Curs nr. 10

Diagonalizare

Propoziție Fie $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ o matrice pătrată. Vectorii proprii nenuli ai lui A corespunzători unor valori proprii distincte sunt liniar independenți.

Dem. Vom face mai întâi demonstrația în cazul particular în care avem doi vectori proprii (cazul general în care considerăm k-vectori proprii îl tratăm ulterior)

Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ două valori proprii pt. A și $0 \neq v_1 \in V(\lambda_1)$, $0 \neq v_2 \in V(\lambda_2)$ deci $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Trebuie să arătăm că v_1 și v_2 sunt liniar independenți, adică trebuie să plecăm cu egalitate de forma (1) $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ și ne dorim să arătăm că $a_1 = a_2 = 0$.

Înmulțim egalitatea (1) cu A (la stânga):

$$A(a_1v_1 + a_2v_2) = 0$$

$$a_1(Av_1) + a_2(Av_2) = 0$$

$$a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_2 v_2 = 0$$

Înmulțim egalitatea (1) cu $-\lambda_1$ și obținem:

$$-a_1\lambda_1 v_1 - a_2\lambda_1 v_2 = 0$$

Adunăm ultimele două egalități:

$$a_2\lambda_2 v_2 - a_2\lambda_1 v_2 = 0$$

$$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0$$

Dar $v_2 \neq 0$, $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ (pt. că $\lambda_1 \neq \lambda_2$) deci $a_2 = 0$.

Pentru cazul general procedăm prin inducție: Fie $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ valori proprii distincte două câte două și $0 \neq v_i \in V(\lambda_i)$ $1 \leq i \leq k$. Trebuie să arătăm că dacă $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k$ atunci

$$(2) \quad a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k = 0$$

implică $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$.

Dacă $k=1$ atunci $a_1v_1 = 0$, $v_1 \neq 0 \Rightarrow a_1 = 0$.

Dacă $k=2$ atunci avem demonstrația mai sus.

Presupunem că afirmația este adevărată pt. $k-1$ vectori și fie k vectori ca și înainte.
Înmulțim egalitatea (2) mai întâi cu A și apoi cu $-\lambda_1$ și adunăm rezultatele:

$$A(a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_kv_k)=0$$
$$a_1(Av_1)+a_2(Av_2)+\dots+a_k(Av_k)=0$$
$$\begin{cases} a_1\lambda_1v_1+a_2\lambda_2v_2+\dots+a_k\lambda_kv_k=0 \\ -a_1\lambda_1v_1-a_2\lambda_1v_2-\dots-a_k\lambda_1v_k=0 \end{cases} +$$
$$a_2(\lambda_2-\lambda_1)v_2+\dots+a_k(\lambda_k-\lambda_1)v_k=0$$

Dar $\lambda_i-\lambda_1\neq 0$, $2\le i\le k$ deci $0\neq(\lambda_i-\lambda_1)v_i\in V(\lambda_i)$ și ipoteza de inducție ne asigură că $a_2=\dots=a_k=0$. Înlocuind în (2) găsim și $a_1=0$ $\boxtimes$.

Considerăm o matrice $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ cu valori proprii distincte $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}$. Considerăm vectori proprii $0\neq v_i\in V(\lambda_i)$ $1\le i\le n$ și formăm matricea $S=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots, & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Deoarece $v_1,v_2,\dots,v_n$ sunt liniar independenți, știm că $\operatorname{rang}(S)=n$ deci S este inversabilă. Pentru ușurința scrierii în continuare vom lucra cu $n=3$ (în cazul general argumentul este identic).

$$AS=A(v_1\ v_2\ v_3)=(Av_1\ Av_2\ Av_3)=(\lambda_1v_1\ \lambda_2v_2\ \lambda_3v_3)$$
$$=(v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}=S\cdot D$$

unde $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ este o matrice diagonală.

Din $AS=S\cdot D$ găsim $A=S\cdot D\cdot S^{-1}$ (sau $D=S^{-1}A\cdot S$)

<u>Definiție</u>. Două matrici $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ se zic similare dacă există $S\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ inversabilă astfel încât $B=S^{-1}AS$ (Scriem $A\sim B$). O matrice A se zice diagonalizabilă dacă A este similară cu o matrice diagonală. Diagonalizarea lui A înseamnă procesul în care determinăm matricea diagonală D și matricea inversabilă S pentru care $A=S^{-1}DS$.

Proprietăți (ale relației de similaritate)

a) Reflexivitate: Orice matrice este similară cu ea însăși

b) Simetrie: Dacă A este similară cu B atunci și B este similară cu A.

c) Tranzitivitate: Dacă A este similară cu B și B cu C atunci și A este similară cu C.

