UNIVERSITATEA "BABEŞ-BOLYAI"
Facultatea de Matematică şi Informatică
Cluj-Napoca, Romania

Echivalenţe de categorii de module şi aplicaţii

Teză de doctorat

George Ciprian Modoi

Conducător ştiinţific:
Prof. Dr. Ioan Purdea

2003

Dacă gândirea, solicitată de un lucru, îl urmăreşte pe acesta, atunci i se poate întâmpla să se transforme pe drum. De aceea este recomandabil, [...], să fim atenţi la drum şi mai puţin la conţinut.

(Martin Heidegger, *Principiul identităţii*)

Cuprins

Introducere

Chiar dacă studiul echivalenţelor de categorii este interesant prin sine însuşi, întrucât echivalenţele joacă în acest context rolul izomorfismelor dintre alte structuri, motivaţia principală acestui studiu vine din împrejurarea că multe “coincidenţe” care apar în diferite domenii ale matematicii pot fi explicate, la un nivel general, ca şi consecinţe ale unor echivalenţe categoriale convenabile. De exemplu, în cazul categoriilor aditive, cu anumite ipoteze adiţionale, o echivalenţă de categorii poate fi utilă pentru a cerceta legăturile dintre un obiect dat şi inelul endomorfismelor sale. Pentru cazul categoriilor Grothendieck, situaţia originară este deja clasica teorie Morita, în care echivalenţele dintre două categorii de module peste inelele R şi S sunt caracterizate ca fiind functorii $\mathrm{Hom}_R(U,-)$ şi $-\otimes_S U$, unde U este un progenerator al categoriei $\mathrm{Mod}\text{-}R$, iar $S \cong \mathrm{End}_R(U)$ (v. de exemplu [75, Theorem 46.4]). Este aşadar evident că există o legătură strânsă între studiul echivalenţelor dintre două categorii de module şi cel al corespondenţelor dintre un R-modul anumit, aici progeneratorul U, şi inelului lui de endomorfisme, după cum s-a spus mai înainte.

Diferite generalizări ale teoriei Morita au fost studiate de mai mulţi autori. Pentru a prezenta pe scurt acele abordari ale acestui subiect care au influenţat în mod deosebit teza de faţă, vom face mai întâi câteva notaţii. Fie R un inel cu unitate, U un R-modul drept şi $S = \mathrm{End}_R(U)$. Este clar că U are o structură naturală de S-modul stâng. Considerăm perechea de functori adjuncţi:

$$\mathrm{Hom}_R(U,-) : \mathrm{Mod}\text{-}R \to \mathrm{Mod}\text{-}S \text{ şi } -\otimes_S U : \mathrm{Mod}\text{-}S \to \mathrm{Mod}\text{-}R,$$

unde $\mathrm{Mod}\text{-}R$ şi $\mathrm{Mod}\text{-}S$ sunt categoriile de module drepte corespunzătoare. Plecând de la această pereche de functori adjuncţi definim clasele $\mathrm{Stat}[U]$ şi $\mathrm{Adst}[U]$ prin aceea că ele conţin toate R-modulele, respectiv S-modulele, pentru care counitatea, respectiv unitatea, de adjuncţie este un izomorfism. Module aparţinând acestor clase sunt numite U-statice, respectiv U-adstatice. Se poate observa imediat că perechea de adjuncţi de mai sus induce o echivalenţă între subcategoriile pline ale categoriilor Mod-R şi Mod-S constituite din modulele U-statice, respectiv U-adstatice, iar aceste subcategorii sunt maximale relativ la această proprietate. Desigur în cazul în care U este un progenerator, deci inelele R şi S sunt Morita echivalente, atunci $\mathrm{Stat}[U] = \text{Mod-}R$ şi $\mathrm{Adst}[U] = \text{Mod-}S$.

În lucrarea [25], K. Fuller propune o generalizare a teoriei Morita, studiind condiţii în care $\mathrm{Adst}[U] = \text{Mod-}S$, iar $\mathrm{Stat}[U] = \boldsymbol{\sigma}[U]$ este subcategoria plină a categoriei Mod-R ale cărei obiecte sunt R-modulele subgenerate de U, adică sunt submodule în imagini ale unei sume directe de copii de U ([25, Theorem 2.6]). De menţionat că subcategoria $\boldsymbol{\sigma}[U]$ este Grothendieck ca şi Mod-R. În aceeaşi lucrare se cercetează şi legăturile dintre inelul R şi inelul biendomorfismelor R-modulului U.

U. Albrecht studiază în [2] închiderea claselor $\mathrm{Stat}[U]$ şi $\mathrm{Adst}[U]$ relativ la obişnuitele construcţii categoriale: nuclee, conuclee, imagini etc, în cazul grupurilor abeliene, adică pentru $R = \mathbb{Z}$. Acest studiu este continuat şi extins, în cazul R-modulelor oarecare de către R. Wisbauer în lucrările [76] şi [77]. În plus, sunt prezentate aici şi unele condiţii necesare şi suficiente în care categoriile $\mathrm{Stat}[U]$ sau $\mathrm{Adst}[U]$ coincid cu anumite subcategorii pline ale categoriilor Mod-R, respectiv Mod-S, care pot fi descrise mai uşor. O generalizare a rezultatelor lui Albrecht poate fi întâlnită şi în lucrarea [11], scrisă de S. Breaz împreună cu autorul acestei teze.

Un $*$-modul este un R-modul U, pentru care $\mathrm{Stat}[U]$ este clasa R-modulelor generate de U - adică acele module care sunt imagini ale unei sume directe de copii de U - iar $\mathrm{Adst}[U]$ este clasa S-modulelor cogenerate de $\mathrm{Hom}_R(U, C)$ unde C este un cogenerator injectiv arbitrar al categoriei Mod-R. Aceste module sunt studiate de R. Colpi şi C. Menini în [18]. Dualizarea acestui studiu este realizată de R. Colby şi K. Fuller în [16]. În [48], C. Menini şi A. Orsatti dau condiţii suficiente pe care trebuie să le îndeplinească două subcategorii pline ale categoriilor Mod-R şi Mod-S pentru ca o echivalenţă dintre ele să fie reprezentabilă de un $*$-modul U, adică să fie de forma $\mathrm{Hom}_R(U, -)$ cu inversa $- \otimes_S U$.

Există o serie de lucrări care aplică tehnici care ţin de echivalenţele categoriale pentru a studia module (în special grupuri abeliene) care au anumite proprietăţi privite ca module peste inelul lor de endomorfisme. Ca exemplu amintim [59] de G.P. Niedzwecki şi J.D. Reid sau altă lucrare a lui J.D. Reid, [68]. Menţionăm de asemenea studiul grupurilor de torsiune privite ca module peste inelul de enomorfisme efectuat de F. Richman şi E. Walker în [69]. Un rol deosebit în ceea ce priveşte echivalenţele de categorii, îl joacă modulele auto–mici, studiate în lucrarea [7], aparţinând autorilor D. Arnold şi C. Murley.

Plecând cu ipoteza că U este un R-modul Σ-quasiproiectiv, adică proiectiv în categoria $\boldsymbol{\sigma}[U]$ a modulelor subgenerate de U şi folosind Teorema Popescu–Gabriel (Teorema 1.2.7), J.L. García Hernández şi J.L. Gómez Pardo au demonstrat în [28, Theorem 1.3] şi [29, Theorem 1.3] că functorii $\mathrm{Hom}_R(U,-)$ şi $-\otimes_S U$ induc o echivalenţă între subcategoria plină a R-modulelor M-prezentate şi o anumită categorie cât a categoriei Mod- S, care poate fi identificată cu o subcategorie a categoriei Mod- S şi coincide cu Mod- S exact atunci când U este finit generat. Aceeaşi categorie cât este echivalentă cu încă două subcategorii pline ale categoriei Mod- R. Aceste rezultate au fost generalizate în [31] de către J.L. García şi M. Saorín. Dacă $\mathcal{A}$ este o categorie Grothendieck local finit generată, $U \in \mathcal{A}$ şi $S = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$, atunci U induce o clasă de torsiune ereditară în $\mathcal{A}$. În [31, Theorem 1.6] sunt datĕ condiţii necesare şi suficiente pentru ca acele S-module care sunt duse de adjunctul functorului $\mathrm{Hom}_R(U,-)$ în obiecte de torsiune în $\mathcal{A}$ să formeze o clasă de torsiune ereditară în Mod- S, condiţii în care $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,-)$ induce o echivalenţă între categoriile cât ale categoriilor $\mathcal{A}$ şi Mod- S, modulo respectivele clase de torsiune.

Mai recent, în [13] F. Castaño Iglesias, J. Gómez Torrecillas şi R. Wisbauer au propus o abordare a echivalenţelor dintre două categorii abeliene complete şi cocomplete $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$, plecând de la o pereche arbitrară de functori adjuncţi $\mathbf{R} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ şi $\mathbf{L} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Sunt date în [13, Theorem 1.6], condiţii necesare si suficiente, pentru ca functorul $\mathbf{R}$ să inducă o echivalenţă între subcategoria plină a categoriei $\mathcal{A}$ formată din obiectele prezentate de U şi imaginea esenţială a lui.

Rezultatele din [31] şi [13] sunt punctul de pornire al lucrării [50], aparţinând autorului tezei şi care constituie "scheletul" acesteia. În această lucrare sunt investigate condiţii de aplicare a rezultatelor din [31] în cazul unei perechi de functori arbitrari aşa ca în [13] şi sunt indicate câteva posibile particularizări.

Presupunem acum că $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ este un inel graduat şi $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$ este un R-modul graduat, ambele de un grup G (nu neapărat comutativ). Atunci $S = \mathrm{End}_R(M)$ are un subinel $E = \mathrm{END}_R(M)$ care este de asemenea G-graduat, iar $E = S$ cu condiţia ca G să fie finit sau ca M să fie finit generat. Este clar că E acţionează asupra S-modulului stâng

M, prin restricţia scalarilor, aşadar M este şi un E-modul stâng. Notăm cu $\mathrm{Gr}\text{-}R$ categoria modulelor G-graduate împreună cu homomorfismele de R-module care păstrează gradul, a căror mulţime va fi notată $\mathrm{Hom}_{G,R}(M, M')$ pentru orice $M, M' \in \mathrm{Gr}\text{-}R$. Pe lângă functorul $\mathrm{Hom}_{G,R}(M, -) : \mathrm{Gr}\text{-}R \to \mathrm{Mod}\text{-}\mathrm{End}_{G,R}(M)$, al cărui adjunct este dat de tensorizarea peste $\mathrm{End}_{G,R}(M)$, avem încă o pereche de adjuncţi, şi anume:

$$\mathrm{HOM}_R(M, -) : \mathrm{Gr}\text{-}R \to \mathrm{Gr}\text{-}E \text{ şi } - \otimes_E M : \mathrm{Gr}\text{-}E \to \mathrm{Gr}\text{-}R,$$

definiţia functorului $\mathrm{HOM}_R(M, -)$ găsindu-se în Secţiunea 2.3.

Considerarea unor echivalenţe între categorii de module graduate se justifică în principal prin aşa numita teorie Clifford graduată, care a fost dezvoltată în special de E. Dade în [19], unde M este presupus a fi un obiect simplu al categoriei $\mathrm{Gr}\text{-}R$. Mai multe lucrări care îl au coautor pe C. Năstăsescu generalizează rezultatele lui E. Dade sau consideră cazuri asemănătoare. Ne referim la [4], scrisă de acest autor împreună cu T. Albu, unde M este generatorul canonic $\bigoplus_{g\in G} R(g)$ al categoriei $\mathrm{Gr}\text{-}R$, la [36], împreună cu J.L. Goméz Pardo, unde este cercetată comportarea unor echivalenţe în raport cu functorul care uită garduarea sau la [58], împreună cu B. Torrecillas, unde este prezentată o versiune relativă a teoriei Clifford graduate. În cazul în care M este finit generat, A. Marcus a arătat în [44], că echivalenţele de categorii stabilite de către J.L. García Hernández şi J.L. Goméz Pardo în [29] păstrează modulele graduate de G-mulţimi şi sunt compatibile cu functorul care uită graduarea. Mai amintim şi rezultatul din [35] aparţinând autorilor J.L. Goméz Pardo, G. Militaru şi C. Năstăsescu, care afirmă că grupul $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ este completarea în topologia finită a grupului $\mathrm{HOM}_R(M, N)$, pentru orice $N \in \mathrm{Gr}\text{-}R$.

