Curs 11

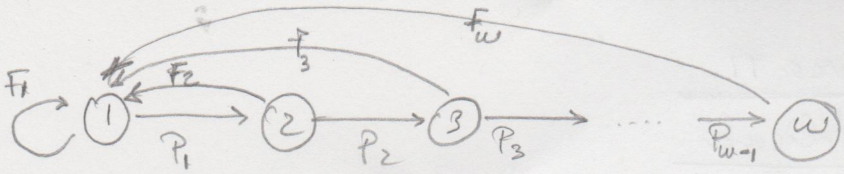
Aplicații

1. Populații structurate în funcție de vârstă (age-structured).

Unul dintre cele mai cunoscute exemple ecologice care utilizează modele matriciale se referă la dinamica (în timp discret) a populațiilor structurate în funcție de vârstă. Modelul se aplică la organisme cu reproducere sezonieră (pt. simplificare vom pune că ele se reproduc o dată pe an, sau pe altă unitate de timp convenabilă) a căror rată de supraviețuire și fertilitate depinde de vârstă. Vom împărți populația în clase în funcție de vârstă; cel mai convenabil este să numărăm indivizii înainte de reproducere: cei mai tineri au vârsta de 1 an (aparțin clasei 1) și sunt în număr de N_1, următorii în clasa 2 sunt N_2 ș.a.m.d., cei mai în vârstă sunt în clasa ω în număr de N_ω (alegem ω suficient de mare a.î. cei care eventual depășesc această vârstă să fie destul de puțini iar numărul lor să fie neglijabil). Populația este atunci dată de vectorul

$$N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_\omega \end{pmatrix}$$

Vom nota cu P_i probabilitatea ca un individ din clasa i să supraviețuiască pt. un an (deci la următoarea numărătoare el se va adăuga clasei $i+1$) și fie F_i numărul mediu de urmași ai unui individ de vârsta i, care vor supraviețui până la următoarea numărătoare (1 an). [Practic se numără numai ~~...~~ femele]. Se construiește așa numitul graf al ciclului de viață:



Se construieşte următoarea matrice (numită matricea Leslie)

$$L = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_{w-1} & F_w \\ P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & P_{w-1} & 0 \end{pmatrix}$$

- pe linia i se numără contribuţia indivizilor din clasele $1, 2 \dots w-1, w$ pentru clasa i.

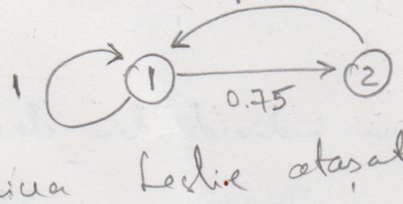
Este clar atunci că numărul (estimat) al populaţiei pt. anul viitor este

$$LN = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_{w-1} & F_w \\ P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & P_w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 N_1 + F_2 N_2 + \dots + F_w N_w \\ P_1 N_1 \\ P_2 N_2 \\ \vdots \\ P_w N_w \end{pmatrix}$$

Dinamica pe termen lung este dată de

$$L^k \cdot N, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

<u>Exemplu</u>: Se consideră o populaţie structurată în funcţie de vârstă cu speranţa de viaţă 2 ani şi cu următorul graf al ciclului de viaţă:



Matricea Leslie ataşată este

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} \qquad 0.75 = \frac{3}{4}$$

Calculăm valorile şi vectorii proprii:

$$p_L(t) = \det(L - tI_2) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 3/4 & 0-t \end{vmatrix} = t^2 - t - \frac{3}{4}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot\frac{3}{4}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{1 \pm 2}{2}$$

Deci $\lambda_1 = -\frac{1}{2} = -0.5$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$

Determinăm vectorii proprii asociați valorii proprii $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & +\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

deci $\begin{cases} \frac{3}{2}x + y = 0 \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}\alpha \\ y = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

$\dim V(\lambda_1) = \dim Null(L - \lambda_1 I_2) = \dim Null(L + \frac{1}{2} I_2) = 2 - 1 = 1$

și un vector propriu care ne dă o bază în $V(\lambda_1)$ se obține luând de ex. $\alpha = 3$. deci $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Determinăm vectorii proprii asociați valorii proprii $\lambda_2 = \frac{3}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 0 \\ \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Deci $\dim V(\lambda_2) = \dim Null(L - \lambda_2 I_2) = 2 - 1 = 1$ și baza este dată de un vector (pt $\alpha = 1$): $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Interpretarea rezultatelor: $\lambda_1 = -\frac{1}{2} = -0.5$ nu poate fi un factor anual de creștere a populației pt. că nu putem avea un nr. negativ de indivizi.

$\lambda_2 = \frac{3}{2} = 1.5$ poate fi un factor anual de creștere. În acest caz o structură de echilibru se obține când populația de un an este de două ori cât cea de doi ani (de fapt $N_1 = x$, $N_2 = y$ și am văzut că în vectorul propriu $x = 2\alpha$, $y = \alpha$)

cat în care populația crește de $\lambda_2 = 1.5$ ori în fiecare an.
(Într-adevăr $L \cdot N = 1.5N$ dacă $N = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$).

Altă problemă care se poate pune este: Dar dacă plecăm cu o populație oarecare $N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$ cât va fi populația după 10 ani? Dar după 25 de ani.

<u>Răspuns</u>: $L^{10}N$ respectiv $L^{25}N$.

Cum calculăm L^k? Diagonalizăm:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$D = S^{-1} L S$ unde $S = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (pe coloane am pus vectorii proprii. Atunci $L = SDS^{-1}$ și avem

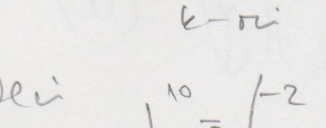
$$L^k = \underbrace{SDS^{-1}SDS^{-1}\dots SDS^{-1}}_{k\text{-ori}} = S \cdot D^k \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

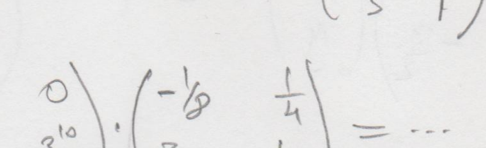
Deci $L^{10} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{10}} & 0 \\ 0 & \frac{3^{10}}{2^{10}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \dots$

În general $L^k = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1/2)^k & 0 \\ 0 & (3/2)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/8 & 1/4 \\ 3/8 & 1/4 \end{pmatrix} = \dots$

Pentru mai multe aplicații a se consulta:
mv.helsinki.fi/home/kisdi/mathmet/part3/Part3_lecturenotes.pdf

<u>Exerciții</u>. Determinați structura de echilibru și factorul de creștere (de echilibru) pt. o populație cu graful ciclului de viață

a)


b)


Determinați în fiecare caz nr. de indivizi după 10 ani în cazul echilibrului și în cazul în care populația inițială este

$$N = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}.$$