ. Deci orice grup care NU este comutativ, NU poate fi ciclic. În particular, cum D_n $(n \geq 3)$ NU este comutativ, nu poate fi nici ciclic.

3) Demonstrați că următoarele grupuri NU sunt ciclice

a) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ b) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, +)$

c) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ d) $(\mathbb{Q}, +)$

e) $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$ f) $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +)$

Soluție: Reamintim: Dacă $|A| = n$ și $|B| = m$ atunci $|A \times B| = n \cdot m$.

a) P_p RA că $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ este ciclic $\Rightarrow \exists\, y\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ a.î. $\langle y\rangle = \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, dar $|\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2| = |\mathbb{Z}_2|\cdot|\mathbb{Z}_2| = 2\cdot 2 = 4 \Rightarrow \operatorname{ord} y = 4$.

Fie $y = (\hat{a},\hat{b})$, $\hat{a},\hat{b}\in\mathbb{Z}_2$.

$2y = y+y = (\hat{a},\hat{b})+(\hat{a},\hat{b}) = (\hat{a}+\hat{a},\hat{b}+\hat{b}) = (2\hat{a},2\hat{b}) \overset{\text{în } \mathbb{Z}_2}{=} (\hat{0},\hat{0}) \Rightarrow \operatorname{ord} y = 2 \neq 4$ contradicție.

$\Rightarrow \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ NU este ciclic.

b) P_p RA că $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$ este ciclic $\Rightarrow \exists\, y = (a,\hat{b})$, $a\in\mathbb{Z}$, $\hat{b}\in\mathbb{Z}_2$ aî $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2 = \langle y\rangle$

$\Rightarrow \forall (c,\hat{d})\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2, \exists k\in\mathbb{Z}$ aî $k(a,\hat{b}) = (c,\hat{d}) \Leftrightarrow (ka,k\hat{b}) = (c,\hat{d})$

Pt. $c=0$ și $\hat{d}=\hat{1} \Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$ aî $(ka,k\hat{b}) = (0,\hat{1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} ka = 0 \\ k\hat{b} = \hat{1} \end{cases} \Rightarrow k = 0$ sau $a = 0$.

Dacă $k=0 \Rightarrow k\hat{b} = \hat{0} \Rightarrow \hat{0} = \hat{1}$, fals

Așadar $k\neq 0 \Rightarrow a = 0$

Prin urmare, $\forall (c,\hat{d})\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$, $\exists k\in\mathbb{Z}$ aî $(0,k\hat{b}) = (c,\hat{d})$ fals pt $c=1$ contradicție $\Rightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$ NU este ciclic.

c) temă – similar cu b)

d) Pp RA că $(\mathbb{Q},+)$ este ciclic $\Rightarrow \exists\, y \in \mathbb{Q}$ a.î.

$\mathbb{Q} = \langle y \rangle \Rightarrow \forall\, \alpha \in \mathbb{Q}, \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $\alpha = k \cdot y$

Pt. $\alpha = 1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $1 = k \cdot y \Rightarrow \underline{y \neq 0}$

Pt. $\alpha = \frac{y}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $\underline{\frac{y}{2} = k \cdot y}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ contradicție $\Rightarrow (\mathbb{Q},+)$ NU este ciclic.

e) Pp. RA că $(\mathbb{Q}_+^*,\cdot)$ este ciclic $\Rightarrow \exists\, y \in \mathbb{Q}_+^*$ a.î.

$\mathbb{Q}_+^* = \langle y \rangle \Rightarrow \forall\, \alpha \in \mathbb{Q}_+^*, \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $\alpha = y^k$

Pt $\alpha = 2 \in \mathbb{Q}_+^* \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $2 = y^k$ (1)

Pt $\alpha = 3 \in \mathbb{Q}_+^* \Rightarrow \exists\, k' \in \mathbb{Z}$ a.î. $3 = y^{k'}$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} (1)\,|^{k'} \Rightarrow 2^{k'} = y^{kk'} \\ (2)\,|^{k} \Rightarrow 3^{k} = y^{kk'} \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2^{k'} = 3^k \\ k, k' \in \mathbb{Z} \end{array}\right| \Rightarrow k = k' = 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$\Rightarrow 2 = y^0 \Rightarrow 2 = 1$ contradicție $\Rightarrow (\mathbb{Q}_+^*,\cdot)$ NU este ciclic.

f) Pp. RA că $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +)$ este ciclic $\Rightarrow \exists\, y = (\hat{a}, \bar{b})$ cu

$\hat{a} \in \mathbb{Z}_4, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$ a.î. $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 = \langle y \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, (\hat{c}, \bar{d}) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $(\hat{c}, \bar{d}) = (k\hat{a}, k\bar{b})$

Pt $(\hat{c}, \bar{d}) = (\hat{1}, \bar{0}) \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $(\hat{1}, \bar{0}) = (k\hat{a}, k\bar{b}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} k\hat{a} = \hat{1} \Rightarrow \hat{a} \in U(\mathbb{Z}_4,\cdot) = \{\hat{1}, \hat{3}\} \text{ (elem. prime cu 4)} \\ k\bar{b} = \bar{0} \Rightarrow \overline{kb} = \bar{0} \Rightarrow 6 \mid kb. \end{cases}$$

Dacă $\hat{a}=\hat{1} \Rightarrow k\cdot\hat{1}=\hat{1} \Rightarrow \hat{k}=\hat{1} \Rightarrow 4/k-1 \Rightarrow k$ impar

, dar $6/kb \Rightarrow b$ par.

