# Probleme de numărare

Mulțime = mulțime finită (dacă nu este specificat expres altceva).
Fie $A$ o mulțime. Notăm cu $|A|$ sau $\#A$ nr. de elemente (cardinalul) mulțimii $A$. Mulțimea vidă $\emptyset$ are $|\emptyset| = 0$.

Întrebare: În câte moduri poate fi ales un element din $A$?
Răspuns: Evident, în atâtea moduri câte elemente are $A$ deci în $|A|$ – moduri.

Orice problemă de numărare poate fi redusă la a identifica (în mod corect) mulțimea posibilelor soluții și apoi la a evalua cardinalul acestei mulțimi.

Exemplul 1 Într-o clasă sunt 18 fete și 12 băieți. În câte moduri poate fi ales un elev din această clasă?

R: $18+12 = 30$ moduri.

Exemplul 2 În câte moduri poate fi ales un nr. natural $n$ care cu $n < 10$ care să fie prim sau par?

R: $4+5-1 = 8$ moduri.

Reamintim că dacă $A$ și $B$ sunt mulțimi atunci definim

a) Reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

b) Intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$

c) Diferența $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$

d) Produsul cartezian $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}$

Analizând exemplele 1 și 2 de mai sus observăm că avem de evaluat cardinalul reuniunii a două mulțimi:
Desigur avem $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Obs. Din formula cardinalului reuniunii se deduce asa numitul

Principiul sumei: Dacă un eveniment $E_1$ se poate realiza in $m_1$ moduri şi un eveniment $E_2$ se poate realiza in $m_2$ moduri iar cele două evenimente sunt independente, atunci evenimentul „se realizează unul dintre evenimentele $E_1$ sau $E_2$" se poate realiza in $m_1+m_2$ moduri.

Exemplul 3. In câte moduri se poate forma o pereche de dans (formată dintr-o fată şi un băiat) din clasa cu 18 fete şi 12 băieţi?

R: $18 \cdot 12 = 216$

In exemplul 3 se observă că avem de evaluat cardinalul produsului cartezian a două mulţimi. Este clar că dacă $|A| = m$, $|B| = n$ să notăm $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ şi $B = \{y_1, \dots, y_n\}$ atunci in $A \times B$ există $n$-perechi cu $x_1$ pe prima poziţie (anume $(x_1,y_1), (x_1,y_2), \dots, (x_1,y_n)$), $n$-perechi cu $x_2$ pe prima poziţie s.a.m.d. $n$-perechi cu $x_m$ pe prima poziţie. In total avem $m \cdot n$ - perechi deci

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Obs. Demonstraţia de mai sus a fost făcută pt. $A$ şi $B$ nevide dar formula este valabilă şi in cazul in care $A = \emptyset$ sau $B = \emptyset$.

Din formula cardinalului produsului cartezian se deduce:

Principiul produsului. Dacă un eveniment $E_1$ se poate realiza in $m_1$ moduri, un eveniment $E_2$ se poate realiza in $m_2$ moduri iar $E_1$ şi $E_2$ sunt independente, atunci evenimentul „se realizează simultan $E_1$ şi $E_2$" se poate realiza in $m_1 \cdot m_2$ moduri

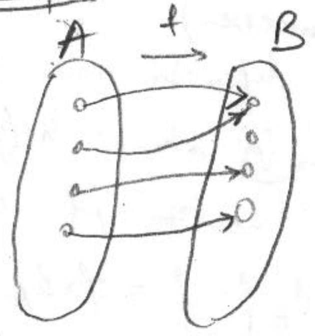
# Probleme de numărare

Mulțime = mulțime finită (dacă nu se specifică altfel)
Pentru o mulțime $A$ notăm cu $|A|$ sau $\#A$ numărul de elemente (cardinalul) mulțimii $A$.

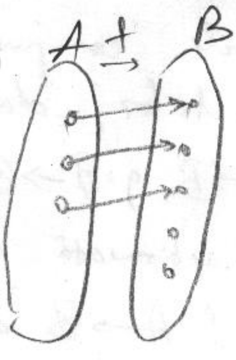
Def. O funcție $f$ de la $A$ la $B$ ($A$ și $B$ sunt mulțimi) este o corespondență care asociază fiecărui element din $A$ un singur element din $B$. Notăm $f: A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.
Dacă $x \in A$ atunci notăm $y = f(x)$ (unicul element din $B$ pus în corespondență cu $x$) și îl numim imaginea lui $x \in A$ prin funcția $f$; $A$ se numește domeniu iar $B$ codomeniu.

