Curs nr. 6

Spații vectoriale

Algebra vectorilor și a matricilor în general este abstractizată și sistematizată în conceptul de spațiu vectorial. Reamintim că vectorii se pot aduna între ei și pot fi înmulțiți cu scalari; exact așa și matricile – ba mai mult între matrici avem și o înmulțire dar această operație nu este definită întotdeauna (trebuie ca nr. de coloane din primul factor să fie egal cu nr. de linii din al doilea).

În cele ce urmează notăm cu K unul dintre corpurile $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sau $\mathbb{Q}$. Reamintim

<u>Proprietăți</u> ale operațiilor de adunare și înmulțire în K

Pentru că le formula, considerăm $a, b, c \in K$ arbitrare.

a) $(K,+)$ este grup abelian
- asociativitate: $a+(b+c)=(a+b)+c$
- element neutru $\exists\, 0 \in K$ a.î. $a+0=0+a=a$
- element simetric $\exists\, -a \in K$ a.î. $a+(-a)=0=(-a)+a$
- comutativitate $a+b=b+a$

b) $(K,\cdot)$ este un monoid comutativ
- asociativitate $a(bc)=(ab)c$
- element neutru $\exists\, 1 \in K$ a.î. $a \cdot 1 = 1a = a$
- comutativitate $ab=ba$

în care orice element nenul este inversabil adică

$$a \neq 0 \Rightarrow \exists\, a^{-1} \in K \text{ a.î. } a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} a$$

c) Înmulțirea este distributivă față de adunare

$$a(b+c) = ab + ac \qquad (b+c)a = ba + ca$$

<u>Obs</u>. Unele dintre aceste proprietăți sunt redundante.

<u>Def</u>. Un K-sp. vectorial este o mulțime V înzestrată cu o operație $+$ (care atașează la două elem. $u, v \in V$ un al treilea element $u+v \in V$) și o înmulțire cu scalari din K (care atașează unui element $a \in K$ și unui element $u \in V$ un element $au \in V$) cu următoarele proprietăți:

a) $(V,+)$ este grup abelian $\begin{cases} \text{asociativitate} & u+(v+w)=(u+v)+w \\ \text{elem. neutru} & \exists\, 0\in V:\ u+0=0+u=u \\ \text{elem. simetric} & \exists\, -u\in V:\ u+(-u)=0=(-u)+u \\ \text{comutativitate} & u+v=v+u. \end{cases}$

b) Pentru orice $a,b\in K$ și orice $u,v\in V$ sunt adevărate:

(SV1) $a(u+v)=au+av$

(SV2) $(a+b)u=au+bu$

(SV3) $a(bu)=(ab)u$

(SV4) $1\cdot u=u$

În acest caz elementele lui V se numesc vectori, iar elementele lui K se numesc scalari.

__Obs__. În definiția unui K-sp. vectorial V de mai sus apar 4 operații diferite și anume adunarea vectorilor și adunarea scalarilor, respectiv înmulțirea vectorilor cu scalari și înmulțirea scalarilor între ei. Notațional nu se face distincție între primele două și nici între ultimele două. Este util de observat diferența aceasta, dincolo de coincidența notațională în def. de mai sus.

__Exemple__ 1) $\mathbb{R}^2=\left\{ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \;/\; x_1,x_2\in\mathbb{R}\right\}$ este un $\mathbb{R}$-sp. vectorial

Într-adevăr dacă $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ și $a\in\mathbb{R}$ atunci

$x+y=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ și $a\cdot x=\begin{pmatrix}ax_1\\ax_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$. Se verifică proprietățile care definesc un spațiu vectorial. De notat:

$0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ este elem. neutru pt. adunarea în $\mathbb{R}^2$, opusul lui $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ este $-x=\begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\end{pmatrix}$. Se verifică de exemplu

$$x+y=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1+x_1\\y_2+y_2\end{pmatrix}=y+x$$

$$x+(-x)=\begin{pmatrix}x_1-x_1\\x_2-x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$$

$$a(x+y)=\begin{pmatrix}a(x_1+y_1)\\a(x_2+y_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_1+ay_1\\ax_2+ay_2\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$ etc.