Articolele [36], [58] şi mai cu seamă [4] constituie punctul de plecare al lucrării [45], scrisă de A. Marcus împreună cu autorul tezei, al cărei scop este să acopere şi să unifice rezultatele de la care a plecat. Diferenţa faţă de abordările anterioare constă în faptul că apar categorii de module graduate în ambele parţi ale echivalenţei, care a fost de altfel de la bun început intenţia autorilor, lucrându-se în consecinţă cu functorul $\mathrm{HOM}_R(M, -)$ în loc de $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ sau $\mathrm{Hom}_{G,R}(M, -)$.

În teza de faţa sunt cercetate condiţii în care o pereche de functori adjuncţi $(\mathbf{R}, \mathbf{L})$ între două categorii Grothendieck $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ induce echivalenţe de categorii inverse una celeilalte între anumite subcategorii pline ale categoriilor iniţiale. Această abordare a fost stimulată de împrejurarea că, în unele situaţii, este preferabil să înlocuim functorii de tipul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -)$,

$U \in \mathcal{A}$, cu functori care păstrează anumite structuri adiţionale, ca de exemplu graduarea, aşa cum se întâmplă în [45], sau unităţile locale cum se sugerează în [6]. Rezultatele astfel obţinute sunt aplicate în cazul modulelor peste categorii preaditive mici, caz care acoperă atât pe cel al modulelor peste inele cu unităţi locale cât şi cel al modulelor graduate. În cazul modulelor graduate, este de asemenea prezentată legătura dintre aceste echivalenţe şi functorul care uită graduarea.

Înainte de a trece la prezentarea fiecărei secţiuni a acestei lucrări, să precizăm ipotezele şi notaţiile generale pe care le-am folosit. Peste tot în această teză inelele sunt asociative, dar nu au unitate decât atunci când aceasta este specificat în mod expres. Dacă nu este specificat altceva, modulele sunt considerate a fi module drepte, aşa că, pentru un inel oarecare R, Mod- R şi mod- R notează categoria R-modulelor unitale drepte, respectiv subcategoria plină a acesteia formată din acele R-module care sunt finit prezentate, împreună cu homomorfismele de R-module. Dacă $\mathcal{A}$ este o categorie, vom scrie $A \in \mathcal{A}$ pentru a indica că A este un obiect în $\mathcal{A}$. Dacă $A, A' \in \mathcal{A}$, folosim notaţiile $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$ şi $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(A)$ pentru mulţimea morfismelor în $\mathcal{A}$ dintre A şi A', respectiv clasa subobiectelor obiectului A, care în cazul categoriilor considerate de noi formează o latice. Totuşi, atunci când $\mathcal{A} = \text{Mod-}R$ prescurtăm aceste notaţii astfel $\mathrm{Hom}_R(A, A') = \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(A, A')$, respectiv $\mathcal{L}_R(A) = \mathcal{L}_{\text{Mod-}R}(A)$, şi analog pentru $\mathcal{A} = \text{Mod-}\mathcal{X}$, unde $\mathcal{X}$ este o categorie preaditivă mică, distincţia urmând a se face din context. Compunerea a două morfisme $f : A' \to A$ şi $f' : A \to A''$ va fi scrisă simplu $f'f$, acelaşi lucru fiind valabil pentru functori. Toţi functorii consideraţi între categorii preaditive sunt presupuşi a fi aditivi. Formal, vom lucra numai cu functori covarianţi, în consecinţă functor înseamnă functor covariant. Atunci când apare un functor contravariant schimbăm categoria care constituie domeniul lui cu cea opusă. Totuşi, în mod informal, vom numi acest functor contravariant cu domeniul categoria iniţială. Dacă $\mathbf{f}$ este un functor al cărui codomeniu are obiect zero, vom nota cu $\mathrm{Ker}\,\mathbf{f}$ clasa acelor obiecte din domeniu care sunt duse de $\mathbf{f}$ în 0, spre deosebire de $\ker \alpha$ care înseamnă nucleul (în sens categorial) al unui morfism α. Toate subcategoriile pe care le considerăm sunt pline.

În primul capitol al tezei se aplică tehnica de localizare a categoriilor abeliene pentru a se obţine echivalenţe între anumite categorii cât a două categorii Grothendieck $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$, plecând de la doi functori ajuncţi $\mathbf{R} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ la dreapta şi $\mathbf{L} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ la stânga. Secţiunile 1.1 şi 1.2 sunt introductive, rezultatele fiind preluate din lucrări cu caracter general, în special din [49], [63] şi [72]. În prima dintre cele două secţiuni este prezentată construcţia categoriilor de fracţii cu numitori dintr-un sistem de morfisme, precum şi legătura acestei construcţii cu noţiunea de adjuncţie (Teorema 1.1.1). Cea dea două continuă cu localizarea categoriilor abeliene, care este un caz particular a construcţiei categoriilor de fracţii, în acest context găsindu-şi locul şi teorema Popescu–Gabriel (Teorema1.2.7), care dă o reprezentare a oricărei categorii Grothendieck ca o categorie cât, care va fi mai apoi identificată cu o subcategorie plină, a unei categorii de module. Este amintită pe scurt şi interpretarea categoriei cât modulo o subcategorie localizantă a unei categorii de module, ca fiind subcategoria plină formată din modulele închise relativ la o anumită topologie, numită topologia Gabriel asociată subcategoriei localizante.

Începând cu secţiunea 1.3, rezultatele sunt în cea mai mare parte originale. Plecând de la perechea de functori adjuncţi menţionată mai sus şi de la un generator S al categoriei $\mathcal{B}$, punem $U = \mathbf{L}(S)$ şi definim categoriile $\mathrm{Stat}(\mathbf{R})$, $\mathbf{L}(\mathcal{B})$, $\mathrm{Pres}[U]$, $\mathrm{Gen}[U]$, $\boldsymbol{\sigma}[U]$, $\mathrm{Adst}(\mathbf{R})$ şi $\mathbf{R}(\mathcal{A})$ care vor juca un rol însemnat în ceea ce urmează. Alături de Teorema 1.3.3, preluată din lucrarea [13], în care sunt date condiţii echivalente cu egalitatea $\mathrm{Pres}[U] = \mathrm{Stat}(\mathbf{R})$, am mai atrage aici atenţia asupra Propoziţiei 1.3.6, unde cu ipoteza că această egalitate este îndeplinită afirmăm că $\mathrm{Pres}[U]$, respectiv $\mathbf{R}(\mathcal{A})$, este o subcategorie reflectivă, respectiv coreflectivă, în $\mathcal{A}$, respectiv $\mathcal{B}$, principalul avantaj al acestui fapt constituindu-l posibilitatea de a calcula limitele şi colimitele în aceste categorii, conform Propoziţiei 1.2.1.

În secţiunea 1.4, introducem teoria de torsiune în $\mathcal{A}$ asociată obiectului U, pe care o notăm $(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}})$, şi construim categoria cât a categoriei $\mathcal{A}$ modulo subcategoria localizantă a cărei clasă de obiecte este $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Accentul cade pe studiul relaţiilor dintre $\operatorname{Ker}\mathbf{R}$, $\operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -)$ şi $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, o atenţie specială fiind acordată găsirii condiţiilor de valabilitate a egalităţii $\operatorname{Ker}\mathbf{R} = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. De remarcat că am caracterizat această egalitate cu ajutorul noţiunii de obiect CQF-3, noţiune preluată din lucrarea [31]. În finalul secţiunii este discutat cazul în care $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ este o clasă TTF. Mai remarcăm de asemenea că ipoteza ca un obiect să fie CQF-3 este destul de generală, clasa acestor obiecte incluzând-le de exemplu pe cele proiective, pentru care $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ este o clasa TTF, situaţia considerată de noi acoperind în consecinţă o multitudine de cazuri, printre care cel clasic din teoria Morita sau din generalizările obţinute în [25], [28] sau [29].

Punând condiţia ca nucleul morfismului indus $\mathbf{L}(g)$ să aparţină clasei $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ pentru orice monomorfism g din $\mathcal{B}$, demonstrăm în secţiunea 1.5 că obiectele din $\mathcal{B}$ care sunt duse de $\mathbf{L}$ în obiecte de torsiune în $\mathcal{A}$, relativ la teoria definită în secţiunea anterioară, formează o clasă de torsiune de asemenea ereditară în $\mathcal{B}$, notată $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ (Teorema 1.5.1). Mai departe determinăm anumite subobiecte ale generatorului S, a căror mulţime generează teoria de torsiune din $\mathcal{B}$, modelul fiind topologia Gabriel asociată unei teorii de torsiune ereditară pe o categorie de module. Scopul acestei construcţii este de a regăsi ca şi un caz particular filtrul Gabriel care apare în lucrarile [28] şi [29].

Secţiunea 1.6 este cea mai importantă din acest capitol. Teorema 1.6.2 furnizează condiţii necesare şi suficiente cu echivalenţa categoriilor cât $\mathcal{C} = \mathcal{A}/\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ şi $\mathcal{D} = \mathcal{B}/\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, în ipoteza că $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ este o teorie de torsiune ereditară. Cu ipoteza suplimentară ca U să fie un obiect CQF-3, Teorema 1.6.5 ne caracterizează aceastuă echivalenţă de categorii prin coincidenţa claselor Stat($\mathbf{R}$), respectiv Adst($\mathbf{R}$) cu anumite subcategorii pline mai uşor de descris, iar Corolarul 1.6.7, unde afirmăm echivalenţa a patru categorii, deschide calea spre aplicaţiile prezentate în cel de-al doilea capitol. Rezultatele obţinute până aici ne arătă că functorul oarecare $\mathbf{L} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ care are un adjunct la dreapta $\mathbf{R}$ are o comportare foarte asemănătoare unui functor tensor, ceea ce este de aşteptat întrucât orice categorie Grothendieck se poate identifica cu o subcategorie a unei categorii de module, iar între categorii de module un adjunct la stânga este natural izomorf unui functor tensor.

În ultima secţiune a acestui capitol, secţiunea 1.7, ne propunem să demonstrăm că rezultatele noastre generalizează pe cele din [28] şi [29] şi, într-o anumită măsură, pe cele din [31]. Astfel Teoremele 1.7.1 şi 1.7.4 deduse ca şi cazuri particulare ale Teoremelor 1.6.2 şi 1.6.5 sunt reformulări pentru [31, Theorem 1.6], respectiv [28, Theorem 1.3] şi [29, Theorem 1.3].

Rezultatele din primul capitol sunt aplicate în cel de-al doilea în diferite cazuri în care $\mathcal{A}$ sau $\mathcal{B}$ sunt categorii de module peste categorii preaditive mici. În virtutea faptului că un inel cu unitate poate fi privit ca o categorie preaditivă cu un singur obiect, modulele peste categorii preaditive mici mai sunt numite şi module peste inele cu mai multe obiecte. În secţiunea 2.1, mai precis în Teorema 2.1.3 şi Corolarul 2.1.4, sunt deduse din Teorema 1.6.5 echivalenţe atunci când $\mathcal{B}$, respectiv atât $\mathcal{B}$ cât şi $\mathcal{A}$ sunt categorii de module peste categorii preaditive mici. De menţionat că rezultate asemănătoare apărând şi în lucrarea

[32], aparţinând lui G.A. Garkusha, mai precis [32, Theorem 4.7, Corollary 4.9 şi Theorem 4.10]. În finalul secţiunii sunt generalizate [61, Lemma 2.2 şi Lemma 2.3], ceea ce sugerează o posibilă deschidere a rezultatelor noastre către teoria reprezentărilor algebrelor finit dimensionale, în abordarea ei functorială iniţiată de M. Auslander.

În secţiunea 2.2 arătăm că o categorie de module unitale peste un inel cu unităţi locale este echivalentă cu una de module peste o anumită categorie preaditivă mică şi se obţine în consecinţă Teorema 2.2.9, care este o generalizare a teoriei Morita pentru astfel de inele, aşa cum este ea prezentată în [6].

Începând cu secţiunea 2.3 şi până la sfârşitul tezei ne ocupăm cu categoria R-modulelor graduate de G-mulţimi (tranzitive), unde G este un grup şi R este un inel G-graduat. Cele mai multe rezultate şi idei aparţin lucrărilor [45] şi [46], scrise de A. Marcus împreună cu autorul acestei teze, dar demonstraţiile sunt adesea simplificate ca o consecinţă a deducerii lor din cazul general. Pentru început arătăm că Gr-(X, R), categoria R-modulelor graduate de G-mulţimea X, este echivalentă cu o categorie de module peste o categorie preaditivă mică (Propoziţia 2.3.3), ceea ce ne permite să aplicăm rezultatele din secţiunea 2.1. Mai apoi este introdus functorul care uită graduarea împreună cu adjunctul lui la dreapta, precum şi functorul $\mathrm{HOM}_R(M, -)$ despre care am vorbit mai sus.