Def. O funcție $f: A \to B$ se zice
a) injectivă dacă $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
(sau echivalent $x_1, x_2 \in A$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)
b) surjectivă dacă $\forall y \in B\ \exists x \in A : f(x) = y$
c) bijectivă dacă este atât surjectivă cât și ~~biject~~ injectivă.

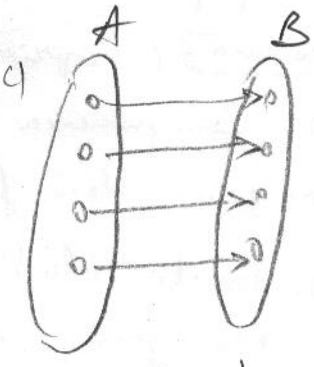
Exemple

a) 

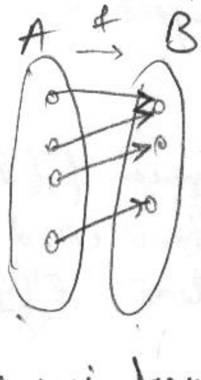
Funcție care nu este nici injectivă nici surj.

b) 

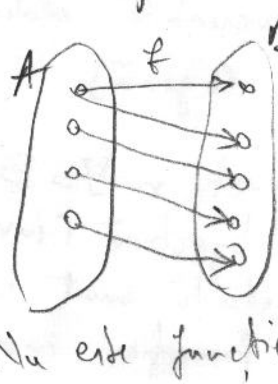
Funcție inj. dar nu surj.

c) 

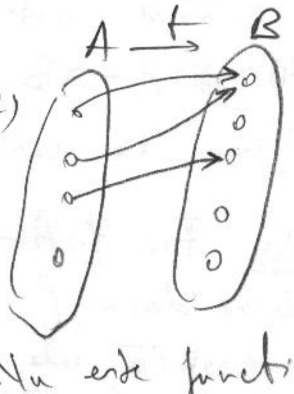
Funcție bijectivă

d) 

Funcție surj. dar nu inj.

e) 

Nu este funcție

f) 

Nu este funcție

**Obs.** Dacă $\exists f: A \longrightarrow B$ ~~[illegible]~~ o funcție

a) injectivă atunci $|A| \leq |B|$

b) surjectivă atunci $|A| \geq |B|$

c) bijectivă atunci $|A| = |B|$

**Def.** Fie $f: A \to B$ o funcție și $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$. Definim:

a) imaginea submulțimii $X$ prin $f$: $f(X) = \{ y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y \}$

(sau echivalent: $f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$)

b) contraimaginea submulțimii $Y$ prin $f$: $f^{-1}(Y) = \{ x \in A \mid f(x) \in Y \}$.

**Obs.** Fie $f: A \to B$ o funcție. Atunci

1) $f^{-1}(B) = A$ (din definiția funcției).

2) $f(A) = B$ ddacă $f$ este surjectivă.

**Def.** Dacă $f: A \to B$ și $g: B \to C$ sunt două funcții se definește compunerea $g \circ f: A \longrightarrow C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$.

**Def.** Pentru orice mulțime $A$ se definește funcția identică a lui $A$ prin $1_A: A \longrightarrow A$, $1_A(x) = x$, $\forall x \in A$ (se not. uneori și $id_A = 1_A$)

**Def.** O funcție $f: A \to B$ se zice inversabilă dacă $\exists f': B \longrightarrow A$ a.î. $f' \circ f = 1$ și $f \circ f' = 1$.

**Teorema 3** (Proprietăți ale compunerii și inversei)

1). Compunerea funcțiilor, dacă este definită, este asociativă. Mai precis dacă $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ atunci $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

2). Funcția identitate acționează ca elem. neutru pt. compunere. Mai precis dacă $f: A \to B$ atunci $1_B \circ f = f = f \circ 1_A$.

3) Dacă $f: A \to B$ este inversabilă atunci inversa ei este unică și se notează $f^{-1}: B \to A$.

