Inele și corpuri

Enunțuri

1. Fie $n \geq 2$. Să se arate că inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ nu are divizori ai lui zero ddacă n este prim.

<u>Observație</u> „ddacă" = „dacă și numai dacă"

2. Să se rezolve ecuațiile
   a) $x^2 - \hat{4}x + \hat{3} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_{11}$ și în $\mathbb{Z}_{15}$.
   b) $\hat{3}x^2 - \hat{4}x + \hat{1} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_5$ și în $\mathbb{Z}_9$.

3. Să se rezolve în $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y + \hat{3}z = \hat{2} \\ \hat{6}x + \hat{4}y + \hat{2}z = \hat{6} \\ \hat{3}x + \hat{2}y + \hat{4}z = \hat{3} \end{cases}$$

(Admitere la Facultatea de Matematică, 1989)

4. Pentru $a, b \in \mathbb{R}$ notăm $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   a) Să se arate că $K = \{M(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ este un corp în raport cu adunarea și înmulțirea obișnuite ale matricilor.
   b) Corpurile K și $\mathbb{C}$ sunt izomorfe.
   c) Să se rezolve în K sistemul

$$\begin{cases} X + Y = M(3,3) \\ X^3 + Y^3 = M(-9,9) \end{cases}$$

5. Să se descompună în factori ireductibili polinoamele:
   a) $X^3 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$
   b) $X^p + \hat{1} \in \mathbb{Z}_p[X]$ unde p este un număr prim.

6. Fie $R = \{0, 1, a, b\}$ un inel cu 4 elemente (0 și 1 sunt elementele neutre pentru adunare respectiv înmulțire). Să se arate că:
   a) Dacă R nu are divizori ai lui zero atunci $(R, +)$ este izomorf cu grupul lui Klein
   b) R este corp ddacă ecuația $1 + x = x^2$ are soluții în R.
   c) Există un corp cu 4 elemente și el este în mod necesar comutativ.

7. Să se arate că structurile de corp $(\mathbb{R},+,\cdot)$ și $(\mathbb{C},+,\cdot)$ nu sunt izomorfe.

8. Fie $(R,+,\cdot)$ un inel.

a) Dacă $(x^2-x)y = y(x^2-x)$, $\forall x,y\in R$ atunci R este comutativ.

b) Dacă $(x^3-x^2)y = y(x^3-x^2)$, $\forall x,y\in R$ atunci R este comutativ.

c) Dacă $f:R\to R$ este un morfism surjectiv de grupuri între $(R,+)$ și el însuși astfel încât $(x^2-f(x))y = y(x^2-f(x))$, $\forall x,y\in R$ atunci R este comutativ.

d) Dacă $y(xzx-zxz)=(xzx-zxz)y$, $\forall x,y,z\in R$ atunci R este comutativ.