(Obs: O relație care verifică proprietățile de reflexivitate, tranzitivitate și simetrie se numește relație de echivalență).

Dem Fie A, B, C matrici (de dim. $n\times n$ peste $\mathbb{C}$).

a) $A \sim A$ pt că $A = I_n^{-1} \cdot A \cdot I_n$

b) Dacă $A \sim B$ atunci $\exists S$ inversabilă a.î. $B = S^{-1}AS$.

Dar S^{-1} este inversabilă la rândul ei și $(S^{-1})^{-1} = S$ iar $A = SBS^{-1}$ deci $B \sim A$.

c) Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$ atunci există S și T inversabile astfel încât $B = S^{-1}AS$ și $C = T^{-1}BT$. Avem

$$C = T^{-1}BT = T^{-1}S^{-1}AST = (ST)^{-1}A(ST) \text{ deci } A \sim C.$$

Revenim la diagonalitate

Să observăm că în ceea ce am spus mai sus am presupus că $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ are n-valori proprii distincte. Acest lucru nu este însă neapărat necesar. Chiar dacă demonstrația este mai tehnică (și nu o vom face) pentru a putea diagonaliza matricea A este suficient să găsim n vectori proprii (care nu corespund neapărat unor valori proprii distincte) care formează coloanele unei matrici inversabile S. Este clar atunci că $S^{-1}AS$ este o matrice diagonală care are pe diagonala principală valorile proprii ale lui A (cele multiple apar de câte ori este ordinul lor de multiplicitate)

În concluzie algoritmul de diagonalizare al unei matrici A este următorul:

1. Se calculează polinomul caracteristic $p_A(t) = \det(A - tI_n)$

2. Se determină valorile proprii ale lui A adică se determină

rădăcinile polinomului caracteristic $p_A(t)$. Pentru că lucrăm peste $\mathbb{C}$, teoretic (nu practic!) este întotdeauna posibil să scriem

$$p_A(t) = (\lambda_1 - t)^{m_1} (\lambda_2 - t)^{m_2} \cdots (\lambda_k - t)^{m_k}$$

unde $m_1, m_2, \ldots, m_k \geq 1$ sunt ordinele de multiplicitate ale resp. rădăcini și avem $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ $(= \text{grad}\, p_A(t))$

3. Pentru fiecare valoare proprie λ_i $1 \leq i \leq k$ se calculează

$$d_i = \dim V(\lambda_i) = \dim \text{Null}(A - \lambda_i I_n)$$

4. Dacă $d_i = m_i$ pt. orice $1 \leq i \leq k$ atunci A este diagonalizabilă și se continuă cu pasul 5. Dacă nu STOP: "A nu este diagonaliz."

5. Pentru orice $1 \leq i \leq k$ se calculează câte o bază în $\text{Null}(A - \lambda_i I_n)$. Pentru că $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = n$ reuniunea acestor baze va conduce la n vectori proprii liniar independenți în $\mathbb{C}^n$ (deci o bază în $\mathbb{C}^n$). Acești vectori proprii sunt coloanele matricii S.

6. Se constată că

$$D = S^{-1} A S = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 = d_1 \text{ ori}}, \underbrace{\lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{m_2 = d_2 \text{ ori}}, \ldots, \underbrace{\lambda_k, \lambda_k, \ldots \lambda_k}_{m_k = d_k \text{ ori}})$$

(deci D ~~este~~ o matrice diagonală, având pe diagonala principală valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ fiecare dintre ele apărând de atâtea ori cât ordinul ei de multiplicitate).

Obs Din cele de mai sus se constată că dacă A are valori proprii distincte atunci A este obligatoriu diagonalizabilă (peste $\mathbb{C}$) deci se poate sări peste pașii 3–4 ($d_i = m_i = 1$, $1 \leq i \leq n$). Invers însă A poate fi diagonalizabilă chiar dacă nu are valori proprii distincte.