4) $f: A \to B$ este inversabilă ddacă $f$ este bijectivă.

**Dem.** (v. cursul de logică).

**Obs.** Fie $f: A \to B$ o funcție și $Y \subseteq B$. Contraimaginea $f^{-1}(Y)$ se definește chiar dacă $f$ nu este bijectivă (inversabilă). Atunci când $f$ este inversabilă cele două notații sunt consistente, adică $f^{-1}(Y)$ este imaginea lui $Y$ prin funcția inversă.

Teorema 4. Fie $A$ și $B$ două mulțimi nevide cu $|A|=m$ și $|B|=n$. Atunci numărul tuturor funcțiilor care se pot defini cu domeniul $A$ și codomeniul $B$ este $n^m$.

Dem. Notăm $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ și $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ și considerăm $f:A\to B$ o funcție. Elementul $f(a_1)\in B$ se poate alege în exact $n$-moduri; independent de această alegere elementul $f(a_2)\in B$ se poate alege în $n$-moduri ș.a.m.d. elementul $f(a_m)\in B$ se poate alege în $n$-moduri. Prin urmare numărul căutat este

$$\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{m \text{ ori}}=n^m.$$

Notație $B^A=\{f\mid f:A\to B \text{ funcție}\}$. Am dem. $|B^A|=|B|^{|A|}$

Ex 1 (temă) a) Fie $A$ și $B$ două mulțimi cu $|A|=m$ și $|B|=n$. Găsiți o bijecție $\varphi: B^A\longrightarrow \underbrace{B\times B\times\dots\times B}_{m\text{-ori}}$ și dați o altă demonstrație formulei $|B^A|=|B|^{|A|}$.

b) Un cuvânt de lungime $m$ format cu elemente din $B$ este un șir ordonat $y=y_1y_2\dots y_m$ unde $y_i\in B$ $(1\le i\le m)$, obținut prin concatenarea (= juxtapunerea, alăturarea) simbolurilor $y_i$. Găsiți o bijecție $B^A\longrightarrow\{y\mid y \text{ cuvânt de lungime } m \text{ peste } B\}$.

c) Considerăm că mulțimea $A$ conține $m$-obiecte $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ iar mulțimea $B$ conține $n$-cutii (i.e. locuri goale) $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ în care pot fi plasate unul, niciunul sau mai multe obiecte din $A$. Găsiți o bijecție între $B^A$ și modurile în care pot fi aranjate cele $m$-obiecte din $A$ în cele ~~m~~ $n$ cutii din $B$.

În virtutea ex. 1 vom identifica funcțiile cu domeniul $A$ și codomeniul $B$ fie cu elemente ale produsului cartezian $\underbrace{B\times B\times\dots\times B}_{m \text{ ori}}$, fie cu cuvinte de lungime $m$ peste $B$, fie cu aranjamente cu repetiție (i.e. cutiile se pot repeta pt. că pot conține mai multe obiecte) a $m$-obiecte pe $n$ poziții (în funcție de ceea ce ni se pare mai intuitiv într-un anumit context).

Obs. Avem deci $\bar{A}_n^m=n^m$ unde $\bar{A}_n^m=$ nr. aranjamentelor cu repetiție de $n$ luate câte $m$.

**Teorema 5** Fie $A$ și $B$ două mulțimi nevide cu $|A| = m$ și $|B| = n$. Numărul funcțiilor injective $f: A \to B$ este

$$[n]_m = n \cdot (n-1) \dots (n-m+1).$$

**Dem.** Ca și în cazul T.1 scriem $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ și $f: A \to B$ o funcție de data aceasta injectivă.
Elementul $f(a_1) \in B$ poate fi ales în $n$ moduri; ~~elementul $f(a_2)$~~ odată ales $f(a_1)$, elementul $f(a_2)$ poate fi ales independent în $n-1$ moduri pt. că $f(a_2) \neq f(a_1)$ (pt. a nu strica injectivitatea); elem. $f(a_3)$ poate fi ales în $n-2$ moduri ș.a.m.d. elementul $f(a_m)$ poate fi ales în $n-m+1$ moduri. Este clar că dacă $m > n$ atunci nu există funcții injective $A \to B$ și în argumentul de mai sus elementul $f(a_{n+1})$ poate fi ales în $n-n=0$ moduri (nu poate fi ales fără a strica injectivitatea) dar formula funcționează pt. că avem $0 = 0$ q.e.d.