Scopul secţiunii 2.4 este să arate că dacă M este un modul G-graduat, iar N unul X-graduat, X fiind o G-mulţime, atunci $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ este completarea în topologia finită a grupului $\mathrm{HOM}_{X,R}(M, N)$ (Teorema 2.4.3). Rezultatul, demonstrat în lucrarea autorului împreună cu A. Marcus [46], este o generalizare pentru [35, Theorem 1.2], tehnica de lucru fiind împrumutată din [35].

În următoarea secţiune 2.5, studiem obiectele mici din categoria Gr-$(H\backslash G, R)$, unde H este un subgrup al grupului G iar prin $H\backslash G$ înţelegem mulţimea $\{Hg \mid g \in G\}$ a claselor de echivalenţă la dreapta ale lui H în G. Acest studiu este inspirat de asemenea de lucrarea [35], generalizarea acestor rezultate, aşa cum este făcută aici, nefiind una dificilă.

Interesaţi fiind şi de comportarea echivalenţelor pe care le urmărim faţă de functorul care uită graduarea şi adjunctul lui, era natural să studiem acele subcategorii pline ale categoriilor Gr-$(H\backslash G, R)$ şi Gr-$(K\backslash G, R)$, unde $1 \leq K \leq H \leq G$, între care restricţiile acestor functori sunt bine definite. Aceste subcategorii le-am numit rigide şi sunt închise într-un anume sens la schimbarea graduării, iar studiul lor l-am întreprins în secţiunea 2.6.

Pe lângă definiţia acestor subcategorii rigide, am introdus şi una pentru topologii Gabriel rigide pe R, care sunt acele topologii care corespund unor clase de torsiune ereditare rigide, după cum se vede din Propoziţia 2.6.9. Ideea considerării subcategoriilor rigide provine din [36], unde ele au fost studiate în cazul $K = 1$ şi $H = G$, dar, de data aceasta, generalizarea nu mai este deloc evidentă. O sistematizare a acestor lucruri poate fi găsită în lucrarea autorului [51].

Rezultatele din sectiunea 2.1, se specializează în secţiunea ultimă a tezei, anume 2.7, unde prezentăm prin Teorema 2.7.4 o versiune graduată a echivalenţelor cuprinse în [28, Theorem 1.3] şi [29, Theorem 1.3], iar prin Corolarul 2.7.5 comportarea acestor echivalenţe faţă de functorul care uită graduarea şi faţă de adjunctul său. Relaţia precisă dintre echivalenţele stipulate de Teorema 2.7.4 şi cele din [29, Theorem 1.3] este stabilită de Teorema 2.7.6. În finalul secţiunii sunt discutate aplicaţii ale acestor rezultate la diferite cazuri particulare.

Vom spune acum câte ceva despre metoda folosită. Adoptând punctul de vedere al lui T. Faticoni din [22], considerăm că în ceea ce priveşte relaţiile dintre un R-modul U şi inelul E al endomorfismelor sale, există trei direcţii principale de studiu toate trei utilizând echivalenţele de categorii: una care extinde rezultatul lui K. Fuller ([25, Theorem 2.6]) ducând catre conceptele de $*$-modul şi costar modul; o alta care utilizând Teorema Popescu–Gabriel, deduce echivalenţe între anumite subcategorii pline ale lui Mod- R şi anumite subcategorii pline ale categoriei Mod- E, aplicabilă în special la studiul R-modulelor Σ-quasiproiective; a treia, care apare în special în literatura privitoare la grupuri abeliene şi unde un rol crucial îl joacă grupurile (modulele) auto–mici. Teza de faţă, se înscrie pe linia celei dea doua direcţii dintre cele menţionate mai sus. Totuşi, există o diferenţă pe care am dori să o detaliem în continuare. Până acum, cel puţin după ştiinţa autorului acestei teze, toate lucrările care se pot subsuma acestei a doua direcţii folosesc Teorema Popescu–Gabriel ca pe ceva gata dat, nerămânând altceva de făcut decât să fie deduse de acolo echivalenţele dorite. Specific acestei teze este că încercăm să punem în prim plan ceea ce, după părerea autorului, stă dincolo de enunţul aceastei teoreme şi de posibilele ei aplicaţii, constituind esenţa sa, şi anume de conceptul de localizare, în cazul nostru abeliană. Fie spus aici că demostraţia dată teoremei în cauză de N. Popescu în monografia sa [63] se bazează de asemenea pe acest concept. Vorbim de o localizare a unei categorii abeliene, atunci când avem definit un functor exact cu domeniul respectiva categorie şi care are un adjunct la dreapta deplin fidel. Faptul că adjunctul este deplin fidel este echivalent, după un rezultat bine cunoscut, cu inversabilitatea counităţii de adjuncţie. Acest punct de vedere ne-a condus la demonstraţia Teoremelor 1.6.2 şi 1.6.5, pe care le considerăm principalele rezultate ale primului capitol al tezei şi din care inferăm apoi aplicaţiile prezentate în cel de-al doilea capitol. Abordarea noastră mai are şi avantajul că, deoarece localizarea se poate defini asemănător şi pentru alte categorii decât cele abeliene, este posibil ca urmând acelaşi drum să fie obţinute rezultate analoge şi în alte cazuri. Este ceea ce autorul tezei a încercat în lucrarea [52], în cazul categoriilor triangulate compact generate fără a ajunge – după cum speră încă – la rezultate foarte convingătoare, rezultate neincluse în prezenta teză.

De-a lungul întregii perioade necesare elaborării şi redactării acestei lucrări, familia mea a fost lângă mine cu încurajări şi cu infinită răbdare. Le mulţumesc acum tuturor pentru înţelegerea pe care mi-au arătat-o. Mulţi alţii sunt cei cărora le sunt îndatorat pentru ajutorul acordat în ducerea la bun sfârşit a acestei teze. Domnului Profesor Ioan Purdea îi mulţumesc pentru îndrumare, pentru cunoştinţele pe care mi le-a împărtăşit şi mai ales pentru înţelesul lor. Îi mulţumesc de asemenea domnului Profesor Grigore Călugăreanu pentru modul în care m-a condus către cercetarea matematică şi pentru mereu reînnoita provocare de a continua. Lui Andrei Mărcuş îi mulţumesc pentru colaborarea excelentă dintre noi, precum şi pentru ajutorul acordat pentru a primi o bursă în Germania, unde am ridicat structura de rezistenţă a lucrării de faţă. Mulţumesc de asemenea Profesorului Burkhard Külshammer din Jena pentru ospitalitate şi Fundaţiei "Alexander von Humboldt" pentru sprijinul financiar. Mulţumiri se cuvin şi lui Simion Breaz pentru nenumăratele discuţii pe care le-am purtat, punctate deseori din parte-i de intuiţii pătrunzătoare. Nu în ultimul rând, pentru sfaturi şi constante încurajări mulţumesc colegilor Cosmin Pelea, Christian Săcărea, Septimiu Crivei, Csaba Szántó, iar lista ar putea continua.

Ianuarie 2003, Cluj–Napoca,

Ciprian Modoi

Capitolul 1

Echivalenţe induse de functori adjuncţi

În acest capitol studiem posibilităţile de obţinere a unor echivalenţe de categorii plecând de la o pereche de functori adjuncţi între două categorii Grothendieck $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$.

Scopul capitolului este de a găsi un cadru cât mai larg pentru studiul echivalenţei de categorii care se stabileşte între clasa modulelor statice şi cea a modulelor adstatice, relativ la un modul fixat, cadru care să lase loc şi unor eventuale generalizări, în care să înlocuim functorul Hom uzual cu un altul care păstrează anumite structuri adiţionale.

Primele două secţiuni au un caracter introductiv. Începând cu secţiune a treia cea mai mare parte a rezultatelor – exceptându-le pe acelea cărora le-am indicat sursa – sunt publicate de autor în lucrarea [50], expunerea fiind aici desigur ceva mai detaliată. Unele idei sunt prefigurate de asemenea şi în lucrările [10] şi [11], scrise de autor în colaborare cu S. Breaz.

1.1 Categorii de fracţii

Despre o pereche de functori

$$\mathcal{A} \underset{\mathbf{L}}{\overset{\mathbf{R}}{\rightleftarrows}} \mathcal{B},$$

unde $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sunt două categorii oarecare, spunem că sunt *adjuncţi* - mai precis $\mathbf{R}$ este adjunctul la dreapta al lui $\mathbf{L}$, iar acesta din urmă adjunctul la stânga al primului - dacă, pentru orice două obiecte $A \in \mathcal{A}$ şi $B \in \mathcal{B}$, există un isomorfism functorial

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}(B), A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, \mathbf{R}(A)).$$

Este bine ştiut că adjuncţia dintre $\mathbf{R}$ şi $\mathbf{L}$ poate fi definită, alternativ, cu ajutorul morfismelor functoriale

$$u : \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \to \mathbf{RL} \text{ şi } \; v : \mathbf{LR} \to \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$$

numite *unitatea*, respectiv *counitatea de adjuncţie*, care satisfac relaţiile

$$\mathbf{R}(v_A)u_{\mathbf{R}(A)} = 1_{\mathbf{R}(A)} \text{ şi } \; v_{\mathbf{L}(B)}\mathbf{L}(u_B) = 1_{\mathbf{L}(B)},$$

pentru orice $A \in \mathcal{A}$ şi orice $B \in \mathcal{B}$. În plus, notăm că $\mathbf{R}$ comută cu limitele, iar $\mathbf{L}$ cu colimitele, în particular, $\mathbf{R}$ este exact la stânga iar $\mathbf{L}$ la dreapta. Adjunctul (la dreapta sau la stânga) al unui functor dat este unic determinat până la un izomorfism functorial.

În continuare vom prezenta pe scurt un concept strâns legat de conceptul de adjuncţie între doi functori. Fiind dată o clasă de morfisme Σ, într-o categorie $\mathcal{A}$, *categoria de fracţii* a categoriei $\mathcal{A}$ cu numitori în Σ este definită ca fiind o pereche $(\mathcal{A}[\Sigma^{-1}], \mathbf{a})$, unde $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ este o categorie, iar $\mathbf{a} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ este un functor, astfel încât $\mathbf{a}(s)$ este inversabil pentru orice $s \in \Sigma$ şi orice functor $\mathbf{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ cu proprietatea că imaginea prin $\mathbf{F}$ a fiecărui morfism din Σ este un morfism inversabil factorizează unic prin $\mathbf{a}$, adică există un unic functor $\overline{\mathbf{F}} : \mathcal{A}[\Sigma - 1] \to \mathcal{B}$ astfel încât $\mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}}\mathbf{a}$. Categoria de fracţii a categoriei $\mathcal{A}$ în raport cu sistemul de morfisme Σ, dacă există, este unic determinată pâna la o echivalenţă de categorii. Dacă în definiţia categoriei de fracţii plecăm de la o categorie preaditivă $\mathcal{A}$ şi cerem ca $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ să fie de asemenea preaditivă, functorul $\mathbf{a}$ să fie aditiv, iar condiţia de factorizare unică să fie satisfăcută numai de functori aditivi $\mathbf{F}$, în care caz vom cere ca $\overline{\mathbf{F}}$ să fie de asemenea aditiv, atunci obţinem definiţia *categoriei de fracţii aditive* a categoriei $\mathcal{A}$ în raport cu sistemul de morfisme Σ.

Reamintim în continuare o binecunoscută teoremă, pe care o vom folosi din plin pe parcursul întregii lucrări.