Pt $(\hat{c},\bar{d})=(\hat{0},\bar{1}) \Rightarrow \exists k'\in\mathbb{Z}$ a.î. $(\hat{0},\bar{1})=(k'\hat{a},k'\bar{b}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} k'\hat{a}=\bar{0} \\ k'\bar{b}=\bar{1} \Rightarrow \bar{b}\in U(\mathbb{Z}_6,\cdot)=\{\hat{1},\hat{5}\} \text{ (elem. prime cu 6)} \Rightarrow \end{cases}$

b impar (M_6+1 sau M_6+5) contradicție.

Dacă $\hat{a}=\hat{3} \Rightarrow k\cdot\hat{3}=\hat{1} \Rightarrow \widehat{k\cdot 3}=\hat{1} \Rightarrow \widehat{3k}=\hat{1} \Rightarrow 3\hat{k}=\hat{1}$

$\Rightarrow \hat{k}=\hat{3} \Rightarrow 4/k-3 \Rightarrow k$ impar, dar ... analog restul elem.

Alternativ, se poate utiliza următoarea teoremă.

Dacă G_1 și G_2 sunt grupuri și $g_1\in G_1$, $g_2\in G_2$ cu ordinele $n_1,n_2\in\mathbb{N}$, atunci în $G_1\times G_2$, $\text{ord}(g_1,g_2)=[n_1;n_2]$ (cmmmc).

Așadar aici, cum cmmmc$[4,6]=12 \Rightarrow$ ordinul maxim al unui element din $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$ este 12 și prin urmare ordinul niciunui element nu poate fi $24 \Rightarrow \mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$ NU este ciclic.

(4) Fie $m,n\in\mathbb{N}$, $m,n\geq 2$. Dem. că $(\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n,+)$ este ciclic $\Leftrightarrow (m;n)=1$.

Soluție: „$\Rightarrow$" Pp. că $(\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n,+)$ este ciclic. Vrem $(m;n)=1$.

$\exists y\in\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ a.î. ord $y=m\cdot n$.

Pp. că $(m;n)\neq 1 \Rightarrow \exists d=(m;n)$ a.î. $d>1$.

Fie $c = [m,n] \Rightarrow \begin{rcases} c \cdot \mathbb{Z}_m = \{\hat{0}\} \\ c \cdot \mathbb{Z}_n = \{\bar{0}\} \end{rcases} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n,\ c \cdot x = (\hat{0}, \bar{0}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \quad \underline{ord(x)} \le c = \dfrac{m \cdot n}{d} < \underline{m \cdot n}$

contradicție $(ord\, y = m \cdot n) \Rightarrow (m;n) = 1$.

„$\Leftarrow$". Pp $(m;n) = 1$. Este suficient să demonstrăm că $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +) \simeq (\mathbb{Z}_{m \cdot n}, +)$.

Fie $f : \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, $f(\tilde{x}) = (\hat{x}, \bar{x})$.

$\tilde{x} = \tilde{y} \Leftrightarrow mn \mid x - y \xLeftrightarrow{(m,n)=1} \begin{cases} m \mid x-y \\ n \mid x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x} = \hat{y} \\ \bar{x} = \bar{y} \end{cases} \Leftrightarrow (\hat{x}, \bar{x}) = (\hat{y}, \bar{y})$

$\Leftrightarrow f(\tilde{x}) = f(\tilde{y})$. $(*)$

Din $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ avem că f este bine-definită

Din $\overset{(*)}{\Leftarrow}$ avem că f este injectivă

$|\mathbb{Z}_{mn}| = |\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n|$

$\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow$

f morfism (evident)

$\Rightarrow f$ izomorfism $\Rightarrow (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +) \simeq \underbrace{(\mathbb{Z}_{m \cdot n}, +)}_{\text{ciclic}} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +)$ este ciclic.

⑤ I. Fie $(G,+)$ grup abelian și $H, K \leq G$. Dem. că $H+K \leq G$, unde $H+K=\{h+k \mid h\in H \text{ și } k\in K\}$.

II. a) $H\subseteq \mathbb{Z}$: $H\leq(\mathbb{Z},+) \Leftrightarrow \exists\, d\in\mathbb{N}$ a.î. $H=d\mathbb{Z}=\{dk \mid k\in\mathbb{Z}\}$

b) $m,n\in\mathbb{N}^*$ $\quad m\mathbb{Z}\subseteq n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n \mid m$.

c) $m,n\in\mathbb{N}^*$ $\quad m\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z}=[m;n]\mathbb{Z}$

d) $m,n\in\mathbb{N}^*$ $\quad m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}=(m;n)\mathbb{Z}$.