Dacă $m \leq n$ numărul $[n]_m$ se numește nr. aranjamentelor de $n$ elemente luate câte $m$ (= în câte moduri se pot aranja $m$ obiecte în $n$ căsuțe dacă fiecare căsuță poate să conțină exact un obiect) și se notează $A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1)$.

**Corolar 6** Fie $A$ și $B$ două mulțimi nevide. Dacă $|A| = |B| = n$ atunci numărul funcțiilor bijective $f: A \to B$ este $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$. Dacă $|A| \neq |B|$ atunci nu există funcții bijective $f: A \to B$.

**Dem.** Este clar că pt. a exista funcții bijective trebuie să avem $|A| = |B|$. În acest caz avem $f: A \to B$ inj. ddacă $f: A \to B$ surj. ddacă $f: A \to B$ bij. și se aplică T.5. q.e.d.

Având în vedere iarăși identificările făcute în ex.1 numărul
$P_n = n!$ se mai numește nr. permutărilor a $n$-obiecte (sau pe scurt permutări de $n$).

**Corolar 7** $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!} = \dfrac{P_n}{P_{n-m}}$.

**Obs.** Prin convenție avem $0! = 1$ (a se vedea analogia cu funcțiile)

Def. Fie $f : A \to B$ o funcție unde $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ și $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.
Prin tipul funcției $f$ (respectiv al cuvântului $f(a_1) f(a_2) \dots f(a_m)$ de lungime $m$ peste $B$ corespunzător funcției $f$) înțelegem $n$-uplul

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n \quad (\text{deci } k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\})$$

astfel încât $k_j = |f^{-1}(\{b_j\})|$ (numărul de apariții a lui $b_j$ în cuvânt)

Obs. 1) Desigur avem $0 \le k_j \le m$ pt. orice $1 \le j \le n$ și $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$.

2) Fie $f : A \to B$ o funcție de tipul $(k_1, k_2, \dots, k_n)$. Atunci

2a) $f$ este injectivă ddacă $k_j \in \{0, 1\}$, pt. orice $1 \le j \le n$

2b) $f$ este surjectivă ddacă $1 \le k_j$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

2c) $f$ este bijectivă ddacă $k_j = 1$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Teorema 8 Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ și $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ două mulțimi și $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ un tip adică $0 \le k_j \le m$ și $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$.
Numărul tuturor funcțiilor care au acest tip este

$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{(k_1!)(k_2!) \dots (k_n)!} = \frac{m!}{(k_1!)(k_2!) \dots (k_n!)}$$

Demonstrație. Pornind de la datele problemei vom construi o nouă mulțime $C = \{b_1^1, \dots, b_1^{k_1}, b_2^1, \dots, b_2^{k_2}, \dots b_n^1, \dots, b_n^{k_n}\}$ cu elemente arbitrare (de exemplu numere naturale distincte). Este clar că

$$|C| = k_1 + k_2 + \dots + k_n = m.$$

Fiecare funcție $f : A \to B$ de tipul $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ induce o bijecție $\bar{f} : A \to C$ (de exemplu numerotând săgețile care ajung în $b_1$ prin $f$ în mod aleator cu $b_1^1, \dots b_1^{k_1}$, săgețile care ajung în $b_2$ prin $f$ în mod aleator cu $b_2^1, \dots, b_2^{k_2}$ ș.a.m.d. săgețile care ajung în $b_n$ prin $f$ în mod aleator cu $b_n^1, \dots, b_n^{k_n}$. Desigur orice funcție bijectivă de la $A$ la $C$ apare în acest mod pt. că dacă dacă $k_j \neq 0$ orice element din $A$ poate fi dus în elem. $b_j \in B$ printr-o funcție de tipul dat. Avem $P(m) = m!$ funcții bijective între $A$ și $C$.
Pe de altă parte săgețile sunt numerotate în mod aleator așa că pt. orice funcție bijectivă $\bar{g} : A \to C$ există $k_1!$ funcții de diferite de tipul dat care diferă numai pe elementele din $f^{-1}(\{b_1\})$, există $k_2!$ funcții diferite de tipul dat care diferă numai pe $f^{-1}(\{b_2\})$ ș.a.m.d. (și toate aceste funcții dau aceeași bijecție $\bar{g}$).