2) $\mathbb{R}^3 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ este un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial

unde pt. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ și $a \in \mathbb{R}$ avem $x+y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$, $ax = \begin{pmatrix} a x_1 \\ a x_2 \\ a x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Restul se verifică analog.

3). În general scriem $x = (x_1, x_2 \dots x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ și

$K^n = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$ este un K-sp. vectorial

unde pt. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in K^n$ și $a \in K$ avem

$$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)^T \in K^n, \quad ax = (a x_1, a x_2, \dots, a x_n)^T \in K^n.$$

Ca și mai sus $0 = (0, 0, \dots, 0)^T \in K^n$ este element neutru

și $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)^T$ este opusul lui x, etc.

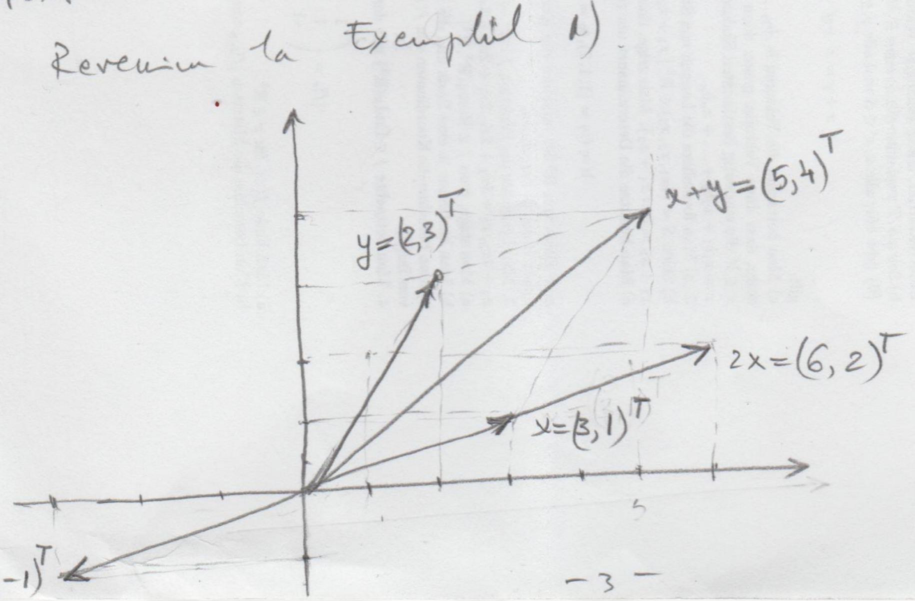
4) Și mai general (pt. $n=1$ regăsim cazul 3) K-sp. vectorial

$M_{m\times n}(K) = \{ X = (x_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \mid x_{ij} \in K \}$ este un K-sp. vectorial

în raport cu adunarea matricilor și înmulțirea matricilor cu scalari (așa cum deja le știm).

<u>Obs</u> 1) În exemplele de mai sus putem urmări cum am notat cu același simbol $+$ atât adunarea scalarilor (nr. reale, complexe raționale) cât și adunarea matricilor, vectorilor (= matrici cu o coloană) la fel $\cdot$ înseamnă atât înmulțirea scalarilor cât și înmulțirea matricilor (vectorilor) cu scalari. Diferența se face ușor din context.

<u>Obs</u> 2) Revenim la Exemplul 1)



Din desen se observă că adunarea vectorilor se face cu regula paralelogramului, iar la înmulțirea vectorilor cu scalari se păstrează direcția, sensul rămâne același dacă scalarul e pozitiv, respectiv se inversează dacă scalarul e negativ iar lungimea se modifică prin înmulțire cu modulul scalarului. Cu alte cuvinte cea ce am definit mai sus modelează calculul vectorial prezent în fizică.

