Curs 4

Sisteme de ecuații liniare

Un sistem de ecuații liniare constă din mai multe ecuații de forma

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \qquad\qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Acest sistem se scrie in formă matricială

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matricea $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ se numește matricea sistemului

$x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt necunoscutele iar $b_1, b_2, \dots, b_m$ sunt termenii liberi.

Deci sistemul se scrie scurt $A\cdot x = b$ unde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ și $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ sunt vectori (coloană). Aici se vede de ce am ales ca vectorii să îi scriem coloană și nu linie cum am fi fost tentați la început. Uneori este util să considerăm matricea extinsă a sistemului

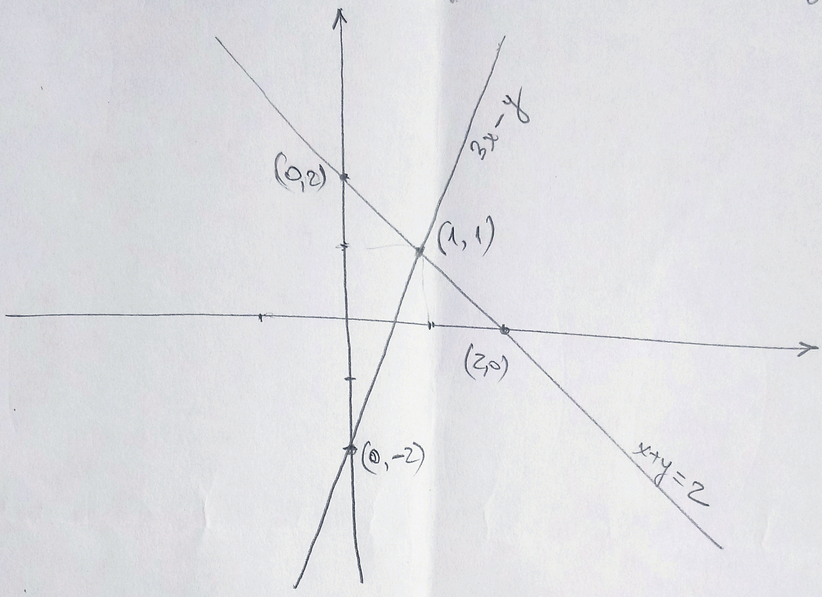
$$\bar{A} = (A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

<u>Obs.</u> In general <u>nu</u> presupunem că $n=m$, deci studiem sisteme cu număr diferit de necunoscute față de operații. Desigur dacă $n=m$ atunci matricea A este pătrată și avem informații suplimentare relativ la acest sistem.

Exemple. (a) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-y-z=0 \\ x-z=2 \end{cases}$

Observații: (1) Sistemul (a) se poate reprezenta grafic astfel:



Am reprezentat soluțiile ecuațiilor care compun sistemul prin drepte iar soluția sistemului este punctul de intersecție al acestor drepte, deci $(x,y)^T=(1,1)^T$, care se poate obține și prin calcul direct (se adună cele două ecuații și se obține $4x=4$ deci $x=1$ etc.)

(2) Sistemul (b) este „echivalent" cu sistemul (a) în sensul că a treia ecuație este obținută din scăderea primelor două și apoi împărțire la 2.

Temă: Reprezentați pe graficul de mai sus dreapta de ecuație $x-y=0$ și constatați că ea trece de asemenea prin punctul $(1,1)$ deci soluția sistemului (b) este aceeași ca și a sistemului (a).

(3). Sistemul (c) are o infinitate de soluții. Într-adevăr dacă notăm $z=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ obținem sistemul

$$\begin{cases} x+y=2+\alpha \\ x-y=\alpha \end{cases} \quad \text{pe care îl rezolvăm} \quad \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1 \\ z=\alpha \end{cases} \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

(4) Sistemul (d) nu are soluții. Într-adevăr dacă procedăm ca și mai înainte cu primele două ecuații obținem $x=1+z$ ceea ce este imposibil dacă privim și a treia ec. $x-z=2$.

<u>Def</u>. Spunem despre sistemul (S) că este
- compatibil dacă are soluții
- incompatibil dacă nu are soluții.

Dacă este compatibil atunci sistemul se zice
- determinat dacă are soluție unică
- nedeterminat în caz contrar.