Teorema 1.1.1. *[63, Chapter 1, Theorem 13.10] Fie $\mathbf{R} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un adjunct la dreapta pentru $\mathbf{L} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Notăm cu Σ clasa tuturor morfismelor s din $\mathcal{B}$ pentru care $\mathbf{L}(s)$ este inversabil. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) $\mathbf{R}$ *este deplin fidel.*

(ii) Morfismul functorial $v : \mathbf{LR} \to \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ *este un izomorfism.*

(iii) Categoria $\mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$ *există şi este echivalentă cu* $\mathcal{A}$*.*

Categoria de fracţii a unei categorii date $\mathcal{A}$ în raport cu un sistem oarecare de morfisme Σ din $\mathcal{A}$ nu există întotdeauna. Mai mult, chiar dacă există, metodele existente pentru determinarea unei categorii de acest fel nu sunt întotdeauna consistente. Un caz particular favorabil este cel al sistemelor de morfisme *multiplicative* - adică închise la compunere şi care conţine toate morfismele unitate din categoria $\mathcal{A}$ - calculabile la stânga. Sistemul de morfisme Σ ale categoriei $\mathcal{A}$ se numeşte *calculabil la stânga* dacă orice diagramă de forma $X' \xleftarrow{s} X \xrightarrow{f} Y$, unde $s \in \Sigma$, poate fi completată până la o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[d, "s'"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y \end{tikzcd}$$

cu $s' \in \Sigma$, şi dacă pentru orice două morfisme $f, g : X \to Y$ din $\mathcal{A}$ cu proprietatea că există $s : X' \to X$ în Σ astfel încât $fs = gs$, există de asemenea un morfism $s' : Y \to Y'$ în Σ care verifică $s'f = s'g$.

Dual se defineşte noţiunea de sistem *calculabil la dreapta*. Un sistem calculabil atât la stânga cât şi la dreapta este un sistem *bicalculabil*.

Dacă Σ este un sistem multilplicativ calculabil la stânga în $\mathcal{A}$, atunci construim $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ cu aceleaşi obiecte ca şi $\mathcal{A}$; pentru $X, Y \in \mathcal{A}$ un morfism α dintre X şi Y în $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ este o clasă de echivalenţă de diagrame de forma $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{s} Y$, cu $Z \in \mathcal{A}$ şi $s \in \Sigma$, unde diagramele $X \xrightarrow{f_1} Z_1 \xleftarrow{s_1} Y$ şi $X \xrightarrow{f_2} Z_2 \xleftarrow{s_2} Y$ sunt echivalente dacă ele se pot înscrie într-o diagramă comutativă de forma:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[drr] & & Y \arrow[dll] \arrow[d] \\ Z_1 \arrow[dr] & & Z_2 \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

cu $Z_2 \to Z$ în Σ; compunerea a două morfisme $X' \xrightarrow{f_1} Z \xleftarrow{s_1} X$ şi $X \xrightarrow{f_2} Z_2 \xleftarrow{s_2} X''$ este reprezentată de diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, "f_1"] & & X \arrow[dl, "s_1"] \arrow[dr, "f_2"] & & X'' \arrow[dl, "s_2"] \\
& Z_1 \arrow[dr, "f"] & & Z_2 \arrow[dl, "s"] & \\
& & Z & &
\end{tikzcd}$$

cu $s \in \Sigma$, obţinută din calculabilitatea la stânga a sistemului Σ. Se verifică uşor că în felul acesta sunt satisfăcute toate condiţiile din definiţia unei categorii, exceptând aceea care cere ca $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]}(X,Y)$ să fie mulţime pentru orice două obiecte X, Y din $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$. De aceea, pentru construcţia categoriei de fracţii în cauză se mai impun anumite condiţii, în aşa fel încât să fie depăşit şi acest neajuns. Întrucât aceste condiţii nu sunt esenţiale pentru ceea ce urmează, nu le vom mai prezenta aici, mulţumindu-ne să trimitem cititorul interesat la [63], [62] sau [26]. Mai menţionăm că mulţimea morfismelor în categoria $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ dintre două obiecte poate fi scrisă formal ca

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]}(X,Y) = \left\{ \frac{f}{s} = s^{-1}f \mid f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Z), s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,Z), s \in \Sigma \right\}.$$

Desigur contrucţia categoriei de fracţii va fi duală dacă lucrăm cu sisteme calculabile la dreapta. Este de observat că, dacă există categoria $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ unde Σ este un sistem multiplicativ bicalculabil, atunci functorul $\mathbf{a} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ este exact, ceea ce conduce, în particular, la concluzia că $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ este finit completă sau cocompletă, cu condiţia ca $\mathcal{A}$ să aibă aceeaşi proprietate([63, Chapter 1, Proposition 14.5]).

Dacă presupunem categoria $\mathcal{A}$ ca fiind aditivă, iar sistemul Σ multiplicativ, şi presupunem de asemenea existenţa categoriei $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$, atunci categoria de fracţii şi cea de fracţii aditive ale lui $\mathcal{A}$ în raport cu Σ coincid ([63, Chapter 4, Theorem 7.5]). Mai mult, dacă Σ este bicalculabil şi $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ este bine definit, atunci $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ este abeliană, dacă $\mathcal{A}$ satisface aceeaşi proprietate ([63, Chapter 4, Theorem 7.6]).

Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană *local mică*, ceea ce înseamnă că subobiectele, sau echivalent, obiectele cât ale unui obiect dat formează o mulţime. O subcategorie plină $\mathcal{T}$ a categoriei $\mathcal{A}$ se numeşte *deasă* dacă pentru un şir exact $0 \to A \to B \to C \to 0$ în $\mathcal{A}$, termenii extremi aparţin lui $\mathcal{T}$ exact atunci când cel din mijloc aparţine. Unei astfel de subcategorii i se asociază sistemul de morfisme

$$\Sigma_{\mathcal{T}} = \{f \mid \ker f \in \mathcal{T} \text{ şi } \quad \operatorname{coker} f \in \mathcal{T}\}.$$

Acest sistem este multiplicativ şi bicalculabil ([63, Chapter 4, Proposition 4.7]), iar ipoteza impusă asupra categoriei $\mathcal{A}$ de a fi local mică ne asigură de bine definirea categoriei de fracţii $\mathcal{A}[\Sigma_{\mathcal{T}}^{-1}]$, categorie pe care o vom nota $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ şi o vom numi *categoria cât* a categoriei $\mathcal{A}$ în raport subcategoria deasă $\mathcal{T}$. Ştim acum că $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ este abeliană iar functorul canonic $\mathbf{a}$ este exact. Urmând [26, Section III], vom detalia în continuare o altă metodă de construcţie a acestei categorii.

Obiectele categoriei $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ sunt aceleaşi ca si cele ale categoriei $\mathcal{A}$; pentru două obiecte $X, Y \in \mathcal{A}$ se observă că sistemul de grupuri abeliene

$$\{\operatorname{Hom}(X', Y/Y') \mid X' \leq X, Y' \leq Y \text{ cu } X/X' \in \mathcal{T}, Y' \in \mathcal{T}\}$$

este direct, ordinea dintre două perechi (X_1, Y_1) şi (X_2, Y_2) fiind dată de $X_1 \leq X_2$ şi $Y_1 \leq Y_2$, iar morfismele de legătură fiind cele canonice; vom defini atunci

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{T}}(X, Y) = \varinjlim_{X/X' \in \mathcal{T}, Y' \in \mathcal{T}} \operatorname{Hom}(X', Y/Y').$$

Notăm că functorul canonic $\mathbf{a}$ aplică un morfism în clasa lui de echivalenţă din această limită directă. Compunerea a două morfisme $\overline{f} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{T}}(X, Y)$ reprezentat de $f : X' \to Y/Y'$ şi $\overline{g} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{T}}(Y, Z)$ reprezentat de $g : Y'' \to Z/Z'$ se face astfel: dacă $X'' = f^{-1}((Y'' + Y')/Y')$ atunci $X/X'' \in \mathcal{T}$. Mai mult, există un subobiect Z'' al lui Z pentru care $Z''/Z' = g(Y'' \cap Y')$. Notăm $f' : X'' \to (Y'' + Y')/Y'$ şi $g' : Y''/(Y'' \cap Y') \to Z/Z''$ morfismele induse de f, respectiv g, cu $\phi : (Y'' + Y')/Y' \to Y''/(Y'' \cap Y')$ izomorfismul canonic şi punem $h : X'' \to Z/Z''$, $h = g'\phi f'$. Prin definiţie $\overline{g}\overline{f} = \overline{h}$.

Mai menţionăm pentru această categorie cât următoarea proprietate de universalitate:

Teorema 1.1.2. *[26, Corollaire III.2] Dacă $\mathbf{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este un functor aditiv între categoriile abeliene $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ cu proprietatea că $\mathcal{T} \subseteq \operatorname{Ker} \mathbf{F}$, atunci există un functor unic (până la un izomorfism functorial) $\overline{\mathbf{F}} : \mathcal{A}/\mathcal{T} \to \mathcal{B}$ astfel încât $\mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}}\mathbf{a}$.*

1.2 Localizarea categoriilor abeliene

O subcategorie plină $\mathcal{C}$ a unei categorii date $\mathcal{A}$ se numeşte *(co)reflectivă* dacă functorul incluziune $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ are un adjunct la (stânga) dreapta, acest adjunct numindu-se atunci *(co)reflector*. De notat că această terminologie nu este universal acceptată, unii autori numind subcategorie reflectivă ceea ce noi numim coreflectivă şi invers. De exemplu convenţia de aici este adoptată în [49, Chapter V, 5], în timp ce cealaltă convenţie poate fi întâlnită în [72, Chapter X, pag. 213]. Este clar că cele două noţiuni sunt duale una celeilalte, aşadar este suficient să studiem una dintre ele şi să deducem, prin această dualitate, rezultatele corespunzătoare pentru cealaltă.

Vom nota cu $\mathbf{i} : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ functorul incluziune al subcategoriei coreflective $\mathcal{C}$ în categoria $\mathcal{A}$ şi cu $\mathbf{a} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ adjunctul său la stânga. De asemenea vom nota prin

$$\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \to \mathbf{ia} \text{ şi } \ \delta : \mathbf{ai} \to \mathbf{1}_{\mathcal{C}},$$

unitatea, respectiv counitatea acestei adjuncţii. Deoarece $\mathbf{i}$ este deplin fidel, Teorema 1.1.1 implică faptul că δ este un izomorfism natural. Mai mult, $\mathbf{a} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ comută cu colimitele, iar $\mathbf{i} : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ cu limitele. Închiderea categoriei $\mathcal{C}$ relativ la limite şi colimite este descrisă de:

Propoziţia 1.2.1. *[49, Chapter V, Proposition 5.1 şi 5.2] Cu notaţiile de mai sus, considerăm* $\{A_\lambda \xrightarrow{\varphi_{\lambda,\lambda'}} A_{\lambda'}\}_{\lambda,\lambda' \in \Lambda}$ *o diagramă în* $\mathcal{C}$*. Atunci:*

(a) Dacă $\{A \xrightarrow{\varphi_\lambda} A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *este limita în* $\mathcal{A}$ *a diagramei de mai sus, atunci* $A \cong \mathbf{ia}(A) \in \mathcal{C}$ *este de asemenea limita în* $\mathcal{C}$*.*

(b) Dacă $\{A_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda} A\}_{\lambda \in \Lambda}$ *este colimita în* $\mathcal{A}$ *a diagramei de mai sus, atunci* $\{A_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda} A \xrightarrow{\eta_A} \mathbf{a}(A)\}_{\lambda \in \Lambda}$ *este colimita sa in* $\mathcal{C}$*.*

În particular, dacă $\mathcal{C}$ este normală şi conormală - ceea ce este echivalent, având în vedere Propoziţia 1.2.1 şi [49, Chapter I, Theorem 20.1], cu a fi abeliană - atunci un morfism în $\mathcal{C}$ este un monomorfism sau un epimorfism în $\mathcal{C}$ dacă şi numai dacă el este monomorfism în $\mathcal{A}$, respectiv conucleul său este anulat de $\mathbf{a}$.

Propoziţia 1.2.2. *[49, Chapter V, Proposition 5.3] Fie* $\mathcal{C}$ *o subcategorie coreflectivă a categoriei abeliene* $\mathcal{A}$*. Dacă functorul* $\mathbf{a} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ *este exact, atunci* $\mathcal{C}$ *este de asemenea abeliană. Mai mult, dacă* $\mathcal{A}$ *este Ab5, atunci* $\mathcal{C}$ *satisface aceeaşi condiţie.*

În ceea ce a rămas din această secţiune, simbolul $\mathcal{A}$ denotă o categorie abeliană. O subcategorie deasă $\mathcal{T}$ a categoriei $\mathcal{A}$ se zice *localizantă* dacă functorul canonic $\mathbf{a} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{T}$

are un adjunct la dreapta. Pentru a caracteriza subcategoriile localizante, vom da mai întâi o definiţie, şi anume un obiect $A \in \mathcal{A}$ se numeşte *închis* relativ la subcategoria deasă $\mathcal{T}$ (sau, simplu, $\mathcal{T}$-închis) dacă el nu are subobiecte nenule conţinute în $\mathcal{T}$ şi orice morfism $s : A \to A'$ cu $s \in \Sigma_{\mathcal{T}}$ este o secţiune. Reamintim că $\Sigma_{\mathcal{T}}$ este constituită din toate morfismele S din $\mathcal{A}$ pentru care $\ker s, \operatorname{coker} s \in \mathcal{T}$.

