Seminar 4

Exemple de grupuri

- Grupuri ciclice: $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z}_n,+)\cong(U_n,\cdot)$
  $U_n=\{z\in\mathbb{C}^*\ /\ z^n=1\}$
- $(U(\mathbb{Z}_n),\cdot)$
- $n\geq 3$ $\quad D_n=\langle r,s\ /\ r^n=1=s^2,\ rs=sr^{n-1}\rangle$
  $=\{1,r,r^2,\dots,r^{n-1},s,sr,\dots,sr^{n-1}\}$
- Grupul simetric

$$S_n=\{\sigma:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\}\ /\ \sigma \text{ bijectivă}\}$$

Scriem $\quad \sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$.

Un ciclu $c=(a_1,\dots,a_k)$ de lungime k este o permutare pentru care $c(a_1)=a_2$, $c(a_2)=a_3,\dots,c(a_{k-1})=a_k$, $c(a_k)=a_1$ și $c(i)=i$ pentru $i\notin\{a_1,\dots,a_k\}$. Ciclurile $(a_1,\dots,a_k)$ și $(b_1,\dots b_l)$ se zic disjuncte dacă $\{a_1,\dots,a_k\}\cap\{b_1,\dots,b_l\}=\emptyset$. Știm:

a) Două cicluri disjuncte comută.

b) Orice permutare se scrie ca un produs de cicluri disjuncte; această scriere este unică abstracție făcând de ordinea acestor cicluri. (Nu se consideră cicluri de lungime 1, numite triviale care sunt de fapt permutarea identică).

c) $\mathrm{ord}(a_1,\dots,a_k)=k$.

d) Orice ciclu este un produs de transpoziții. Într-adevăr

$$(a_1,a_2,\dots,a_{k-1},a_k)=(a_k\, a_{k-1})\dots(a_k,a_2)\,(a_k,a_1)$$
$$=(a_1\, a_2)(a_2\, a_3)\dots(a_{k-1}\, a_k)$$

1. a) Arătați că în D_n este valabilă relația $r^ks=sr^{n-k}$.
   b) Completați tabla operației de grup pentru D_3, D_4, S_3.

Soluție a) Inducție după $k\geq 1$:

Pentru $k=1$ avem relația $rs=sr^{n-1}$ dată în definiția lui D_n.

Presupunem că $r^ks=sr^{n-k}$. Atunci $r^{k+1}s=r^krs=r^ksr^{n-1}\overset{\text{ip. de}}{\underset{\text{inducție}}{=}}$
$=s\cdot r^{n-k}\cdot r^{n-1}=s\cdot r^{2n-k-1}=s\cdot r^{n-(k+1)}\cdot r^n=s\cdot r^{n-(k+1)}$.

Deci $r^ks=sr^{n-k}$, $\forall k$.

b) $(D_3, \cdot)$

	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

$(D_4, \cdot)$

	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	s	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

$S_3 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\circ$	e	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
e	e	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_1	σ_1	σ_2	e	σ_4	σ_5	σ_3
σ_2	σ_2	e	σ_1	σ_5	σ_3	σ_4
σ_3	σ_3	σ_5	σ_4	e	σ_2	σ_1
σ_4	σ_4	σ_3	σ_5	σ_1	e	σ_2
σ_5	σ_5	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1	e

2. In S_3 considerăm $\rho = (1,2,3)$ și $\sigma = (1,2)$.

a) Arătați că $S = \langle \rho, \sigma \rangle$

b) Arătați că $\rho^3 = e$, $\sigma^2 = e$ și $\rho\sigma = \sigma\rho^2$. Deduceți de aici că S_3 este izomorf cu D_3.

Soluție (temă)

3. Determinați σ^n, $n \in \mathbb{Z}$ unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$.

Soluție. Varianta I. Se calculează σ^2, σ^3, etc.

