Curs 8

Spațiul coloanelor și spațiul liniilor (unei matrici)

Considerăm o matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Individualizăm coloanele

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$ unde $a_j \in \mathbb{R}^m$ $1 \le j \le n$ sunt vectori

Obs. Un sistem $Ax = b$ este atunci o combinație liniară egală cu b:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b$$

Numim spațiul coloanelor lui A subspațiul lui $\mathbb{R}^m$ generat de vectorii $a_1, a_2, \dots, a_n$; notăm cu $Col(A)$ acest subspațiu. Deci

$$Col(A) = \mathrm{span}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Observație. Uneori vorbim și de spațiul liniilor lui A. Acesta este definit astfel: $Lin(A) = Col(A^T)$

Cerință: Explicați spațiul liniilor lui A ca fiind un subspațiu al lui $\mathbb{R}^n$ generat de anumiți vectori.

Exemplu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$Col(A) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ subsp. în } \mathbb{R}^2$$

$$Lin(A) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right) \text{ subspațiu în } \mathbb{R}^4.$$

Întrebare: Cum putem găsi o bază în $Col(A)$ sau $Lin(A)$?

Răspuns: Generarea deja o avem din definiția acestor spații. Deci rămâne întrebarea cum putem extrage dintr-o mulțime de vectori pe aceia care sunt liniar independenți. Un posibil răspuns este metoda lui Gauss de aducere a unei matrici la forma eșalon. După ce am făcut reducerea pe linii la forma eșalon, se știe că liniile nenule care au rămas sunt liniar independente. Deci ele formează o bază pt.

Lin(A). Același algoritm pentru A^T ne dă dimensiunea pt. Col(A). Se poate observa însă că putem lucra și cu matricea A (în loc de A^T) să facem reducerea pe linii și apoi să observăm coloanele pe care apare 1-dominant. Coloanele corespunzătoare din matricea inițială vor constitui o bază pentru Col(A).

<u>Consecință</u>: $\dim Col(A) = \dim Lin(A)$.

<u>Exemplu</u>: Calculați o bază pt. Lin(A) și Col(A) unde

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 := L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 := -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 := L_4 + 2L_2]{L_3 := L_3 + 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deci $\dim Lin(A) = 2$ și $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$ este o bază în Lin(A) (subsp. în $\mathbb{R}^3$)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 15 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 := L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 15 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 := -L_2]{L_3 := L_3 + 5L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deci $\dim Col(A) = 2$ și $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ este o bază în Col(A) (subspațiu în $\mathbb{R}^4$)

b) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 := L_3 + L_1 \\ L_4 := L_4 - 2L_1}]{L_2 := L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 := L_4 - 2L_2]{L_3 := L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 := \frac{1}{9}L_4]{\substack{L_2 := \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 := \frac{1}{5}L_3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 := L_4 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci $\dim Col(A) = \dim Lin(A) = 3$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bază în Lin(A)

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bază în Col(A)

Propoziție. $\dim Col(A) = \dim Lin(A) = rang(A)$.

Dem. Am văzut că $\dim Col(A)$ și $\dim Lin(A)$ sunt egale și sunt egale cu nr. de linii nenule din forma eșalon (redusă). Dar acest nr. de linii este egal și cu $rang(A)$.

Obs. Considerăm un sistem $(S): Ax = b$ și îl scriem în forma

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b$$

unde $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (a_i sunt coloanele lui A).

Este clar atunci că (S) are soluție dacă și numai dacă

$$b \in span(a_1, a_2, \dots, a_n) = Col(A).$$

Punând cap la cap această informație și cu cea din Propoziția de mai sus rezultă un argument pentru Teorema lui Rouché:

Sistemul (S) este compatibil dacă și numai dacă

$$rang(A) = rang(A|b) \quad (\text{adică } rang(\bar{A}))$$

Spațiul null al unei matrici

Def. Dacă $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ este o matrice definim

$$Null(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

și numim acest spațiu spațiul null (la dreapta) al lui A.

Proprietate. $Null(A)$ este un subspațiu al lui $\mathbb{R}^n$ (deci este într-adevăr un spațiu vectorial).

Dem. Avem de verificat trei condiții:

- $A\cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \in Null(A)$
- $x, y \in Null\,A \Rightarrow Ax = 0$ și $Ay = 0 \Rightarrow A\cdot(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$ $\Rightarrow x + y \in Null(A)$
- $x \in Null(A), a \in \mathbb{R} \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A(ax) = a\cdot Ax = a\cdot 0 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a\cdot x \in Null(A)$. ⊠.

Uneori vorbim și de spațiul null la stânga al matricii A:

$$Null(A^T) = \{z \in \mathbb{R}^m \mid A^T z = 0\} = \{z \in \mathbb{R}^m \mid z^T A = (0, 0, \dots, 0)\}$$

care este un subspațiu în $\mathbb{R}^m$.