Subspații vectoriale

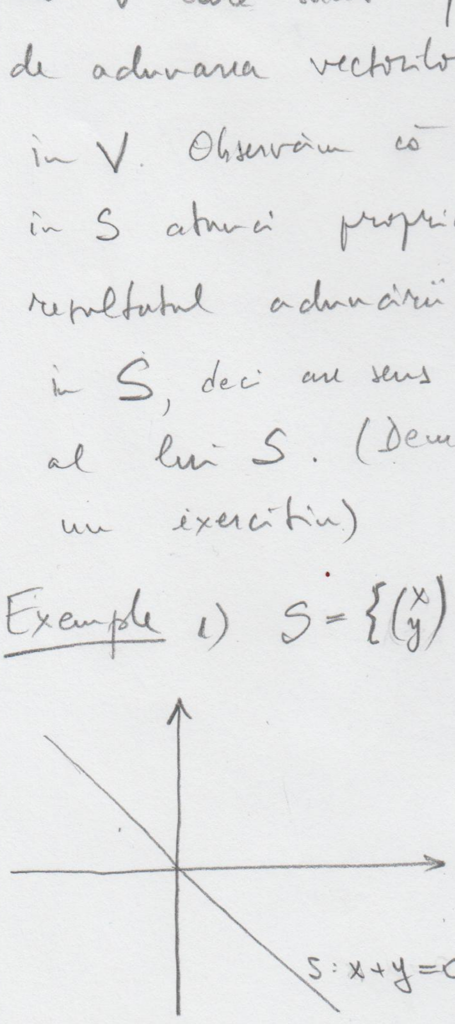
În acest paragraf considerăm un K-sp. vectorial V.

Def. Un subspațiu a lui V este o submulțime $S \subseteq V$ care satisface următoarele proprietăți

1) $0 \in S$
2) $u, v \in S \Longrightarrow u+v \in S$
3) $a \in K,\ u \in S \Longrightarrow au \in S$.

Obs Subspațiile vectoriale ale lui V sunt exact acele submulțimi ale lui V care sunt spații vectoriale în raport cu adunarea indusă de adunarea vectorilor din V și înmulțirea cu scalari preexistentă în V. Observăm că dacă ne restricționăm la a doua operanzi în S atunci proprietățile 2) și 3) de mai sus ne spun că rezultatul adunării, resp. a înmulțirii cu un scalar rămâne în S, deci are sens să vorbim de structura de K-spațiu vect. al lui S. (Demonstrația completă pt. această observație este un exercițiu)

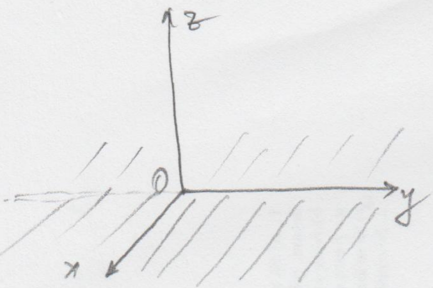
Exemple 1) $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;/\; x+y=0 \right\}$ este un subspațiu a lui $\mathbb{R}^2$



Grafic S este o dreaptă în planul $\mathbb{R}^2$

Într-adevăr. $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$ iar dacă $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S$, $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in S$ și $a \in \mathbb{R}$ atunci $x+y = x'+y' = 0$ deci $x+x'+y+y' = 0$ și $ax+ay=0$ deci $u+v = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \in S$, $au = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \in S$

2. $S = xOy$ este un subspațiu în $\mathbb{R}^3$



$0 = (0,0,0)^T \in xOy$

Dacă $u = (x_1, y_1, z_1)^T \in xOy$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in xOy$; $a \in \mathbb{R}$

atunci $z_1 = z_2 = 0$ deci

$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in xOy$, $au = (ax_1, ay_1, 0) \in xOy$

Subspațiul generat de o mulțime de vectori

Din nou fixăm un K-spațiu vectorial V. O combinație liniară a vectorilor $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ este un vector care se poate exprima astfel: $a_1 u_1 + a_1 u_2 + \dots + a_1 u_n$ cu anumiți scalari $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$.

Teoremă Fie $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ (un set de vectori din V). Mulțimea tuturor combinațiilor liniare de $u_1, u_2, \dots, u_n$ adică

$$\mathrm{span}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \{ a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in K \}$$

este un subspațiu al lui V. Mai mult $\mathrm{span}(u_1, u_2, \dots u_n)$ este cel mai mic subspațiu al lui V care conține toți vectorii $u_1, u_2, \dots u_n$ în sensul că el are această proprietate și dacă W este un alt subspațiu care conține $u_1, u_2, \dots, u_n$ atunci $\mathrm{span}(u_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq W$.