Prin urmare nr. căutat este
$$\frac{m!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$$

Def. O funcție $f:A\to B$ de un tip dat $(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ se numește permutare cu repetiție iar numărul $P(k_1,\ldots,k_n)$ se numește nr. permutărilor cu repetiție de respectivul tip.

Notație $\quad P(k_1,\ldots,k_n)=\binom{m}{k_1,k_2,\ldots,k_n}$

Teorema 9 Fie $A$ și $B$ două mulțimi cu $|A|=m$ și $|B|=n\geq 1$. Numărul tuturor tipurilor posibile pentru o funcție $f:A\to B$ este
$$\overline{C}_n^m=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!}=\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\cdot m!}$$
și se numește combinări cu repetiție de $n$ luate câte $m$.

Înainte de a demonstra teorema vom nota $\overline{C}_n^m=\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!}$ și avem:

Lema 10 a) $\overline{C}_n^0=1=\overline{C}_1^m$

b) $\overline{C}_n^m=\overline{C}_n^{m-1}+\overline{C}_{n-1}^m$

Dem. a) $\overline{C}_n^0=\frac{(n-1)!}{(n-1)!\cdot 0!}=1 \qquad \overline{C}_1^m=\frac{m!}{0!\cdot m!}=1$

b)
$$\overline{C}_n^{m-1}+\overline{C}_{n-1}^m=\frac{(n+m-2)!}{(n-1)!\,(m-1)!}+\frac{(n+m-2)!}{(n-2)!\cdot m!}=\frac{(n+m-2)!}{(n-2)!\,(m-1)!}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{m}\right)$$
$$=\frac{(n+m-2)!}{(n-2)!\,(m-1)!}\cdot\frac{m+n-1}{(n-1)\cdot m}=\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\cdot m!}=\overline{C}_n^m$$

Dem (pt. T. 9) Să notăm cu $\widetilde{C}_n^m$ numărul tuturor tipurilor posibile ale unei funcții $f:A\to B$ ceea ce înseamnă nr. tuturor sistemelor $(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n$ pt. care $k_1+k_2+\ldots+k_n=m$.

Vom demonstra prin inducție după $n\geq 1$ că $\widetilde{C}_n^m=\overline{C}_n^m$.

Pt. $n=1$ avem o singură funcție $f:A\to B$ (și anume $f(x)=b_1,\ \forall x\in A$) și un singur tip anume $k_1=m\in\mathbb{N}^1$, deci $\widetilde{C}_1^m=1=\overline{C}_1^m$.

Să presupunem că $\widetilde{C}_{n-1}^m=\overline{C}_{n-1}^m$ pt. orice $m\in\mathbb{N}$ și pt. $n-1\geq 1$.

Considerăm un tip $(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},k_n)\in\mathbb{N}^m$ cu $k_1+\ldots+k_{n-1}+k_n=m$

Dacă $k_n=0$ atunci acest tip poate fi ales în exact $\widetilde{C}_{n-1}^m$ moduri

Dacă $k_n=1$ atunci acest tip poate fi ales în exact $\widetilde{C}_{n-1}^{m-1}$ moduri

ș.a.m.d.

Dacă $k_n = m$ atunci acest tip poate fi ales exact în $\tilde{C}^0_{n-1}$ moduri.

Avem așadar:

$$\tilde{C}^m_n = \tilde{C}^m_{n-1} + \tilde{C}^{m-1}_{n-1} + \ldots + \tilde{C}^1_{n-1} + \tilde{C}^0_{n-1} \overset{\text{ip. de ind}}{=} \overline{C}^m_{n-1} + \overline{C}^{m-1}_{n-1} + \ldots + \overline{C}^1_{n-1} + \overline{C}^0_{n-1}$$

$$\overset{\text{Lema 9}}{=} \overline{C}^m_n - \cancel{\overline{C}^{m-1}_n} + \cancel{\overline{C}^{m-1}_n} - \overline{C}^{m-2}_n + \ldots + \overline{C}^1_n - \overline{C}^0_n + \overline{C}^0_{n-1} = \overline{C}^m_n - 1 + 1 = \overline{C}^m_n.$$