Varianta II: $\sigma = (1,5,2,3,4)$

$\sigma^2 = (1,2,4,5,3)$ (se ia din 2 în 2 în ciclul σ; de exemplu $1 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 2$, $5 \xrightarrow{\sigma} 2 \xrightarrow{\sigma} 3$, ..., $4 \xrightarrow{\sigma} 1 \xrightarrow{\sigma} 5$ etc)

$\sigma^3 = (1,3,5,4,2)$ (se ia din 3 în 3 în σ)

$\sigma^4 = (1,4,3,2,5)$

$\sigma^5 = e$

Prin urmare $ord(\sigma) = 5$ (așa cum se știe din cazul general) și

$$\sigma^n = \sigma^{5k+r} = (\sigma^5)^k \cdot \sigma^r = e \cdot \sigma^r = \sigma^r \quad \text{cu } 0 \le r \le 4.$$

4. Fie permutările

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 4 & 3 & 1 & 6 & 8 & 5 & 7 & 2 & 10 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 8 & 4 & 3 & 7 & 6 & 11 & 10 & 12 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

Scrieți ca produs de cicluri disjuncte permutările $\sigma, \tau, \sigma^2, \tau^2$, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^{-1}, τ^{-1}, $\sigma^2\tau$ și calculați ordinele lor.

Soluție a) $\sigma = (1, 12, 11, 9, 2, 4)(5, 6, 8, 7) = c_1 \cdot c_2$

$ord(c_1) = 6$, $ord(c_2) = 4 \Rightarrow ord(\sigma) = [6, 4] = 12$

Deoarece c_1 și c_2 comută (sunt disjuncte) avem $\sigma^k = c_1^k c_2^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Deci $\sigma^2 = (1, 11, 2)(12, 9, 4)(5, 8)(6, 7) \longrightarrow ord(\sigma^2) = 6$

$\sigma^{-1} = (4, 2, 9, 11, 12, 1)(7, 8, 6, 5) \Rightarrow ord(\sigma^{-1}) = 12$

$\tau = (1, 5, 4)(2, 3) \Rightarrow \tau^2 = (1, 4, 5)$, $\tau^{-1} = (4, 5, 1)(3, 2) = (1, 4, 5)(2, 3)$

$ord(\tau) = 6$; $ord(\tau^2) = 3$; $ord(\tau^{-1}) = 6$

$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2, 5)(3, 4)$ etc.

[Restul exercițiului este temă]

5. Arătați că $S_4 \ncong D_{12}$, calculând toate ordinele elem. din S_4.

Soluție a) Avem mai multe cazuri pt. $\sigma \in S_4$:

I. $\sigma = e \Rightarrow ord(\sigma) = 1$

II. σ este ciclu de lungime $k \in \{2, 3, 4\} \Rightarrow ord(\sigma) = k$

III. σ este un produs de cel puțin două cicluri disjuncte

$\Rightarrow \sigma = (a_1, \dots, a_k)(b_1, \dots, b_l)$ cu $\{a_1, \dots, a_k\} \cup \{b_1, \dots, b_l\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$

$k \geq 2$, $l \geq 2$ și $\{a_1, \dots, a_k\} \cap \{b_1, \dots, b_l\} = \emptyset$

Atunci σ este produs de două transpoziții disjuncte $\Rightarrow ord(\sigma) = 2$.

b) Dacă ar exista un izomorfism $f : S_4 \to D_{12}$ atunci el ar trebui să păstreze toate ordinele elementelor. Dar în D_{12} există r ca $ord(r) = 12$ contradicție.

6. Determinați toate ordinele elementelor din S_5 (temă)

7. Se consideră mulțimea

$$Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

a) Să se completeze tabla unei operații $\cdot : Q \times Q \to Q$ după următoarele reguli:

- regula semnelor $-(-x) = x$, $(-x)y = x\cdot(-y) = -xy$, $\forall x, y \in Q$
- 1 este element neutru
- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$

b) Să se demonstreze că $(Q, \cdot)$ este un grup necomutativ. (grupul quaternionilor)

c) Este $(Q, \cdot)$ izomorf cu D_4?