Soluție: I. Clar $H+K\subseteq G$.

$H,K\leq G \Rightarrow 0\in H,K \Rightarrow 0=0+0\in H+K$.

Fie $h_1+k_1,\ h_2+k_2\in H+K$.

$$(h_1+k_1)-(h_2+k_2)\underset{(G,+)\text{ grup}}{=} h_1+k_1+(-k_2)+(-h_2) \xlongequal{G \text{ abelian}}$$

$$= \underbrace{\underset{\in H}{h_1}+\underset{\in H}{(-h_2)}}_{\in H}+\underbrace{\underset{\in K}{k_1}+\underset{\in K}{(-k_2)}}_{\in K}\in H+K.$$

Așadar $H+K\leq G$.

II a) „$\Rightarrow$" Pp. $H\leq(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z},+)$ ciclic $\Rightarrow$ H este ciclic $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, y\in\mathbb{Z}$ a.î. $H=\langle y\rangle=\{ky \mid k\in\mathbb{Z}\}=\langle -y\rangle$.

$y\in\mathbb{N}$ sau $-y\in\mathbb{N} \Rightarrow \exists\, d\in\mathbb{N}$ a.î. $H=\langle d\rangle=d\mathbb{Z}$

„$\Leftarrow$" Pp că $\exists\, d\in\mathbb{N}$ a.î. $H=d\mathbb{Z}$. Vrem $H\leq(\mathbb{Z},+)$.

(temă).

b) "$\Rightarrow$" $\left.\begin{array}{l} m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z} \\ m = m\cdot 1 \in m\mathbb{Z} \end{array}\right| \Rightarrow m \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î.

$m = n\cdot k \Rightarrow n \mid m$.

"$\Leftarrow$" $n \mid m \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $m = n\cdot k$. Vrem $m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$

Fie $y \in m\mathbb{Z} \Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{Z}$ a.î. $y = l\cdot m \Rightarrow y = n\cdot k\cdot l \in n\mathbb{Z}$

Așadar $m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$.

c) Fie $x \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in m\mathbb{Z}$ și $x \in n\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = m\cdot k$ și $\exists\, l \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = n\cdot l \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m \mid x$ și $n \mid x \Leftrightarrow x$ este un multiplu comun pt. m și $n \Leftrightarrow [m;n] \mid x \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = [m;n]\cdot t$

$\Leftrightarrow x \in [m;n]\mathbb{Z}$.

Așadar $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = [m;n]\mathbb{Z}$.

d) $m\mathbb{Z}, n\mathbb{Z} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{reciproca de la II a)}}}{\leq} (\mathbb{Z},+) \xrightarrow{\mathrm{I}} m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} \leq (\mathbb{Z},+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{directa de la II a)}}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{N}$ a.î. $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$.

Vrem $a = \text{cmmdc}(m;n) \Leftrightarrow \begin{cases} a \mid m \text{ și } a \mid n \\ \text{dacă } c \mid m \text{ și } c \mid n \Rightarrow c \mid a \end{cases}$

Fie $\underline{y \in m\mathbb{Z}} \Rightarrow y + 0 \in m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} \Rightarrow \underline{y \in a\mathbb{Z}} \Rightarrow$

$\Rightarrow m\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{II}\ b)} a \mid m$. Analog $a \mid n$.

Fie $c \in \mathbb{N}$ a.î. $c|m$ și $c|n \Rightarrow \exists\, k, l \in \mathbb{Z}$ a.î. $\begin{cases} m = c\cdot k \\ n = c\cdot l \end{cases}$

(Vrem $c|a \overset{\text{II.b)}}{\Longleftrightarrow} a\mathbb{Z} \subseteq c\mathbb{Z}$).

Fie $x \in a\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} \Rightarrow \exists\, u, v \in \mathbb{Z}$ a.î.

$x = m\cdot u + n\cdot v = c\cdot k\cdot u + c\cdot l\cdot v = c\underbrace{(k\cdot u + l\cdot v)}_{\in \mathbb{Z}} \in c\mathbb{Z}$

Așadar $a\mathbb{Z} \subseteq c\mathbb{Z} \Rightarrow c|a \Rightarrow a = \text{cmmdc}(m;n)$.

Obs: Din egalitatea $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = (m;n)\mathbb{Z} \Rightarrow$
$\exists\, u, v \in \mathbb{Z}$ a.î. $\underbrace{(m;n) = m\cdot u + n\cdot v}_{\text{reprezentarea Bezout pt. c.m.m.d.c.}}$

6* Demonstrați că orice subgrup finit generat al lui $(\mathbb{Q}, +)$ este ciclic.
(temă*).