Corolar 11 Pt. orice $m \in \mathbb{N}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\overline{C}^m_n = \overline{C}^m_{n-1} + \overline{C}^{m-1}_{n-1} + \ldots + \overline{C}^1_{n-1} + \overline{C}^0_{n-1}.$$

Ex. 2 (temă) Fie $A, B \subseteq \mathbb{N}$, $|A| = m$, $|B| = n$ ordonate în ordinea obișnuită a numerelor naturale. O funcție $f: A \to B$ se zice crescătoare dacă $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$. Arătați că numărul funcțiilor crescătoare $f: A \to B$ este $\overline{C}^m_n$. (Ind: Se stabilește o bijecție între funcțiile crescătoare și mulțimea tuturor tipurilor).

Obs. În ex. 2 nu este esențial ca $A, B \subseteq \mathbb{N}$ pt. că nu este importantă natura acestor elemente ci numai numărul și ordinea. Mai precis este esențial ca $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ și $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ (cu elemente oarecare) împreună cu o ordine $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ și $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$.

Ex. 3 (temă) Să se arate că numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi $A$ cu $|A| = n$ este $2^{|A|} = 2^n$.

Ind: Notăm $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ mulțimea tuturor submulțimilor lui $A$. Fiecărei submulțimi $X \subseteq A$ îi atașăm funcția caracteristică

$$\chi_X : A \to \{0,1\}, \quad \chi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \setminus X \\ 1, & x \in X. \end{cases}$$

Arătăm că aplicația $\begin{cases} \mathcal{P}(A) \longrightarrow \{0,1\}^A \\ X \longmapsto \chi_X \end{cases}$ este o bijecție.

Teorema 12 Numărul tuturor submulțimilor cu $m$ elemente ale unei mulțimi $A$ cu $n$-elemente este

$$C^m_n = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < m \\ \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots n}{m!} & \text{dacă } m \le n \end{cases}$$

și se numește combinări de $n$ luate câte $m$.

Dem. Dacă $n<m$ atunci evident $C_n^m=0$. Dacă $m\le n$ atunci prin bijecția $P(A)\longrightarrow\{0,1\}^A$ dată în ex.3 submulțimile cu $m$ elemente corespund funcțiilor de tipul $(n-m,m)\in\mathbb{N}^2$. Deci numărul lor este $P(n-m,m)=\dfrac{n!}{(n-m)!\,m!}$.

Ex.4 (temă). Fie $A$ și $B$ două mulțimi total ordonate cu $|A|=m$ și $|B|=n$. (de exemplu $A,B\subseteq\mathbb{N}$ cu ordinea naturală). O funcție $f:A\to B$ se zice strict crescătoare dacă $x_1,x_2\in A$, $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Arătați că nr. funcțiilor strict crescătoare $f:A\to B$ este $C_n^m$.

Obs a) O funcție strict crescătoare este injectivă. (evident)

b) Comparând ex.3 și ex.4 se poate înțelege de ce $\bar{C}_n^m$ se numesc combinări cu repetiție.

Corolar 13 a) $C_n^0=C_n^n=1$

b) $C_n^m=C_n^{n-m}$,

c) $\bar{C}_n^m=C_{n+m-1}^m$

d) $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$ pt. $n\ge 1$. (formula de recurență pt. combinări)

e) $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{P_m}$

Dem. a), b), c), e) sunt evidente; d) se dem. ca și Lema 10 b)

Obs. Folosind formula de recurență putem calcula $C_n^m$ din aproape în aproape ca în urm. schemă (triunghiul lui Pascal).

| $n \backslash m$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |

(pe fiecare linie se începe cu 1 și se continuă apoi adunând valorile trecute în căsuțele de deasupra pe aceeași coloană și o coloană mai la stânga)

Temă

Ex.5 Să se arate că $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Ex.6 Să se demonstreze Teorema 4 prin inducție după n = nr. de elem. al codomeniului.