După cum am văzut în exemplele de mai sus, putem transforma un sistem într-unul echivalent (care are aceeași soluție). Scopul acestor transformări este de a aduce sistemul într-o formă mai simplă în care îl putem rezolva. (A rezolva un sistem înseamnă a răspunde la următoarele întrebări: este compatibil sau nu? Dacă da este determinat sau nu? Dacă nu este determinat de câți parametri depinde soluția? Ultimul pas este determinarea efectivă a soluției). Metoda pe care o avem în vedere este o sistematizare a metodei reducerii așa cum am învățat-o în gimnaziu. Mai precis reducem pe rând câte o necunoscută pentru a rămâne cu o ecuație cu o singură necunoscută pe care știm să o rezolvăm.

Revenim la exemplul (a)

$(S)\begin{cases}3x-y=2\\ x+y=2\end{cases} \Leftrightarrow (S_2)\begin{cases}3x-y=2\\ 4x=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-y=2\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

adunăm ecuațiile pentru a reduce necunoscuta y.

Să observăm că dacă scriem sistemul în forma matriceală este posibil să scriem mai puțin; mai important dacă ne gândim la rezolvarea automată (făcută de un calculator) a sistemului, nu este necesar să ținem minte la fiecare pas x și y ci numai coeficienții lor și poziția pe care se află acești coeficienți. Deci calculul de mai sus arată așa (pornim cu matricea extinsă):

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \overset{L_2:=L_2+L_1}{\sim} \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 0 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3x-y=2\\ x=1\end{cases} \text{ etc.}$$

Dar putem continua $\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 0 & 4\end{pmatrix} \overset{L_2:=\frac{1}{4}L_2}{\sim} \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\sim}$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix} \overset{L_2:=L_2-3L_1}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix} \overset{L_2:=(-1)L_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$$

Aici „$L_2:=L_2+L_1$" sau „$L_2:=L_2-3L_1$" înseamnă că înlocuim linia L_2 cu suma L_2+L_1 respectiv cu L_2-3L_1; „$L_2:=\frac{1}{4}L_2$" înseamnă că înlocuim L_2 cu $\frac{1}{4}L_2$; „$L_1\leftrightarrow L_2$" înseamnă că schimbăm între ele liniile L_1 și L_2 etc. De remarcat că liniile matricilor de mai sus reprezintă ecuații. Este clar că schimbând între ele două ecuații, înmulțind o ecuație cu un scalar nenul, sau adunând la o ecuație o alta înmulțită cu un scalar, obținem sisteme echivalente (care au aceeași soluție) ca și mai sus.

<u>Def</u>. O transformare elementară asupra liniilor unei matrici este una dintre următoarele operații: schimbarea între ele a două linii

înmulțirea unei linii cu un scalar nenul sau adunarea la o linie dată a altei linii înmulțită cu un scalar. Transformările elementare se pot efectua și asupra coloanelor, dar cum noi putem transforma o linie în coloană și invers prin transpunere este suficient să le studiem pe cele ale liniilor.

Considerăm o matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Pentru $1 \le s, t \le m$, $s \ne t$ definim matricile pătrate $m \times m$:

- $$M_s(\alpha) = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{linia } s \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{m\times m}(\mathbb{R}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
  col. s (în matricea I_m înmulțim cu α linia s)

- $$P_{s,t} = \begin{array}{r} \\ \text{linia } s \rightarrow \\ \text{linia } t \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$$; în matricea I_m schimbăm între ele liniile s și t
  col s col t (putem presupune $s<t$)

- $$E_{s,t}(\alpha) = \begin{array}{r} \\ \text{linia } s \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$$ la matricea I_m adăugăm α pe poziția (s,t)
  coloana t

Atunci $M_s(\alpha)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ \alpha a_{s1} & \alpha a_{s2} & \dots & \alpha a_{sn} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ (înmulțește linia s cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$)

$$P_{s,t}A = \begin{array}{l} \\ \text{linia } s \rightarrow \\ \text{linia } t \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{t1} & a_{t2} & \dots & a_{tn} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ schimbă între ele liniile s și t

$$E_{s,t}(\alpha)A = \begin{array}{l} \\ \text{linia } s \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{s1}+\alpha a_{t1} & a_{s2}+\alpha a_{t2} & \dots & a_{sn}+\alpha a_{tn} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ adună la linia s linia t înmulțită cu α.

<u>Propoziție</u>. Fie A o matrice pătrată. Atunci

a) Determinantul matricii obținute prin înmulțirea unei linii din A cu $\alpha \in \mathbb{R}$ este $\alpha \cdot \det(A)$.

b) Determinantul matricii obținute prin interschimbarea a două linii din A este $(-1)\cdot\det(A)$

c) Determinantul matricii obținute prin adunarea la o linie din A a unei alte linii înmulțite cu α este $\det(A)$.

d) Afirmațiile de la a), b) și c) sunt adevărate dacă înlocuim "linie" cu "coloană".