Lema 1.2.3. *[63, Chapter 4, Lemma 7.9] Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană local mică şi $\mathcal{T}$ o subcategorie deasă a lui $\mathcal{A}$. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca un obiect $A \in \mathcal{A}$ să fie închis relativ la $\mathcal{T}$ este ca morfismul*

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A', A) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{T}}(A', A),$$

indus de functorul canonic $\mathbf{a} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{T}$, să fie izomorfism pentru orice $A' \in \mathcal{A}$.

Teorema 1.2.4. *[63, Chapter 4, Theorem 7.10] Fie $\mathcal{T}$ o subcategorie deasă a categoriei abeliene local mici $\mathcal{A}$. Atunci $\mathcal{T}$ este localizantă dacă şi numai dacă mulţimea tuturor subobiectelor unui obiect dat din $\mathcal{A}$ care aparţin lui $\mathcal{T}$ are un cel mai mare element şi orice obiect din $\mathcal{A}$ care nu conţine subobiecte nenule aparţinând lui $\mathcal{T}$ este izomorf unui subobiect al unui obiect $\mathcal{T}$-închis.*

Mai mult, dacă $\mathcal{T}$ este localizantă atunci adjunctul la dreapta a lui $\mathbf{a}$ este deplin fidel, imaginea lui fiind constituită din obiectele $\mathcal{T}$-închise.

Ultima afirmaţie din Teorema 1.2.4 poate fi reformulată astfel: categoria cât $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ poate fi identificată cu subcategoria plină a lui $\mathcal{A}$ constituită din obiectele $\mathcal{T}$-închise, iar această subcategorie este una coreflectivă. Mai amintim două consecinţe, de asemenea binecunoscute, a Teoremelor 1.1.1 şi 1.2.4:

Propoziţia 1.2.5. *Dacă $\mathcal{T}$ este o subcategorie localizantă a categoriei abeliene $\mathcal{A}$, $\mathcal{C} = \mathcal{A}/\mathcal{T}$ cu functorii canonici $\mathbf{i} : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ şi $\mathbf{a} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, iar $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \to \mathbf{ia}$ şi $\delta : \mathbf{ai} \to \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ sunt unitatea şi counitatea adjuncţiei dintre $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{a}$, atunci δ este un izomorfism functorial. În plus, $\ker \eta_A, \operatorname{coker} \eta_A \in \mathcal{T}$, pentru orice $A \in \mathcal{A}$.*

Teorema 1.2.6. *[63, Chapter 4, Theorem 7.11] Dacă $\mathbf{R} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este un functor deplin fidel între două categorii abeliene, iar $\mathbf{L}$ este un adjunct la stânga exact pentru $\mathbf{R}$, atunci $\operatorname{Ker} \mathbf{L}$ este o subcategorie localizantă a categoriei $\mathcal{B}$ şi $\mathbf{R}$ induce o echivalenţă între $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}/\operatorname{Ker} \mathbf{L}$.*

Teorema următoare este bine cunoscută în literatura de specialitate sub numele de Teorema Popescu–Gabriel:

Teorema 1.2.7. *[63, Chapter 4, Theorem 5.12] Considerăm o categorie Grothendieck* $\mathcal{A}$ *şi un obiect* $U \in \mathcal{A}$*. Notăm* $E = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(U)$ *şi cu* $- \otimes_E U : \mathrm{Mod}\text{-}E \to \mathcal{A}$ *adjunctul la stânga al functorului* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -) : \mathcal{A} \to \mathrm{Mod}\text{-}E$*. Atunci* U *este un generator dacă şi numai dacă functorul* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -)$ *este deplin fidel iar functorul* $- \otimes_E U$ *este exact. Dacă acesta este cazul,* $\mathrm{Ker}(- \otimes_E U)$ *este o subcategorie localizantă a categoriei* $\mathrm{Mod}\text{-}E$*, iar* $\mathcal{A}$ *este echivalentă cu* $\mathrm{Mod}\text{-}E/\mathrm{Ker}(- \otimes_E U)$*.*

Presupunem că $\mathcal{A}$ este o categorie Grothendieck, $\mathcal{T}$ este o subcategorie localizantă a lui $\mathcal{A}$ şi notăm $\mathcal{C} = \mathcal{A}/\mathcal{T}$. Uşor se constată că **a** aplică un generator al categoriei $\mathcal{A}$ într-unul al categoriei $\mathcal{C}$, ceea ce - împreună cu Propoziţia 1.2.2 - implică $\mathcal{C}$ este de asemenea Grothendieck. Mai este de notat că $\mathcal{T}$ este, în acest caz, localizantă exact atunci când ea este deasă şi închisă la sume directe din $\mathcal{A}$ ([63, Chapter 4, 7.4]).

O *teorie de torsiune* în categoria abeliană, local mică, completă şi cocompletă $\mathcal{A}$, este o pereche $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de clase de obiecte ale lui $\mathcal{A}$ atfel încât $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, F) = 0$ pentru orice $T \in \mathcal{T}$ şi orice $F \in \mathcal{F}$; $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, A) = 0$ pentru orice $T \in \mathcal{T}$ implică $A \in \mathcal{F}$ şi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, F) = 0$ pentru orice $F \in \mathcal{F}$ implică $A \in \mathcal{T}$. Atunci $\mathcal{T}$ se numeşte *clasă de torsiune*, iar $\mathcal{F}$ *clasă fără torsiune* în $\mathcal{A}$. Evident $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{0\}$. De remarcat că o clasă de obiecte din $\mathcal{A}$ este o clasă de torsiune pentru o anumită teorie de torsiune dacă şi numai dacă ea este închisă la imagini, sume directe şi extinderi ([72, Chapter VI, Proposition 2.1]). Dual, o clasă de obiecte este o clasă fără torsiune dacă şi numai dacă ea este închisă la subobiecte, produse şi extinderi ([72, Chapter VI, Proposition 2.2]). O teorie de torsiune, se numeşte - odată cu clasa sa de torsiune - *ereditară* dacă această clasă de torsiune este închisă, în plus, la subobiecte. Vom numi *clasă TTF* o clasă care este atât de torsiune cât şi fără torsiune. Evident, o clasă TTF este o clasă de torsiune ereditară, închisă la produse. O clasă de obiecte din $\mathcal{A}$ care este închisă numai la sume directe şi la câturi se numeşte *clasă de pretorsiune*.

Observaţia 1.2.8. Într-o categorie Grothendieck, conceptul de subcategorie localizantă coincide cu cel de clasă de torsiune ereditară; în lucrarea de faţă folosim termenul de clasă de torsiune ereditară atunci când avem în vedere numai clasa de obiecte, în vreme ce vorbim despre subcategorie localizantă atunci când prevalează punctul de vedere categorial. Remarcăm de asemenea că, în cazul categoriilor Grothendieck, condiţia ca un obiect să nu conţină subobiecte nenule care aparţin unei clase de torsiune ereditare - condiţie care apare în definiţia unui obiect închis - este echivalentă cu faptul că respectivul obiect este fără torsiune.

Numim *preradical* în categoria abeliană completă şi cocompletă $\mathcal{A}$, un subfunctor al functorului unitate, adică un functor $\mathbf{t} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ pentru care $\mathbf{t}(A) \leq A$ oricare ar fi $A \in \mathcal{A}$. Preradicalul $\mathbf{t}$ se zice *idempotent* dacă $\mathbf{t}^2 = \mathbf{t}$ şi se zice *radical* dacă $\mathbf{t}(A/\mathbf{t}(A)) = 0$ pentru orice $A \in \mathcal{A}$. De notat că există o corespondenţă bijectivă între clase de pretorsiune şi preradicali idempotenţi ([72, Chapter VI, Proposition 1.4]), care se restrânge la o corespondenţă de asemenea bijectivă între clase de torsiune şi radicali idempotenţi ([72, Chapter VI, Proposition 2.3]), respectiv între clase de torsiune ereditare şi radicali exacţi la stânga (necesar idempotenţi)([72, Chapter VI, Proposition 3.1]).

În finalul acestui paragraf, încă introductiv, vom reaminti câteva noţiuni de bază referitoare la grupuri şi inele topologice. Mai întâi, vom defini noţiunea de *filtru* într-o latice prin care vom înţelege o submulţime nevidă a acestei latici, închisă la intersecţii finite care satisface proprietatea că ea conţine, odată cu un element dat al laticii, orice element mai mare decât el. Se ştie că o topologie pe o mulţime dată poate fi introdusă în mai multe feluri [9, Chapitre I, §1]. Dintre acestea noi suntem interesaţi în mod deosebit de acela care se bazează pe vecinătăţile elementelor mulţimii respective. Vom spune atunci că un *spaţiu topologic* este o mulţime X, împreună cu o aplicaţie care asociază fiecărui element $x \in X$ câte un filtru $\mathcal{V}(x)$ pe laticea $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ a părţilor lui X - numit *sistemul de vecinătăţi* al punctului x - astfel încât orice $V \in \mathcal{V}(x)$ conţine elementul x şi satisface proprietatea că există $W \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V \in \mathcal{V}(y)$ oricare ar fi $y \in W$. Submulţimile deschise ale lui X, vor fi atunci acele submulţimi $D \subseteq X$ care satisfac $D \in \mathcal{V}(x)$ pentru orice $x \in D$. Un *sistem fundamental de vecinătăţi* al unul punct x aparţinând unui spaţiu topologic X este o submulţime $\mathcal{W}(x)$ a mulţimii $\mathcal{V}(x)$, cu proprietatea că pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$ există $W \in \mathcal{W}(x)$ astfel încât $W \subseteq V$.

Un grup abelian $(G, +)$ este numit *grup topologic* dacă este dată o topologie pe G astfel încât funcţiile

$$G \times G \to G,\ (g, g') \mapsto g + g' \text{ şi } G \to G,\ g \mapsto -g$$

sunt continue. Notăm că dacă $\mathcal{V}(0)$ este filtrul constituit din toate vecinătaţile originii unui grup topologic $(G, +)$, atunci $V \in \mathcal{V}(0)$ implică $-V \in \mathcal{V}(0)$ şi pentru orice $V \in \mathcal{V}(0)$ există

$W \in \mathcal{V}(0)$ astfel încât $W + W \subseteq V$. Observăm de asemenea că, dacă avem un grup abelian G, pentru a da o topologie pe G, astfel încât el să devină topologic, este suficient să dăm numai filtrul $\mathcal{V}(0)$ satisfăcând condiţiile de mai sus, rezultând atunci imediat vecinătăţile oricărui punct $g \in G$, şi anume $\mathcal{V}(g) = \{g + V \mid V \in \mathcal{V}(0)\}$ (vezi [72, Chapter VI, §4]).

Un *inel topologic* este un inel S, pe care s-a introdus o topologie aşa încât grupul $(S, +)$ este unul topologic iar funcţia

$$S \times S \to S, \ (s, s') \mapsto ss'$$

este una continuă. Un *inel linear topologic* (la dreapta) este un inel topologic care are un sistem fundamental de vecinătăţi ale originii format din ideale (drepte).

Fie acum S un inel cu unitate, Mod- S categoria S-modulelor la dreapta peste S şi $(\mathcal{L}_S(S), \leq)$ laticea idealelor drepte ale inelului S. Cu scopul de a caracteriza structurile de inel linear topologic pe S, definim mai întâi *anulatorul* (la dreapta) al unui element x al unui S-modul M prin $\mathrm{ann}_R(x) = \{a \in S \mid xa = 0\}$. Dacă $I \leq S$ este un ideal drept al lui S, iar $a \in S$, atunci notăm $(I : a) = \mathrm{ann}_R(a + I)$. O structură de inel topologic linear pe S este unic determinată de mulţimea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}_S(S)$ a tuturor idealelor drepte deschise - pe care o vom numi *topologie liniară* (la dreapta) pe S - mulţime care este un filtru pe laticea $\mathcal{L}_S(S)$, astfel încât $(I : a) \in \mathcal{G}$ pentru orice $I \in \mathcal{G}$ şi orice $a \in S$ [72, Chapter VI, §4]. O topologie liniară $\mathcal{G}$ pe S va fi numită *topologie Gabriel* dacă, în plus, un ideal drept I al lui S aparţine lui $\mathcal{G}$ ori de câte ori există $I' \in \mathcal{G}$ astfel încât $(I : a) \in \mathcal{G}$ pentru orice $a \in I'$. Este binecunoscut că există o corespondenţă bijectivă între topologii lineare pe S şi clase de pretorsiune ereditare în Mod- S [72, Chapter VI, Proposition 4.2], dată de

$$\mathcal{G} \mapsto \mathcal{T}(\mathcal{G}) = \{M \in \text{Mod-}\, S \mid \mathrm{ann}_R(m) \in \mathcal{G} \text{ pentru orice } m \in M\},$$

respectiv

$$\mathcal{T} \mapsto \mathcal{G}(\mathcal{T}) = \{I \in \mathcal{L}_S(S) \mid S/I \in \mathcal{T}\}.$$

Mai mult, acesta se restrânge la o corespondenţă, de asemenea bijectivă, între topologii Gabriel şi clase de torsiune ereditare [72, Chapter VI, Theorem 5.1].

