Curs 3

Determinantul unei matrici

Determinantul este un scalar (număr real, complex etc. dacă matricea are intrări reale, respectiv complexe etc.). Mai precis,

- dacă $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ atunci $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

- dacă $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ atunci $\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

(se observă că sunt toate produsele de trei factori cu prop. că de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană se ia câte un singur factor; unii factori sunt cu semnul + alții cu –)

- dacă $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ atunci se dezvoltă determinantul după o linie sau coloană și se calculează n determinanți de dimensiune $(n-1)\times(n-1)$. De exemplu

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

(se observă că a_{ij} se înmulțește cu determinantul matricii care se obține din A eliminând linia i și coloana j)

Aceasta este dezvoltarea după prima linie. La fel se poate obtine dezvoltarea după orice linie sau orice coloană. Semnul + sau − de dinaintea respectivului termen se obtine din $(-1)^{i+j}$. Deci dezvoltarea după linia i a determinantului unei matrici $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ este:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$ unde A_{ij} se obtine din A prin eliminarea liniei i si coloanei j.

<u>Proprietăți ale determinantilor</u>: $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

1. $\det(I_n) = 1$
2. $\det(A) = \det(A^T)$
3. $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$
4. Dacă A este inversabilă atunci $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

<u>Calculul matricii inverse</u>

<u>Teoremă</u> O matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det(A) \neq 0$. In acest caz avem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot A^*$$

unde $A^* = (\delta_{ji})_{1\le i,j\le n}$ unde $\delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ se numeste complementul algebric al elementului a_{ij} din matricea A.

<u>Exemplu</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{32} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33} \end{pmatrix} \quad \text{unde}$$

$$\delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \; ; \; \delta_{2,1} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \text{ etc.}$$

Deci $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ și $A^{-1} = \frac{1}{-7} A^*$ deci

și $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 & -4/7 & -5/7 \\ 2/7 & -5/7 & -1/7 \\ -1/7 & 6/7 & 4/7 \end{pmatrix}$

Partiționări de matrici

O matrice poate fi partiționată în submatrici. De exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = (D, E) \text{ unde } B = (1, 2), \; C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \; D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Este important că această partiționare este compatibilă cu operațiile pe matrici. De exemplu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

unde $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $A_2 = (a_{31}, a_{32}) \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$

și analog $B_1 \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $B_2 \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ atunci

$$A + B = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 \\ A_2 + B_2 \end{pmatrix}$$

Tot așa dacă

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$ deci

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}; \quad A_{21} = (a_{31} \ a_{32}); \quad A_{22} = (a_{33})$$

și $$B = \left(\begin{array}{cc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

atunci

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} & A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} \\ A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21} & A_{21} B_{12} + A_{22} B_{22} \end{pmatrix}$$

Matrici ortonormale

Def. O matrice $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se numește ortonormală dacă

$$Q \cdot Q^T = I_n$$

Obs. $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ este ortonormală $\Leftrightarrow$ Q este inversabilă și $Q^{-1} = Q^T$.

Prop. Înmulțirea cu o matrice ortonormală păstrează lungimea unui vector. Mai precis dacă

$u = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix}$ este un vector și $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ este ortonormală atunci $\|Qu\| = \|u\|$.

Într-adevăr

$$\|Qu\|^2 = (Qu)^T \cdot (Qu) = u^T \cdot Q^T \cdot Q \cdot u = u^T I_n \cdot u = u^T u = \|u\|^2$$

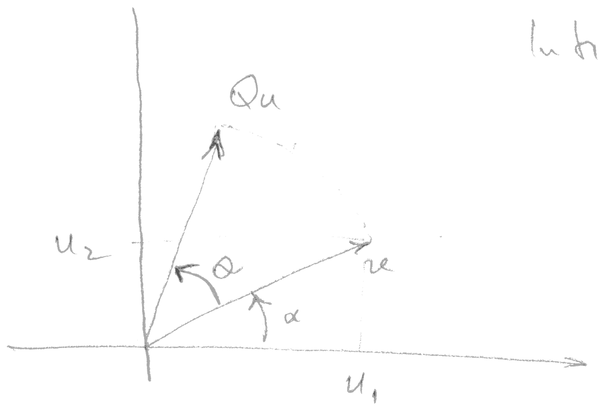
deci $\|Qu\| = \|u\|$.

Exemplu. Matricea $Q=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ este ortonormală.

Într-adevăr $Q^T\cdot Q=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

pt. că $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

Înmulțirea unui vector $u=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$ cu matricea Q din acest exemplu înseamnă rotația lui u cu unghiul θ.



Într-adevăr

$$Qu=\begin{pmatrix}u_1\cos\theta-u_2\sin\theta\\ u_1\sin\theta+u_2\cos\theta\end{pmatrix}$$

Dacă scriem u în coordonate polare deci

$$\begin{cases}u_1=r\cos\alpha\\ u_2=r\sin\alpha\end{cases}$$

unde $r=\|u\|$ și $\alpha=\arg(u)=$ unghiul făcut de u cu Ox

atunci
$$u_1\cos\theta-u_2\sin\theta=r(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)=r\cos(\alpha+\theta)$$
$$u_1\sin\theta+u_2\cos\theta=r(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)=r\sin(\alpha+\theta)$$

Exerciții

1. Se dau matricile

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 5 & -2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 8\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 1 & 2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$$

a) Specificați dimensiunile matricilor și perechile de matrici care se pot aduna, respectiv înmulți una cu alta.

b) Calculați $C+E$, $A-B$, $4F$, $2A-3B$

c) Calculați CB, EA, FC

d) Verificați că $(EB)^T = B^T \cdot E^T$.

2. Scrieți sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ în formă matricială și calculați inversa matricii acestui sistem. Putem folosi inversa pentru a rezolva sistemul?

3. Calculați inversele matricilor (dacă există):

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Să se rezolve în $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ecuația

$$X^2=\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

a) Să se determine A^n, cu $n \geq 0$.

b) Să se arate că A este inversabilă și să se det. A^n, $n \in \mathbb{Z}$.

6) Fie $Q=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Să se det. Q^n, pt. orice $n \in \mathbb{Z}$.

7. Să se calculeze determinanții:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

8. Demonstrați că

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i-a_j)$$

(determinantul lui Vandermonde)