Ex.7. Să se dea o altă demonstrație pt. Teorema 12 care să folosească formula $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$ (Ind: ~~A~~ se vedea identificările făcute în ex.1)

Ex.8 (Erdös-Szekeres). Într-un șir de $mn+1$ nr. naturale distincte există un subșir descrescător de lungime $> m$ sau există un subșir crescător de lungime $> n$. (Prin subșir înțelegem un șir format cu unele dintre elementele șirului inițial păstrând ordinea din el)

Ind: Reducere la absurd. Fie $A = \{a_1, \dots, a_{mn+1}\}$ mulțimea termenilor șirului inițial. Presupunând concluzia falsă vom demonstra că funcția

$f : A \to \{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\}$, $f(a_i) = (l_i^-, l_i^+)$ este injectivă

unde $l_i^-$ și $l_i^+$ sunt lungimile maxime ale unui subșir descrescător resp. crescător care pornește cu $a_i$.

Ex.9 Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ o mulțime de obiecte care trebuie ordonate în n-căsuțe etichetate cu elem. mulțimii $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Mai mult, considerăm că schimbând ordinea în oricare căsuță obținem aranjări diferite (O astfel de aranjare se numește aranjare în căsuțe ordonate). Arătați că nr. de aranjări a m-obiecte în n-căsuțe ordonate este

$$[n]^m = n(n+1)\dots(n+m-1)$$

Indicație. Inducție după m

Ex.10 Verificați că $\bar{C}_n^m = \frac{[n]^m}{m!}$. Dați o altă demonstrație pentru ex. 2 (care spune că nr. tuturor funcțiilor crescă(toare) de la A cu m elemente la B cu n elemente este $\bar{C}_n^m$) folosind formula $\bar{C}_n^m = \frac{[n]^m}{m!}$ (Ind. Analogie cu ex.7)

Ex.11 Să se determine nr. de moduri în care putem scrie nr. natural n ca o sumă de m numere naturale (inclusiv 0)

$n = u_1 + u_2 + \dots + u_m$, două sume diferind prin natura întregilor $u_1, u_2, \dots, u_m$ sau prin ordinea lor.

Ind. Notăm cu $s_k = \sum_{i=1}^{k} u_i$ sumele parțiale ($1 \le k \le m$). Avem $s_m = n$. Se stabilește o bijecție între mulțimea descompunerilor $n = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$ și mulțimea cuvintelor crescătoare $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_{m-1} \le n$ și se folosește ex. 2 sau ex. 10.

Ex. 12. Să se determine nr. de descompuneri a lui $n \in \mathbb{N}^*$ ca o sumă $n = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$ de $m$ - nr. naturale nenule, două sume diferind prin natura termenilor sau ordinea acestora.

Ex. 13. Fie $A$ o mulțime cu $n$ elemente. Să se arate că nr. de submulțimi ale lui $A$ incomparabile două câte două în raport cu incluziunea este $C_n^{[n/2]}$ (aici $[n/2]$ este partea întreagă din $\frac{n}{2}$).

Ex. 14. Să se găsească nr. soluțiilor întregi ale ecuației

$$a + b + c + d = 17$$

cu $1 \le a \le 3$, $2 \le b \le 4$, $3 \le c \le 5$, $4 \le d \le 6$.

(Ind. Se folosește ex. 11 și/sau ex. 12).

Ex. 15. În câte moduri se poate împărți un grup de 26 de persoane în două grupuri de 5 persoane și 4 grupuri de 4 persoane?

Ex. 16. Fie $n$ puncte în plan. Câte drepte determină aceste puncte știind că oricare trei dintre ele nu sunt coliniare? Dar dacă exact $k$ se află pe aceeași dreaptă ($3 \le k \le n$)?

Ex. 17. Care este nr. de submatrici de tip $p \times q$ ale unei matrici de tipul $m \times n$?

Ex. 18. În câte moduri se pot așeza $n$ persoane la o masă circulară în jurul căreia există $n$ scaune fixe?

Ex. 19. Care este nr. ciclurilor de lungime $m$ din $S_n$ ($m \le n$)? Aici $S_n$ este mulțimea (grupul) tuturor permutărilor. Un ciclu de lungime $m$ este o permutare $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ cu proprietatea că există $\{k_1, \ldots, k_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ a.î. $\sigma(k_1) = k_2$, $\sigma(k_2) = k_3, \ldots, \sigma(k_{m-1}) = k_m$, $\sigma(k_m) = k_1$ și $\sigma(x) = x$, $\forall x \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k_1, \ldots, k_m\}$.