<u>Dem</u>. a), b), c). Fie B matricea obținută din A prin procedeul indicat. Atunci $B = T\cdot A$ unde T este una din matricile $M_s(\alpha)$, $P_{s,t}$ sau $E_{s,t}(\alpha)$. Atunci $\det(B) = \det(TA) = \det(T)\cdot\det(A)$ și concluzia urmează din observația că $\det(M_s(\alpha)) = \alpha$, $\det(P_{s,t}) = -1$, $\det(E_{s,t}(\alpha)) = 1$.

d) Concluzia rezultă din a), b), c) și egalitatea $\det(A) = \det(A^T)$.

<u>Obs</u>. Propoziția de mai sus ne permite să folosim transformările elementare pentru a ușura calculul determinanților. Aceleași transformări elementare le-am folosit și pt. rezolvarea sistemelor. Totuși există o diferență: Pentru calculul determinanților putem face transf. elementare atât asupra liniilor cât și a coloanelor dar în cazul rezolvărilor de sisteme, ele trebuie

să fie aplicate numai asupra liniilor (pentru că liniile reprezintă ecuații).

Metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor liniare

– este o sistematizare a observațiilor de mai sus. Considerăm

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \qquad\qquad\qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{sau } A\cdot x = b$$

cu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$

Ideea este că dacă $a_{11} \neq 0$ atunci putem înmulți convenabil ecuația (1) astfel încât adunând rezultatul pe rând la ecuațiile (2), (3), ..., (m) să eliminăm necunoscuta x_1 din toate aceste ecuații. Dacă $a_{11} = 0$ dar găsim $a_{s1} \neq 0$ cu $1 \leq s \leq m$ atunci mai întâi schimbăm între ele ecuațiile (1) și (s) și apoi eliminăm ca mai sus. Dacă nu există $a_{s1} \neq 0$ deci $a_{i1} = 0$, $1 \leq i \leq m$ atunci necunoscuta x_1 poate fi aleasă arbitrar deci $x_1 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru (necunoscuta x_1 se zice secundară și se înlocuiește cu un parametru) iar sistemul nu este determinat. Odată ce am încheiat cu necunoscuta x_1 sistemul arată așa:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ 0 \;+ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \dots \\ 0 + a'_{m1}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

și ignorând ecuația (1) repetăm procedeul pentru necunoscuta x_2 și așa mai departe.

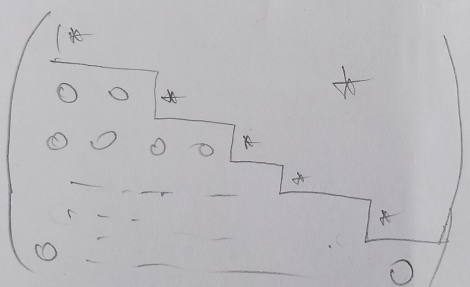
O matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ este în <u>formă eșalon</u> (respectiv <u>formă eșalon redusă</u>) dacă îndeplinește următoarele condiții:

E1). Fiecare linie începe cu un nr. de zerouri (eventual zero zerouri adică niciun zero la început). Primul element nenul al liniei se numește element dominant al acelei linii. În cazul formei eșalon reduse acest element dominant este obligatoriu 1.

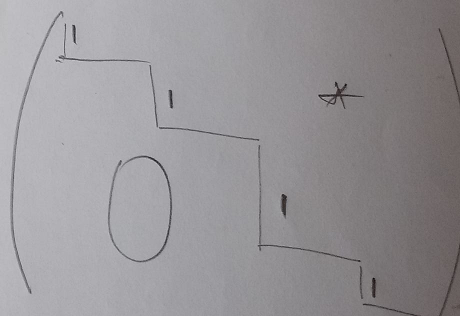
E2). Toate elementele care se află sub un element dominant sunt zero. Liniile sunt aranjate în așa fel încât elem. dominant al unei linii s se află la stânga față de elementele dominante ale liniilor $s+1, s+2, \dots, m$.

E3). Eventualele linii nule sunt ultimele.

Deci o matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ este în formă eșalon (redusă) arată astfel:



resp



După cum am explicat înainte orice matrice poate fi adusă la forma eșalon prin transformări elementare. De la forma eșalon la forma eșalon redusă se trece (tot prin transf. elementare) înmulțind linia s $(1 \le s \le m)$ al cărei element dominant este $a_{st} \neq 0$ $(s \le t)$ cu $a_{st}^{-1} = \frac{1}{a_{st}}$. Algoritmul lui Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare este următorul:

Aducem matricea extinsă $\bar{A} = (A|b)$ a sistemului la forma eşalon redusă. Dacă există un element dominant pe ultima coloană (coloana termenilor liberi) atunci sistemul este incompatibil. Într-adevăr ecuaţia corespunzătoare este

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \dots + 0\cdot x_n = 1 \leftarrow \text{elem. dominant}$$

ceea ce este imposibil.