Observaţia 1.2.9. Dacă S este un progenerator (adică un generator proiectiv, finit generat) al categoriei Grotendieck $\mathcal{B}$ atunci $\mathcal{B}$ este echivalentă, conform teoremei Morita, cu Mod- $\mathrm{End}_{\mathcal{B}}(S)$. Aşadar consideraţiile de mai sus referitoare la corespondenţa dintre clase de pretorsiune ereditare în $\mathcal{B}$ şi topologii liniare pe S se păstrează şi în acest caz.

Dacă $\mathcal{G}$ este o topologie Gabriel pe un inel S, iar $\mathbf{t} : \text{Mod-}S \to \text{Mod-}S$ este radicalul exact la stânga coresunzător teoriei de torsiune ereditară asociată cu $\mathcal{G}$, atunci

$$S_{\mathcal{G}} = \varinjlim_{I \in \mathcal{G}} \text{Hom}_S(I, S/\mathbf{t}(S))$$

este un inel, numit *inelul de câturi* a lui S în raport cu topologia $\mathcal{G}$. Asemănător, pentru $M \in \text{Mod-}S$ definim

$$M_{\mathcal{G}} = \varinjlim_{I \in \mathcal{G}} \text{Hom}_S(I, M/\mathbf{t}(M))$$

şi observăm că $M_{\mathcal{G}}$ poate fi privit atât ca S cât şi ca $S_{\mathcal{G}}$-modul. Un modul $M \in \text{Mod-}S$ este închis relativ la teoria de torsiune ereditară asociată cu $\mathcal{G}$, sau simplu $\mathcal{G}$-închis, exact atunci când $M \cong M_{\mathcal{G}}$. Vom nota cu Mod-$(S, \mathcal{G})$ subcategoria plină a categoriei Mod-S, formată din S-modulele $\mathcal{G}$-închise. În final, vom înregistra următorul rezultat, notaţiile fiind cele folosite mai sus:

Propoziţia 1.2.10. *[72, Chapter IX, Corollary 1.10] Există o echivalenţă de categorii între subcategoria plină a categoriei* Mod-$S_{\mathcal{G}}$ *care conţine modulele de forma* $M_{\mathcal{G}}$ *şi categoria* Mod-$(S, \mathcal{G})$.

1.3 Subcategorii induse de o pereche de functori adjuncţi

Fie U un obiect al unei categorii abeliene complete şi cocomplete $\mathcal{A}$. Un obiect $A \in \mathcal{A}$ se numeşte U*-generat*, respectiv U*-prezentat*, dacă există un şir exact de forma $U^{(\Lambda)} \to A \to 0$, respectiv $U^{(\Lambda')} \to U^{(\Lambda)} \to A \to 0$, unde Λ şi Λ' sunt două mulţimi. Dual dacă Q este un obiect al unei categorii abeliene complete şi cocomplete $\mathcal{B}$, atunci un obiect $B \in \mathcal{B}$ se zice Q*-cogenerat*, respectiv Q*-coprezentat*, dacă există un şir exact de forma $0 \to B \to Q^{\Lambda}$, respectiv $0 \to B \to Q^{\Lambda} \to Q^{\Lambda'}$. În plus, un obiect $A \in \mathcal{A}$ se va numi U*-subgenerat* dacă el este izomorf unui subobiect al unui obiect U-generat. De notat că un object $A \in \mathcal{A}$ este U-prezentat dacă şi numai dacă există un şir scurt exact $0 \to K \to U^{(\Lambda)} \to A \to 0$ cu $K \in \text{Gen}[U]$.

Considerăm acum pereche de functori adjuncţi

$$\mathcal{A} \underset{\mathbf{L}}{\overset{\mathbf{R}}{\rightleftarrows}} \mathcal{B},$$

împreună cu morfismele functoriale $u : \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \to \mathbf{RL}$ şi $v : \mathbf{LR} \to \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$, unde $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sunt două categorii abeliene complete şi cocomplete. Presupunem că există un generator S al categoriei $\mathcal{B}$, un cogenerator Q' al categoriei $\mathcal{B}$ şi punem $U = \mathbf{L}(S) \in \mathcal{A}$, $Q = \mathbf{R}(Q')$. Definim atunci următoarele subcategorii pline ale categoriei $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{Stat}(\mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{A} \mid v_A \text{ este un izomorfism}\};$$

$$\mathbf{L}(\mathcal{B}) = \{A \in \mathcal{A} \mid \text{ există } B \in \mathcal{B} \text{ astfel încât } A \cong \mathbf{L}(B)\};$$

$$\mathrm{Pres}[U] = \{A \in \mathcal{A} \mid A \text{ este } U \text{ prezentat}\};$$

$$\mathrm{Gen}[U] = \{A \in \mathcal{A} \mid A \text{ este } U \text{ generat}\};$$

$$\boldsymbol{\sigma}[U] = \{A \in \mathcal{A} \mid A \text{ este } U \text{ subgenerat}\}.$$

Vom defini de asemenea subcategoriile pline ale categoriei $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Adst}(\mathbf{R}) = \{B \in \mathcal{B} \mid u_B \text{ este un izomorfism}\};$$

$$\mathbf{R}(\mathcal{A}) = \{B \in \mathcal{B} \mid \text{ există } A \in \mathcal{A} \text{ astfel încât } B \cong \mathbf{R}(A)\};$$

$$\mathrm{Cop}[Q] = \{B \in \mathcal{B} \mid B \text{ este } Q \text{ coprezentat}\};$$

$$\mathrm{Cog}[Q] = \{B \in \mathcal{B} \mid B \text{ este } Q \text{ cogenerat}\}.$$

Se observă imediat că avem incluziunile

$$\mathrm{Stat}(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{Pres}[U] \subseteq \mathrm{Gen}[U] \subseteq \boldsymbol{\sigma}[U] \subseteq \mathcal{A},$$

$$\mathrm{Adst}(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{R}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Cop}[Q] \subseteq \mathrm{Cog}[Q] \subseteq \mathcal{B}.$$

Obiectele subcategoriilor $\mathrm{Stat}(\mathbf{R})$ şi $\mathrm{Adst}(\mathbf{R})$ vor fi numite $\mathbf{R}$-*statice*, respectiv $\mathbf{R}$-*adstatice*, iar chiar definiţia acestor subcategorii arată că $\mathbf{R}$ şi $\mathbf{L}$ induc o echivalenţă

$$\mathrm{Stat}(\mathbf{R}) \underset{\mathbf{L}}{\overset{\mathbf{R}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Adst}(\mathbf{R}).$$

Mai mult, $\mathrm{Stat}(\mathbf{R})$ şi $\mathrm{Adst}(\mathbf{R})$ sunt cele mai mari subcategorii ale categoriilor $\mathcal{A}$, respectiv $\mathcal{B}$, între care functorii de mai sus induc o echivalenţă.

Să observăm acum că $\mathrm{Gen}[U]$ este închisă la câturi şi sume directe în $\mathcal{A}$, altfel spus, ea este o clasă de pretorsiune. În consecinţă, pentru un obiect dat $A \in \mathcal{A}$, există un cel mai mare subobiect care aparţine clasei $\mathrm{Gen}[U]$, şi anume $\mathrm{Tr}_U(A) = \sum\{A' \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(A) \mid A' \in \mathrm{Gen}[U]\}$, numit *urma* lui U în A. Am obţinut astfel un preradical idempotent $\mathrm{Tr}_U : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (vezi [72, Chapter VI, Proposition 1.4]). Bineînţeles, un obiect $A \in \mathcal{A}$ este U-generat dacă şi numai dacă $A = \mathrm{Tr}_U(A)$.

Lema 1.3.1. *Pentru orice $A \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Tr}_U(A) = \sum\{\mathrm{im}\, f \mid f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, A)\}$.*

Demonstraţie. Dacă $f : U \to A$, atunci $\mathrm{im}\, f \in \mathrm{Gen}[U]$, de unde $\mathrm{im}\, f \leq \mathrm{Tr}_U(A)$. În consecinţă $\sum\{\mathrm{im}\, f \mid f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, A)\} \leq \mathrm{Tr}_U(A)$.

Pe de altă parte $\mathrm{Tr}_U(A) \in \mathrm{Gen}[U]$, deci există un epimorfism $\alpha : U^{(\Lambda)} \to \mathrm{Tr}_U(A)$. Atunci $\mathrm{Tr}_U(A) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{im}(\alpha q_\lambda)$, unde $q_\lambda : U \to U^{(\Lambda)}$, $\lambda \in \Lambda$ sunt incluziunile canonice. Aşadar este valabilă de asemenea relaţia $\mathrm{Tr}_U(A) \leq \sum\{\mathrm{im}\, f \mid f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, A)\}$. $\square$

Pentru o mai uşoară referinţă, vom da aici fără demonstraţie două rezultate preluate din lucrarea [13]:

Lema 1.3.2. *[13, Lemma1.4]*

(a) Dacă $U^{(\Lambda)}$ este $\mathbf{R}$-static pentru orice mulţime Λ, atunci $\mathbf{L}(\mathcal{B}) = \mathrm{Pres}[U]$, iar v_A este un epimorfism pentru orice $A \in \mathcal{A}$.

(b) Dacă Q^Λ este $\mathbf{R}$-adstatic pentru orice mulţime Λ, atunci $\mathbf{R}(\mathcal{A}) = \mathrm{Cop}[Q]$, iar u_B este un monomorfism pentru orice $B \in \mathcal{B}$.

Teorema 1.3.3. *[13, Theorem 1.6] Cu notaţiile de mai sus următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\mathbf{R}(\mathcal{A}) = \mathrm{Adst}(\mathbf{R})$.

(ii) $\mathbf{L}(\mathcal{B}) = \mathrm{Stat}(\mathbf{R})$.

(iii) $\mathbf{R}(\ker v_A) = 0$ *pentru orice* $A \in \mathcal{A}$.

(iv) $\mathbf{L}(\mathrm{coker}\, u_B) = 0$ *pentru orice* $B \in \mathcal{B}$.

(v) $\mathrm{Pres}[U] = \mathrm{Stat}(\mathbf{R})$.

(vi) $\mathrm{Cop}[Q] = \mathrm{Adst}(\mathbf{R})$.

(vii) $\mathbf{R} : \mathrm{Pres}[U] \to \mathrm{Cop}[Q]$ *este o echivalenţă de categorii cu inversa* $\mathbf{L}$.

Lema 1.3.4. *Păstrând pe mai departe notaţiile şi asumpţiile făcute în această secţiune, avem:*

(a) $\mathbf{R}(\operatorname{im} v_A) \cong \mathbf{R}(A)$ *pentru orice* $A \in \mathcal{A}$*, iar* $\operatorname{im} v_A$ *este cel mai mic subobiect al lui* A *care satisface această proprietate.*

(b) $\operatorname{im} v_A \in \operatorname{Gen}[U]$ *pentru orice* $A \in \mathcal{A}$*, iar*

$$\{A \in \mathcal{A} \mid v_A \textit{ este un epimorfism}\} \subseteq \operatorname{Gen}[U].$$

Demonstraţie. (a) Fie A un obiect al categoriei $\mathcal{A}$. Factorizarea morfismului v_A prin imaginea sa conduce la o diagramă comutativă cu linia exactă

$$\begin{tikzcd} & & \mathbf{LR}(A) \arrow[dl] \arrow[d, "v_A"] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{im} \rho_A \arrow[r] & A. \end{tikzcd}$$

Mai departe, aceasta induce o factorizare

$$\mathbf{RLR}(A) \xrightarrow{\mathbf{R}(v_A)} \mathbf{R}(A) = \mathbf{RLR}(A) \to \mathbf{R}(\operatorname{im} v_A) \to \mathbf{R}(A),$$

unde $\mathbf{R}(\operatorname{im} v_A) \to \mathbf{R}(A)$ este un monomorfism, deoarece $\mathbf{R}$ exact la stânga. Dar $\mathbf{R}(v_A)$ este un epimorfism, aşadar $\mathbf{R}(\operatorname{im} v_A) \to \mathbf{R}(A)$ este de asemenea un epimorfism, deci un izomorfism.

