Algebra liniară
Model de subiecte

1. a) Să se definească următoarele noţiuni şi să se dea câte un exemplu din fiecare: spaţiu vectorial, vectori liniar dependenţi, valoare proprie a unui endomorfism.
b) Să se enunţe teorema care caracterizează endomorfismele diagonalizabile, prin egalitatea dintre multiplicităţile algebrice şi geometrice.
c) Să se stabilească folosind lema substituţiei dacă

$$\mathbf{b} = ((1,4,2),(2,3,1),(3,0,-1))^t$$

este o bază pentru $\mathbb{R}^3$ şi dacă da, să se determine coordonatele vectorului $v = (0,-7,-4)$ relativ la acestă bază.
2. a) Să se arate că un vector nenul al unui spaţiu vectorial este liniar independent.
b) Fie $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ o mulţime de vectori într-un K-spaţiu vectorial V. Să se arate că acestă submulţime formează o bază a lui V ddacă vectorii $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt liniar independenţi şi pentru orice $x \in V$, vectorii $b_1, b_2, \ldots, b_n, x$ nu mai sunt liniar independenţi.
c) Fie $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ şi $g \in \mathrm{Hom}_K(W,U)$ două aplicaţii liniare şi $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m)^t$, $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)^t$, $\mathbf{u} = (u_n, \ldots, u_p)^t$ baze ale spac tiilor vectoriale V, W, respectiv U. Să se arate că $[g \circ f]_{\mathbf{v},\mathbf{u}} = [f]_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \cdot [g]_{\mathbf{w},\mathbf{u}}$.
3. Fie $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$ şi $T = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 = 2x_1 + x_2 + x_3\}$.
a) Să se arate că $S, T \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ şi că $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.
b) Să se găsescă câte o bază şi dimensiunea subspaţiilor S şi T.
c) Să se arate că $s = (1,-2,3)$ aparţine lui S şi să se găsească coordonatele lui s în baza găsită la b).

4. Fie $f \in \mathrm{End}_R(\mathbb{R}^4)$ cu matricea în baza canonică $[f]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

a) Să se arate determine $f(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}^4$.
c) Să se arate că $\mathbf{b} = ((1,2,1,2),(-1,3,1,3),(0,0,1,1),(2,1,1,1))^t$ este bază în baze în $\mathbb{R}^4$ şi să se determine matricea $[f]_{\mathbf{b}}$.
d) Să se determine câte o baza şi dimensiunea pentru $\mathrm{Ker}(f)$ şi $\mathrm{Im}(f)$.