Dem. Avem $0 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n \in \mathrm{span}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ și dacă $v, w \in \mathrm{span}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ și $a \in K$ mai precis

$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$, $w = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n$ cu $a_i \in K$, $b_i \in K$

atunci $v + w = (a_1 + b_1) u_1 + (a_2 + b_2) u_2 + \dots + (a_n + b_n) u_n \in \mathrm{span}(u_1, u_2, \dots, u_n)$

$av = (a a_1) u_1 + (a a_2) u_2 + \dots + (a a_n) u_n \in \mathrm{span}(u_1, u_2, \dots, u_n)$

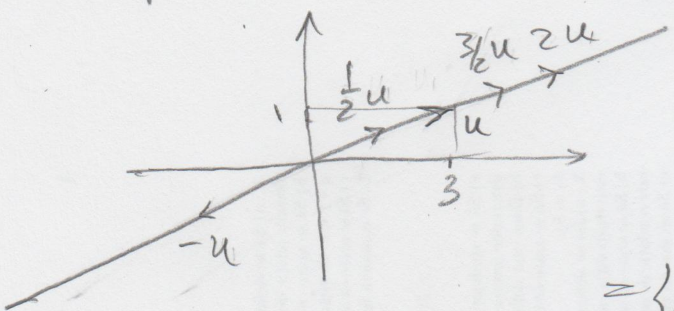
deci $\mathrm{span}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ este un subspațiu.

Este clar că $u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n \in \mathrm{span}(u_1, u_2, \dots, u_n)$,

$u_2 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n \in \mathrm{span}(u_1, u_2, \dots, u_n)$, etc.

Dacă W este un subspațiu a lui V cu proprietatea că $u_1, u_2, \dots, u_n \in W$ atunci din definiția subspațiului aplicată repetat orice combinație liniară $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n \in W$ deci orice elem. din $\mathrm{span}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ este și în W și suntem gata.

Exemplu. $V=\mathbb{R}^2$ este un $\mathbb{R}$-sp. vectorial $u=(3,1)^T\in V$



$S: 3x=y.$

span(u) = dreapta suport a vectorului u. Într-adevăr

$$\mathrm{span}(u)=\{au \mid a\in\mathbb{R}\} = \left\{\begin{pmatrix}3a\\a\end{pmatrix} \,\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x=y\right\}$$

Exerciții 1. Arătați că dacă V este un K-spațiu vectorial și $S\subseteq V$ este o submulțime care verifică proprietățile 1), 2) și 3) din definiția unui subspațiu vectorial, atunci S este un K-spațiu vectorial în raport cu operațiile induse din V.

2. Arătați că într-un K-spațiu vectorial V avem pt. orice $a,b\in K$, $u,v\in V$

a) $a\cdot 0=0=0\cdot u$

b) $a(-u)=(-a)u=-au$

c) $a(u-v)=au-av$ și $(a-b)u=au-bu$

d) $a\cdot u=0 \Longrightarrow a=0$ sau $u=0$

3. Care dintre următoarele submulțimi ale lui $\mathbb{R}^3$ sunt subspații:

$A=\{(x,y,z)^T \mid 2x-y+z=0\}$

$B=\{(x,y,z)^T \mid 2x-y+z=1\}$

$C=\{(x,y,z)^T \mid x=y=z\}$

$D=\{(x,y,z)^T \mid x^2-y=0\}$

$E=\mathbb{R}^3\setminus A$

$F=E\cup\{(0,0,0)^T\}$

$G=\{(x,y,z)^T \mid Ax=(0,0)^T\}$ unde $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ este o matrice arbitrară fixată.

4. Să se arate că vectorul $(9,2,7)^T$ este o combinație liniară a vectorilor $(1,2,-1)^T$ și $(6,4,2)^T$.

5. Să se arate că $S=\{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\}$ și $T=\{(x,y,z)^T\in\mathbb{R} \mid x-y=y-z=z-x\}$ sunt subspații în $\mathbb{R}^3$ și să se scrie aceste subsp. ca subspații generate.

6. Să se găsească ecuațiile care determină subspațiile lui $\mathbb{R}^3$, $S=\mathrm{span}((1,2,-1)^T)$ și $T=\mathrm{span}((1,2,1)^T, (-2,1,-3)^T)$.