Seminar 1

1. Să se dea exemplu de operatie care are un element neutru la stânga care nu este elem. neutru la dreapta.

Indicatie $*: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $x*y=|x|\,y$

2. Pentru operatiile de mai jos verificati proprietătile de asociativitate comutativitate, existenta elementului neutru și a celui simetric pentru:

a) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x*y=-xy$

b) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x*y=2xy$

c) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $x*y=x+y+xy$

d) $\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}^*\to\mathbb{Q}^*$, $x*y=\frac{x}{y}$

e) $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\to(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ $\quad (a,b)*(c,d)=(ad+bc,\,bd)$

3. Determinati $U(M_2(\mathbb{Z}),\cdot)$, $U(M_2(\mathbb{Z}_2),\cdot)$ și $U(M_2(\mathbb{Z}_3),\cdot)$.

4. Demonstrati că

$$\Sigma(2,\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d\in\mathbb{R}\quad a+c=1=b+d,\ a\neq b\right\}$$

este un grup în raport cu înmulțirea matricilor (grupul stocastic).

5. a) Fie $(G,\cdot)$ un grup. Demonstrați că dacă $x^2=1$ pt. orice $x\in G$ atunci G este abelian

b) Rămâne adevărată concluția de la a) dacă înlocuim „$x^2=1,\ \forall x\in G$" cu „$x^3=1,\ \forall x\in G$" ?

Indicatie pt. b): Nu! Contraexemplu: Grupul lui Heisenberg

$$H=\left\{\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z}_3) \;/\; x,y,z\in\mathbb{Z}_3\right\}$$

[Demonstrati că H este un grup în raport cu înmulțirea matricilor, că H este necomutativ și $A^3=I_3$ pt. orice $A\in H$].

6. Fie G un grup cu $|G|=2k$ (par). Arătați că există $g\in G$, $g\neq 1$ astfel încât $g^2=1$.

7. Demonstrati că $G=[0,1)$ este un grup abelian în raport cu operatia $*: G\times G\to G$, $x*y=\{x+y\}=x+y-[x+y]$.