Fie acum A' un subobject al lui A. Dacă $\operatorname{im} v_A \leq A'$, atunci exactitatea la stânga a functorului $\mathbf{R}$ implică $\mathbf{R}(\operatorname{im} v_A) \leq \mathbf{R}(A') \leq \mathbf{R}(A)$, aşadar $\mathbf{R}(A') \cong \mathbf{R}(A)$. Reciproc, dacă $\mathbf{R}(A') \cong \mathbf{R}(A)$, atunci diagrama comutativă cu linia de jos exactă

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{LR}(A') \arrow[r, equal] \arrow[d, "v_{A'}"] & \mathbf{LR}(A) \arrow[d, "v_A"] \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

arată că v_A factorizează prin A', sau echivalent, $\operatorname{im} v_A \leq A'$.

(b) Afirmaţia este imediată, deoarece $\mathbf{LR}(A) \in \operatorname{Gen}[U]$ pentru orice $A \in \mathcal{A}$, iar $\operatorname{Gen}[U]$ este, în mod evident, închisă la câturi. $\square$

Lema 1.3.5. *Următoarele condiţii sunt echivalente, pentru pereche de functori adjuncţi* $(\mathbf{R}, \mathbf{L})$*:*

(i) $\operatorname{im} v_A = \operatorname{Tr}_U(A)$ *pentru orice* $A \in \mathcal{A}$*.*

(ii) $\{A \in \mathcal{A} \mid v_A$ *este un epimorfism*$\} = \mathrm{Gen}[U]$.

Demonstraţie. (i)$\Rightarrow$(ii). Aşa cum am văzut în Lema 1.3.4, este suficient să demonstrăm incluziunea clasei $\mathrm{Gen}[U]$ în clasa $\{A \in \mathcal{A} \mid v_A$ este un epimorfism$\}$. Dar, cu ipoteză de la (i), această incluziune este imediată, deoarece $A \in \mathrm{Gen}[U]$ dacă şi numai dacă $A = \mathrm{Tr}_U(A)$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Punem $A' = \mathrm{Tr}_U(A)$. Atunci $v_{A'}$ este un epimorfism, şi $\mathrm{im}\, v_A \leq A'$. Diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{LR}(A') \arrow[r] \arrow[d, "v_{A'}"] & \mathbf{LR}(A) \arrow[d, "v_A"] \arrow[dl] \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

arată că $\mathbf{LR}(A) \to A'$ este un epimorfism, de unde $A' = \mathrm{im}\, v_A$. $\square$

Propoziţia 1.3.6. *Cu notaţiile de mai sus, presupunem că este satisfăcută relaţia* $\mathrm{Pres}[U] = \mathrm{Stat}(\mathbf{R})$. *Atunci:*

(a) $u_{\mathbf{R}(A)}, \mathbf{R}(v_A), \mathbf{L}(u_B), v_{\mathbf{L}(B)}$ *sunt izomorfisme pentru orice obiecte* $A \in \mathcal{A}$ *şi* $B \in \mathcal{B}$.

(b) $\mathrm{Pres}[U]$ *este o subcategorie reflectivă a categoriei* $\mathcal{A}$*, cu reflectorul* $\mathbf{LR}$.

(c) $\mathbf{R}(\mathcal{A})$ *este o subcategorie coreflectivă a categoriei* $\mathcal{A}$*, cu coreflectorul* $\mathbf{RL}$.

Demonstraţie. În conformitate cu Teorema 1.3.3, ipoteza $\mathrm{Pres}[U] = \mathrm{Stat}(\mathbf{R})$ este echivalentă cu $\mathbf{R}(\mathcal{A}) = \mathrm{Adst}(\mathbf{R})$.

(a) Fie $A \in \mathcal{A}$. Atunci $\mathbf{R}(A) \in \mathbf{R}(\mathcal{A})$, deci $u_{\mathbf{R}(A)}$ este un izomorfism şi $\mathbf{R}(v_A) = u^{-1}_{\mathbf{R}(A)}$. Deoarece $\mathbf{L}(\mathcal{B}) \in \mathrm{Pres}[U]$, ceea ce a rămas poate fi dedus în mod dual.

(b) Considerăm obiectele $A \in \mathrm{Pres}[U]$ şi $A' \in \mathcal{A}$. Folosind adjuncţia dintre $\mathbf{R}$ şi $\mathbf{L}$, precum şi cele demonstrate la punctul (a), deducem izomorfismele naturale

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \mathbf{LR}(A')) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{LR}(A), \mathbf{LR}(A')) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathbf{R}(A), \mathbf{RLR}(A')) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathbf{R}(A), \mathbf{R}(A')),$$

respectiv

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A') \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{LR}(A), A') \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathbf{R}(A), \mathbf{R}(A')).$$

În consecinţă $\mathbf{LR}$ este adjunctul la dreapta al functorului incluziune al subcategoriei $\mathrm{Pres}[U]$ în $\mathcal{A}$.

(c) Argumentul este dual celui de la (b). $\square$

1.4 Teoria de torsiune în $\mathcal{A}$ asociată cu U

Despre o teorie de torsiune $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ într-o categorie abeliană completă şi cocompletă, local mică $\mathcal{A}$, spunem că este *generată* de o clasă de obiecte $\mathcal{O}$ ale categoriei $\mathcal{A}$ dacă

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{A} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, F) = 0 \text{ pentru orice } A \in \mathcal{O}\}$$

$$\mathcal{T} = \{T \in \mathcal{A} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, F) = 0 \text{ pentru orice } F \in \mathcal{F}\}.$$

Este clar că $\mathcal{T}$ este cea mai mică clasă de torsiune care conţine clasa $\mathcal{O}$.

Fie U un obiect al categoriei Grothendieck $\mathcal{A}$. Considerăm clasa de obiecte $\{A/\operatorname{Tr}_U(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ ale lui $\mathcal{A}$ şi teoria de torsiune generată de această clasă, pe care o vom nota $(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}})$.

Lema 1.4.1. *Teoria de torsiune $(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}})$ este ereditară.*

Demonstraţie. Să observăm mai întâi că un subobiect al unui obiect de forma $A/\operatorname{Tr}_U(A)$ cu $A \in \mathcal{A}$ este tot de această formă, cu alte cuvinte clasa $\{A/\operatorname{Tr}_U(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ este închisă la subobiecte. Într-adevăr, un subobiect al lui $A/\operatorname{Tr}_U(A)$ este de forma $A'/\operatorname{Tr}_U(A)$, unde $\operatorname{Tr}_U(A) \leq A' \leq A$. Este clar că cel mai mare subobiect U-generat al lui A' este $\operatorname{Tr}_U(A)$, deci $\operatorname{Tr}_U(A') = \operatorname{Tr}_U(A)$ şi $A'/\operatorname{Tr}_U(A) = A'/\operatorname{Tr}_U(A')$.

Fie acum $F \in \mathcal{F}_A$, $A \in \mathcal{A}$ şi notăm cu $\overline{F}$ anvelopa injectivă a lui F. Considerăm un morfism $f : A/\operatorname{Tr}_U(A) \to \overline{F}$. Construim diagrama comutativă cu linii exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, equal] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{im} f \cap F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A/\operatorname{Tr}_U(A) \arrow[r] & \operatorname{im} f \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

unde $A' = \ker f$, iar al doilea pătrat este un produs fibrat. Atunci lema ker-coker ne asigură că A'' este un subobiect al lui $A/\operatorname{Tr}_U(A)$, deci $A'' \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ după cum am văzut mai sus. Mai departe, $\operatorname{im} f \cap F$ aparţine şi el clasei $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, fiind un obiect cât al lui A''. Pe de altă parte $\operatorname{im} f \cap F \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ întrucât $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ şi $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ este închisă la subobiecte, aşadar $\operatorname{im} f \cap F = 0$. În sfârşit $\operatorname{im} f = 0$, sau echivalent $f = 0$, deoarece F este un subobiect esenţial al lui $\overline{F}$. Din chiar definiţia clasei $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, rezultă $\overline{F} \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Am demonstrat astfel că $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ este închisă la învelitori injective, ceea ce este echivalent, conform [72, Chapter VI, Proposition 3.2], cu faptul că $(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}})$ este ereditară. $\square$

Un obiect $A \in \mathcal{A}$ este numit *distins din punctul de vedere al lui U*, sau simplu *U-distins* dacă pentru orice morfism nenul $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A', A)$, există un morfism $h \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U, A')$ aşa încât $fh \neq 0$.

Lema 1.4.2. *[29, Proposition 1.1] Un obiect aparţine clasei fără torsiune $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ exact atunci când el este U-distins.*

Demonstraţie. Dacă $A \in \mathcal{A}$ nu aparţine clasei $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, atunci există $A' \in \mathcal{A}$ astfel încât $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A'/\operatorname{Tr}_U(A'), A) \neq 0$. Compunem un morfism nenul $A'/\operatorname{Tr}_U(A') \to A$ cu proiecţia canonică $A' \to A'/\operatorname{Tr}_U(A')$, pentru a obţine un morfism $0 \neq f : A' \to A$, pentru care $\operatorname{Tr}_U(A') \leq \ker f$. Atunci, pentru orice $h \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U, A')$ avem $\operatorname{im} h \in \operatorname{Tr}_U(A)$, aşadar $fh = 0$.

Reciproc, fie $A \in \mathcal{A}$ pentru care există un morfism nenul $f : A' \to A$, aşa încât $fh = 0$ pentru orice $h : U \to A'$. Folosind Lema 1.3.1, rezultă imediat $\operatorname{Tr}_U(A') \leq \ker f$, ceea ce dă un morfism nenul $A'/\operatorname{Tr}_U(A') \to A$, deci A nu aparţine clasei $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. □

În această secţiune, păstrăm notaţiile şi ipotezele făcute în precedenta, şi anume $\mathbf{R} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este adjunctul la dreapta al lui $\mathbf{L}$, u şi v fiind unitatea, respectiv counitatea de adjuncţie, S este un generator al categoriei $\mathcal{B}$, iar $U = \mathbf{L}(S)$. Presupunem în plus categoriile $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ ca fiind Grothendieck, aşadar local mici. Precizăm de altfel că acestea vor fi de acum ipotezele de lucru pe tot parcursul acestei lucrări. Vom căuta în cele ce urmează condiţii de valabilitate a egalitatăţii $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \operatorname{Ker} \mathbf{R}$, care va juca un rol important pe parcursul întregii lucrări. Un prim pas este dat de:

Lema 1.4.3. $\operatorname{Ker} \mathbf{R} = \operatorname{Ker} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.

Demonstraţie. Pentru orice $A \in \mathcal{A}$, izomorfismul natural $\operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(S, \mathbf{R}(A)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U, A)$, arată că $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U, A) = 0$ dacă şi numai dacă $\mathbf{R}(A) = 0$, deoarece S este un generator pentru $\mathcal{B}$. Mai departe, fie $T \in \operatorname{Ker} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -)$ şi $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Cum F este U-distins, obţinem $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(T, F) = 0$, ceea ce implică $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. În concluzie $\operatorname{Ker} \mathbf{R} = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ exact atunci când $\operatorname{Ker} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -) = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. □

Folosind aceeaşi terminologie ca şi [31], numim *obiect CQF-3* un obiect U al unei categorii Grothendieck $\mathcal{A}$, care satisface condiţia $\operatorname{Ker} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -) = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Observăm că Lema 1.4.3

ne spune atunci că U este CQF-3 exact atunci când $\operatorname{Ker}\mathbf{R} = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Mai notăm de asemenea următorul rezultat referitor la relaţia dintre aceste clase, şi anume:

Lema 1.4.4. *(a)* $\operatorname{Ker}\mathbf{R} = \{T \in \mathcal{A} \mid \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A,T) = 0$ *pentru orice* $A \in \operatorname{Gen}[U]\}$.

(b) Dacă $\operatorname{Ker}\mathbf{R}$ *este o clasă de torsiune şi* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U, A/\operatorname{Tr}_U(A)) = 0$ *pentru orice* $A \in \mathcal{A}$, *atunci* U *este un obiect CQF-3 al categoriei* $\mathcal{A}$.