Exemple (1). $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = \det(A - tI_2) = \begin{vmatrix} 1-t & -2 \\ 3 & -4-t \end{vmatrix} = -(1-t)(4+t) + 6 = t^2 + 4t - t - 4 + 5 = t^2 + 3t + 2$$

$$= (t+1)(t+2)$$

Valorile proprii sunt $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ (fiecare cu gradul de multiplicitate 1). Ele sunt distincte deci A este diagonalizabilă.

$$\text{Null}(A - \lambda_1 I_2) = \text{Null}(A + I_2) = \text{Null}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Se rezolvă sist $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$ și pt. $\alpha = 1$

se găsește soluția $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Null}(A - \lambda_2 I_2) = \mathrm{Null}(A + 2I_2) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Se rezolvă sist $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}\alpha \\ y = \alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R})$ și pt. $\alpha = 3$

se găsește soluția $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Se construiește $S = (v_1\ v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Se verifică atunci că

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = D. \quad \text{(temă)}.$$

(fără a calcula S^{-1} se poate verifica că $\det(S) \neq 0$ și că $AS = SD$)

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$p_A(t) = \det(A - tI_2) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)^2$ cu răd. $\lambda = 2$ având

ordinul de multiplicitate $m = 2$.

(nu sunt rădăcini distincte deci este nevoie de pașii 3-4).

$d = \dim \mathrm{Null}(A - \lambda I_2) = \dim \mathrm{Null}(A - 2I_2) = \dim \mathrm{Null} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$= 2 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$

Atunci $d = 1 \neq 2 = m$ deci A nu este diagonalizabilă.

(3) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 12 & -10 & 24 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = \det(A - tI_3) = \begin{vmatrix} 5-t & -3 & 6 \\ 12 & -10-t & 24 \\ 3 & -3 & 8-t \end{vmatrix} \overset{L_3 := L_3 - L_1}{=\!=} \begin{vmatrix} 5-t & -3 & 6 \\ 12 & -10-t & 24 \\ t-2 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)\begin{vmatrix} 5-t & -3 & 6 \\ 12 & -10-t & 24 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1 := C_1 + C_3}{=\!=} (2-t)\begin{vmatrix} 11-t & -3 & 6 \\ 36 & -10-t & 24 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-t)\begin{vmatrix} 11-t & -3 \\ 36 & (-10-t) \end{vmatrix} = (2-t)\left[(t-11)(10+t) + 108\right] =$$

$$= (2-t)(+t^2 - t - 110 + 108) = (2-t)(t^2 - t - 2) = -(2-t)(t-2)(t+1) = (2-t)^2(1+t)$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = 2$ având multiplicitatea $m_1 = 2$ și $\lambda_2 = -1$ având multiplicitatea $m_2 = 1$

Pt. $\lambda_1 = 2$ calculăm $(A - \lambda_1 I_3) = (A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 12 & -12 & 24 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ și

$d_1 = \dim \mathrm{Null}(A - 2I_3) = 3 - \mathrm{rang}(A - 2I_3) = 3 - 1 = 2$ deci $d_1 = m_1 \ (=2)$.

Pt. $\lambda_2 = -1$ calculăm $(A - \lambda_2 I_3) = (A + I_3) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 12 & -9 & 24 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ și

$d_2 = \dim \mathrm{Null}(A + I_3) = 3 - \mathrm{rang}(A + I_3) = 3 - 2 = 1$ deci $d_2 = m_2 \ (=1)$.

Așadar A este diagonalizabilă.

Rezolvăm sist. $(A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 12 & -12 & 24 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$$(A - 2I_3) \to \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 2\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Pt. $\alpha = 1, \beta = 0$ găsim $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pt. $\alpha = 0, \beta = 1$ găsim $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Rezolvăm sist. $(A + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 12 & -9 & 24 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 := \frac{1}{3}L_3 \\ L_1 := \frac{1}{3}L_1}]{L_2 := \frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 := L_3 - 2L_1]{L_2 := L_2 - 4L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 3z = 9\alpha \\ y = 4\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$$

Deci pt. $\alpha = 1$ găsim $v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avem $S = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și verificăm

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Exerciții</u> 1. Diagonalizați matricile de la ex. 5 (curs și seminar 9)

2. Diagonalizați următoarele matrici

a) $\begin{pmatrix} -10 & -6 & -36 \\ -2 & -5 & -12 \\ 4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 11 & -12 & 18 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & -10 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Să se calculeze A^n unde A este pe rând una dintre matricile de la ex. 2 de mai sus.

<u>Indicație</u>: Scriem $A = SDS^{-1}$ unde D este o matrice diagonală și apoi calculăm

$$A^n = \underbrace{(SDS^{-1})(SDS^{-1})\dots(SDS^{-1})}_{n-\text{ori}} = S\cdot D(S^{-1}S)D(S^{-1}S)\dots(S^{-1}S)DS^{-1} = SD^nS^{-1}$$

<u>Obs</u> Aici avem o aplicație directă a diagonalizării în sensul că se pot calcula mai ușor puterile lui A.