Intrebare: Care este dimensiunea spațiului Null(A)?

Din definiție Null(A) este mulțimea soluțiilor sistemului omogen

$(S_0): \quad Ax = 0$

Prin urmare dim Null(A) este egală cu nr. necunoscutelor secundare (adică a variabilelor libere, care pot fi înlocuite cu orice valoare reală). Notăm $def(A) = \dim Null(A)$ și numim defectul lui A acest număr. Pentru că nr. necunoscutelor secundare este egal cu nr. tuturor necunoscutelor (deci nr. coloanelor lui A) minus nr. necunoscutelor principale ($= rang(A)$) obținem:

<u>Teorema</u> (Rang-defect) Dacă $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ atunci

$$rang(A) + def(A) = n.$$

<u>Obs.</u> Înlocuind A cu A^T obținem

$$rang(A^T) + def(A^T) = n$$

unde $rang(A^T) = rang(A)$ și $def(A^T) = \dim Null(A^T)$ adică dimensiunea sp. null la stânga al lui A.

<u>Obs.</u> Determinarea unei baze în Null(A) se face astfel: Se rezolvă sistemul (S_0) $Ax=0$; soluția lui depinde de parametrii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ unde $d = def(A)$ (adică de parametrii cu care se înlocuiesc necunoscutele secundare). O bază în Null(A) se determină înlocuind pe rând în soluția de mai sus $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_d = 0$ apoi $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \dots, \alpha_d = 0$, ..., în final $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_d = 1$ (rezultă astfel d vectori). Ce se întâmplă când $d = 0$?

<u>Exemplu</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 9 \\ 13 & 3 & 2 & 14 \end{pmatrix}$

$$A \xrightarrow[L_3 := L_3 - 13L_1]{L_2 := L_2 - 7L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -18 & -12 & -19 \\ 0 & -36 & -24 & -38 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 := -\frac{1}{18}L_2]{L_3 := L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2/3 & 19/18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deci $rang(A) = 2$, $def(A) = 4 - 2 = 2$ și în sist. (S_0) $Ax = 0$ avem: x_1, x_2 nec. principale $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ nec. secundare

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2\alpha + 4\beta = 0 \\ \quad x_2 + \frac{2}{3}\alpha + \frac{19}{18}\beta = 0 \\ \quad x_3 = \alpha \\ \quad x_4 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x_1 = 3\left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{19}{18}\beta\right) - 2\alpha - 4\beta = -\alpha - \frac{5}{6}\beta \\ x_2 = -\frac{2}{3}\alpha - \frac{19}{18}\beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}.$$

Pt. $\alpha = 1, \beta = 0$ găsim sol. $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ și pt. $\alpha = 0, \beta = 1$ sol. $v = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{19}{18} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Deci $\{u, v\}$ este o bază în $Null(A)$.

<u>Teoremă</u>. Considerăm sistemul (S) $Ax = b$ unde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ și $b \in \mathbb{R}^m$. Presupunem că $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ este o soluție particulară a sistemului (S) și că $\{u^1, u^2, \dots, u^d\}$ este o bază pt. $Null(A)$ (aici $d = def(A)$). Atunci soluția generală a sist. (S) este

$$\{x^0 + \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_d u^d \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}\}.$$

<u>Dem</u>. Trebuie numai să coroborăm informațiile de dinainte privitoare la $Null(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ cu legătura dintre sol. sist. omogen (S_0) $Ax = 0$ și sist. neomogen (S) dată în Cursul 5 pag. 2-3.

<u>Exerciții</u> 1. Pentru următoarele matrici să se determine câte o bază și dimensiunea pt. $Col(A)$, $Lin(A)$, $Null(A)$ și $Null(A^T)$. Să se verifice în fiecare caz Teorema rang-defect

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ \alpha & 3 & 5 & -3 \\ 7 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ e) $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2\alpha & 5 \\ 2 & 10 & -12 & 1 \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ g) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Să se afle o bază în subspațiul soluțiilor următoarelor sisteme omogene:

a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 4x+y+4z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+4y+z+8t=0 \\ 6x+8y+2z+5t=0 \\ 9x+12y+3z+10t=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y-2z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+2y+2z-t=0 \\ 4x+3y+2z-2t=0 \\ 8x+5y+6z-4t=0 \\ 3x+3y+4z-2t=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+2y+3z+4t=0 \\ x+y+2z+3t=0 \\ x+3y+z+2t=0 \\ x+3y+3z+2t=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} ax+by+cz+dt=0 \\ bx-ay+dz-ct=0 \\ cx-dy-az+bt=0 \\ dx+cy-bz-at=0 \end{cases}$

$(a,b,c,d \in \mathbb{R}$ fixate$)$.