Soluție. a)

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Obs. Semnul minus are în prezentarea de mai sus un sens formal. Mai precis $-x$ înseamnă în mod uzual opusul elementului x. Dar aici nu avem operația $+$, deci $-$ nu are acest sens. Acest lucru se vede și în cerința $-(-x) = x$. Dacă $-x$ ar fi opusul lui x atunci această cerință ar fi automat îndeplinită. Mai târziu vom vedea că grupul quaternionilor este parte a unei structuri mai complexe unde avem și o adunare și o înmulțire, și atunci semnul minus va primi înțelesul lui obișnuit.

b) De pe tablă se citesc proprietățile: parte stabilă, element neutru și existența inversului ($1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$, $x^{-1} = -x$ pt. $x \in \{i, j, k\}$). La fel se citește și necomutativitatea. Pentru a demonstra asociativitatea avem nevoie de un model. Căutăm un model de operație asociativă care are exact tabla de la a). Lipsa de comutativitate ne conduce către înmulțirea matricilor (nesingulare). Mai mult pe matrici avem și o operație de adunare, deci regula semnelor este automat adevărată.

[Fără indicație e destul de greu să găsim matricile].

Considerăm matricile din $M_2(\mathbb{C})$:

$$I=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix} \text{ și } K=I\cdot J=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$$

Se verifică atunci $I^2=J^2=K^2=-I_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$JK=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=I$, $KI=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}=J$) și deci tabla operației obținută din restricția înmulțirii matricilor pe mulțimea

$$\{I_2, -I_2, I, -I, J, -J, K, -K\}$$

este exact cea de la a). Deci avem asociativitatea.

c) Ordinele elementelor din Q și D_4 sunt

$(Q,\cdot)$:

x	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
$ord(x)$	1	2	4	4	4	4	4	4

$(D_4,\cdot)$:

x	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
$ord(x)$	1	4	2	4	2	2	2	2

Cum aceste două tabele nu coincid, și un izomorfism păstrează ordinul elementelor rezultă că $Q \ncong D_4$.

8. Să se rezolve în S_6 ecuațiile

a) $x^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6\end{pmatrix}$ b) $x^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4\end{pmatrix}$

Soluție. a) Ecuația se scrie $x^2=(2,5)$ și $\varepsilon(2,5)=-1$. (ε este signatura).
Dar $\varepsilon(x^2)=\varepsilon(x)\cdot\varepsilon(x)=1$ deci ecuația nu are soluții.

b) Ecuația se scrie $x^2=(1,3)(2,5,6,4)$.

Obs. De data aceasta $\varepsilon((1,3)(2,5,6,4))=\varepsilon(1,3)\cdot\varepsilon(2,5,6,4)=(-1)\cdot(-1)=1$.

Scriem x ca produs de cicluri disjuncte $x=c_1c_2\dots c_r$ (maxim 3 deci $1\le r\le 3$). Atunci $x^2=c_1^2c_2^2\dots c_r^2$.

Dar dacă $c=(a_1,a_2,\dots,a_{2k})$ este un ciclu de lungime pară $2k$ atunci

$c^2=(a_1,a_3,\dots,a_{2k-1})(a_2,a_4,\dots,a_{2k})$ = produs de două cicluri de lung k

Dacă $c=(a_1,a_2,\dots,a_{2k+1})$ este un ciclu de lungime impară $2k+1$ atunci

$c^2=(a_1,a_3,\dots,a_{2k-1},a_{2k+1},a_2,a_4,\dots,a_{2k})$ = un ciclu de lung. $2k+1$.

Așadar x^2 nu poate să fie produsul unui ciclu de lungime 2 (transpoziție) cu un ciclu de lungime 4 în S_6, deci nici ecuația de la b) nu are soluție.