Dacă nu sistemul este compatibil. Necunoscutele care au un coeficient cu 1-dominant sunt principale. Celelalte sunt secundare şi se înlocuiesc cu parametri (dacă există necunoscute secundare sistemul este nedeterminat, altfel el este determinat). Se determină necunoscutele principale începând cu ultimele ecuaţii.

Exemplu 6. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=2 \\ y-2z=3 \end{cases}$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{L_2:=L_2-L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_3:=L_3+3L_2}{\sim}$$

$$\sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}}_{\text{formă eşalon}} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{formă eşalon redusă}} \ (R)$$

Sistemul echivalent:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-2z=3 \\ z=-2 \end{cases} \quad \text{cu soluţia} \quad \begin{cases} x=1-y-z \\ y=3+2z \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases}$$

Obs. În exemplul de mai sus nu avem necunoscute secundare pt. că toate necunoscutele au un coeficient cu 1-dominant (x în prima ec., y în a doua ec. iar z în a treia ec.) În această situaţie algoritmul lui Gauss se poate extinde la aşa numitul algoritm Gauss-Jordan:

Algoritmul Gauss-Jordan:

Dacă matricea A a sistemului este pătratică și $\det(A) \neq 0$ atunci nu există necunoscute secundare și forma eșalon redusă este triunghiulară cu 0 sub diagonala principală și 1 pe diagonala principală. Repetând algoritmul începând acum cu ultima linie și tot urcând câte o linie vom obține prin transformări elementare matricea

$$(I_n \mid c) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_2 \\ \dots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_n \end{array}\right)$$

Trecând la sistemul corespunzător observăm că soluția este

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$$

Continuăm cu exemplul G de mai sus. Am ajuns la forma eșalon redusă (R) (v. pag. 9):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_2 := L_2 + 2L_3}{\overset{L_1 := L_1 - L_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{L_1 := L_1 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Obținem direct soluția $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$.

LISTA 11

1) Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss, sistemele de ecuaţii:

$$\text{a)}\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1\\ 2x_1-x_2+2x_3=-4\ (\text{în } \mathbb{R}^3);\\ 4x_1+x_2+4x_3=-2\end{cases}\quad \text{b)}\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3\\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7\ (\text{în } \mathbb{R}^4);\\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13\end{cases}$$

$$\text{c)}\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1\\ 2x_1+x_2-2x_3=1\\ x_1+x_2+x_3=3\\ x_1+2x_2-3x_3=1\end{cases}\quad (\text{în } \mathbb{R}^3).$$

2) Folosind metoda lui Gauss, să se discute după parametrii reali $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \lambda$ compatibilitatea sistemelor de mai jos, apoi să se rezolve:

$$a)\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3+\ 4x_4=3\\ 4x_1-2x_2+3x_3+\ 7x_4=1\\ 8x_1-6x_2-\ x_3-\ 5x_4=9\\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\alpha\end{cases},\ b)\begin{cases} 2x_1-\ x_2+3x_3+\ 4x_4=\ 5\\ 4x_1-2x_2+5x_3+\ 6x_4=\ 7\\ 6x_1-3x_2+7x_3+\ 8x_4=\ 9\\ \alpha x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11\end{cases};$$

$$c)\begin{cases} \alpha x_1+\ x_2+\ x_3=1\\ x_1+\alpha x_2+\ x_3=1\\ x_1+\ x_2+\alpha x_3=1\end{cases},\ d)\begin{cases} x_1+\ x_2+\ x_3=1\\ \alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3=\lambda\\ \alpha^2x_1+\beta^2x_2+\gamma^2x_3=\lambda^2\end{cases}.$$

3) Să se rezolve, folosind transformări elementare, umătoarele ecuaţii matriceale:

$$\text{a)}\begin{pmatrix}2&2\\2&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}5&6\\6&8\end{pmatrix};\ \text{b)}\ X\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix};$$

$$\text{c)}\ X\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\end{pmatrix};\ \text{d)}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix};$$

$$\text{e)}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix};\ \text{f)}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix};$$

$$\text{g)}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ \text{h)}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$\text{i)}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\ \text{j)}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix};$$

$$\text{k)}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}X=I_4.$$