Demonstraţie. (a) Incluziunea clasei $\{T \in \mathcal{A} \mid \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A,T) = 0,$ pentru orice $A \in \operatorname{Gen}[U]\}$ în clasa $\operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U,-)$ este evidentă. Pentru a proba incluziunea inversă, fie $T \in \mathcal{A}$ aşa încât $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U,T) = 0$ şi fie A un obiect din $\operatorname{Gen}[U]$. Atunci există un epimorfism $h : U^{(\Lambda)} \to A$, cu Λ o mulţime convenabilă, şi vom considera injecţiile canonice $q_\lambda : U \to U^{(\Lambda)}, \lambda \in \Lambda$. Dacă $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A,T)$, atunci $fhq_\lambda = 0$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$, deci $fh = 0$, ceea ce implică $f = 0$, h fiind un epimorfism. Aşadar $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A,T) = 0$.

(b) Vom arăta egalitatea, echivalentă cu concluzia,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \{F \in \mathcal{A} \mid \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(T,F) = 0 \text{ pentru orice } T \in \operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U,-)\}.$$

Deoarece $\operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U,-) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, conform Lemei 1.4.3, incluziunea clasei $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ în clasa dată în partea dreaptă a egalităţii de mai sus este valabilă întotdeauna. Reciproc, clasa $\{A/\operatorname{Tr}_U(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$, care generează teoria de torsiune $(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}})$ este conţinută, din ipoteză, în clasa de torsiune $\operatorname{Ker}\mathbf{R} = \operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U,-)$. $\square$

Construim categoria cât $\mathcal{C} = \mathcal{A}/\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ cu functorii canonici

$$\mathcal{A} \underset{\mathbf{i}}{\overset{\mathbf{a}}{\rightleftarrows}} \mathcal{C},$$

unde $\mathbf{a}$ este exact, $\mathbf{i}$ este un adjunct le dreapta deplin fidel pentru $\mathbf{a}$, iar $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \operatorname{Ker}\mathbf{a}$. Vom nota cu

$$\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \to \mathbf{ia} \text{ şi } \ \delta : \mathbf{ai} \to \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$$

unitatea şi counitatea adjuncţiei dintre $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{i}$. Atunci δ este un izomorfism natural, iar η_A are nucleul şi conucleul de torsiune, relativ la teoriile de torsiune din $\mathcal{A}$, pentru orice $A \in \mathcal{A}$ aşa cum am văzut în Propoziţia 1.2.5.

Ca de obicei, identificăm $\mathcal{C}$ subcategoria plină a categoriei $\mathcal{A}$ având ca obiecte pe cele $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$-închise. Cu această identificare, functorul $\mathbf{i}$ devine incluziunea $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$.

Lema 1.4.5. *[31, Lemma 1.3] Cu notaţiile de mai sus* $\mathbf{a}(U)$ *este un generator al categoriei* $\mathcal{C}$.

Demonstraţie. Considerăm un obiect $A \in \mathcal{A}$. Fie $\Lambda = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, A)$, $q_\lambda : U \to U^{(\Lambda)}$ incluziunile canonice şi $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U^{(\Lambda)}, A)$ unicul morfism care face comutative toate diagramele de forma

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "q_\lambda"] \arrow[dr, "\lambda"'] & U^{(\Lambda)} \arrow[d, "f"] \\ & A \end{tikzcd}$$

cu $\lambda \in \Lambda$. Aplicând Lema 1.3.1 deducem $\operatorname{im} f = \mathrm{Tr}_U(A)$, de unde $\operatorname{coker} f = A/\mathrm{Tr}_U(A) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Mai departe, $\mathbf{a}(f) : \mathbf{a}(U^{(\Lambda)}) \to \mathbf{a}(A)$ este un epimorfism în $\mathcal{C}$, functorul $\mathbf{a}$ fiind exact. Cum $\mathbf{a}$ comută cu sumele directe, afirmaţia din enunţ este demonstrată. □

În finalul acestei secţiuni vom discuta despre cazul în care $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ este o clasă TTF. Notăm atunci cu $\mathcal{S}$ clasa de torsiune corespunzătoare când vedem pe $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ ca fiind clasă fără torsiune, şi cu $\mathbf{s} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ radicalul idempotent asociat. Considerăm de asemenea subcategoria plină a categoriei $\mathcal{A}$ formată cu acele obiecte care aparţin simultan claselor $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ şi $\mathcal{S}$, şi o vom nota

$$\mathrm{GF}[U] = \{A \in \mathcal{A} \mid A \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \text{ şi } A \in \mathcal{S}\}.$$

Propoziţia 1.4.6. *[31, Proposition 2.1] În condiţiile de mai sus, există echivalenţele de categorii inverse una celeilalte*

$$\mathcal{C} \to \mathrm{GF}[U], C \mapsto \mathbf{s}(C) \text{ şi } \mathrm{GF}[U] \to \mathcal{C}, A \mapsto \mathbf{a}(A).$$

Un obiect U al unei categorii Grothendieck se zice *auto-pseudoproiectiv*, dacă $\mathrm{Gen}[U]$ este o clasă de torsiune, cu alte cuvinte ea este închisă şi la extinderi (vezi [76, paragraful 3.2]). Atunci, $\operatorname{Ker}\mathbf{R}$ este chiar clasa fără torsiune corespunzătoare, după cum afirmă Lema 1.4.4 (a), deci $\operatorname{Ker}\mathbf{R}$ este o clasă TTF. Mai mult, conform [72, Chapter VI, Proposition 2.3], preradicalul corespondent Tr_U este un radical, deci $\mathrm{Tr}_U(A/\mathrm{Tr}_U(A)) = 0$ pentru orice $A \in \mathcal{A}$. Prin urmare $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, A/\mathrm{Tr}_U(A)) = 0$, iar din Lema 1.4.4 (b) deducem faptul că U este un obiect CQF-3 al categoriei $\mathcal{A}$. În plus, folosind notaţiile de mai sus, $\mathcal{S} = \mathrm{Gen}[U]$, deci $\mathbf{s} = \mathrm{Tr}_U$ şi categoria $\mathrm{GF}[U]$ conţine exact acele obiecte din $\mathcal{A}$ care sunt atât U-generate cât şi U-distinse.

Observaţia 1.4.7. Dacă U este proiectiv în $\mathcal{A}$, atunci el este, în mod evident, şi auto-pseudoproiectiv, deci U este CQF-3, aşa cum am văzut mai înainte.

Observaţia 1.4.8. Înlocuind în cele discutate în Observaţia 1.4.7 categoria $\mathcal{A}$ cu categoria Grothendieck $\boldsymbol{\sigma}[U]$ – aşa cum vom face deseori în capitolul al doilea al acestei teze – putem să folosim condiţii mai slabe, şi anume U trebuie presupus numai proiectiv în $\boldsymbol{\sigma}[U]$ în loc de proiectiv. Desigur, în acest caz $(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}})$ este o teorie de torsiune în $\boldsymbol{\sigma}[U]$. Peste tot în acest capitol vom avea în vedere posibilitatea acestei înlocuiri, a categoriei $\mathcal{A}$ cu $\boldsymbol{\sigma}[U]$.

1.5 Teoria de torsiune în $\mathcal{B}$

Propoziţia 1.5.1. *Presupunem că, pentru orice monomorfism g al categoriei $\mathcal{B}$,* $\ker \mathbf{L}(g)$ *aparţine clasei $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Atunci*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{B \in \mathcal{B} \mid \mathbf{L}(B) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}\}$$

este o clasă de torsiune ereditară de obiecte ale lui $\mathcal{B}$.

Demonstraţie. Fără nici o presupunere suplimentară se verifică imediat că $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ este închisă la câturi, extinderi şi sume directe, adică ea este o clasă de torsiune. Mai departe, dacă $g : B' \to B$ este un monomorfism în $\mathcal{B}$ cu $B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, atunci $\ker \mathbf{L}(g)$ şi $\operatorname{im} \mathbf{L}(g)$ sunt obiecte ale clasei $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Atunci şirul scurt exact $0 \to \ker \mathbf{L}(g) \to \mathbf{L}(B') \to \operatorname{im} \mathbf{L}(g) \to 0$ arată că $\mathbf{L}(B') \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, deci $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ este ereditară. $\square$

Observaţia 1.5.2. Ipoteza $\operatorname{Ker} \mathbf{L}(g)$ să fie de torsiune în $\mathcal{A}$, pentru orice monomorfism g al lui $\mathcal{B}$ este - alături de condiţia $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \operatorname{Ker} \mathbf{R}$ - una foarte importantă în acest capitol. Dacă pentru egalitatea dintre $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ şi $\operatorname{Ker} \mathbf{R}$ am găsit condiţii de valabilitate destul de generale, de data aceasta pare să fie mult mai dificil să găsim aşa ceva, dacă nu considerăm cazuri particulare, cum vom face în capitolul al doilea.

Cu presupunerea $\operatorname{Ker} \mathbf{L}(g) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ pentru orice monomorfism g în $\mathcal{B}$, putem construi de asemenea categoria cât $\mathcal{D} = \mathcal{B}/\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ cu functorii canonici

$$\mathcal{B} \underset{\mathbf{j}}{\overset{\mathbf{b}}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}\,.$$

Şi în acest caz $\mathbf{b}$ este exact, $\mathbf{j}$ un adjunct deplin fidel pentru $\mathbf{b}$ şi $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \operatorname{Ker} \mathbf{b}$. Ca şi în cazul categoriei $\mathcal{C}$, vom identifica $\mathcal{D}$ cu subcategoria plină a categoriei $\mathcal{B}$ constituită din obiectele $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-închise, functorul $\mathbf{j}$ fiind atunci incluziunea $\mathcal{D} \to \mathcal{B}$.

Mai menţionăm existenţa radicalilor exacţi la stânga (necesar idempotenţi) $\mathbf{t}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ şi $\mathbf{t}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, corepunzători claselor de torsiune $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, respectiv $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. De asemenea vom nota cu $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ clasa fără torsiune corespunzătoare clasei $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Observaţia 1.5.3. Condiţia $\operatorname{Ker} \mathbf{L}(g) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ pentru orice monomorfism g în $\mathcal{B}$ este echivalentă, în mod evident, exactităţii (la stânga) a functorului $\mathbf{aL} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. In plus, ea implică $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \operatorname{Ker} \mathbf{aL}$.

Fie $\mathcal{B}$ o categorie Grothendieck cu un generator S şi fie $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}, \mathcal{F}_{\mathcal{B}})$ clasă de torsiune ereditară în $\mathcal{B}$. Definim $\mathcal{G} = \{I \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(S) \mid S/I \in \mathcal{T}\}$. Folosind argumente standard, ca în [72, Chapter VI, Proposition 4.2], putem vedea că $\mathcal{G}$ este un filtru pe laticea $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(S)$ a subobiectelor lui S.

Lema 1.5.4. *(a) Orice obiect de torsiune $B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ poate fi exprimat ca limita directă a unei familii de subobiecte $\{B_\lambda \leq B \mid \lambda \in \Lambda\}$, astfel încât pentru orice $\lambda \in \Lambda$ există $I_\lambda \in \mathcal{G}$ cu proprietatea $B_\lambda \cong S/I_\lambda$.*

(b) Teoria de torsiune $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}, \mathcal{F}_{\mathcal{B}})$ este generată de clasa $\{S/I \mid I \in \mathcal{G}\}$.

Demonstraţie. Dacă B poate fi exprimat în această formă, atunci, clar, $B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Reciproc, fie $p : S^{(\Lambda)} \to B$ un epimorfism, unde $B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Considerăm injecţiile canonice $q_\lambda : S \to S^{(\Lambda)}$ şi punem $B_\lambda = \operatorname{im} pq_\lambda \leq B$. Pentru orice $\lambda \in \Lambda$, p_λ va desemna factorizarea morfismului pq_λ prin imaginea sa, iar $I_\lambda = \ker p_\lambda$. Obţinem o diagramă comutativă cu liniile exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I_\lambda \arrow[r] & S \arrow[r, "p_\lambda"] \arrow[d, "q_\lambda"] & B_\lambda \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & S^{(\Lambda)} \arrow[r, "p"] & B \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Bineînţeles, $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \leq B$. Deoarece $S/I_\lambda \cong B_\lambda \in \mathcal{T}$, rezultă $I_\lambda \in \mathcal{G}$. Dacă notăm cu $\pi : B \to B/\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ proiecţia canonică, atunci $\pi p q_\lambda = 0$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$, aşadar $\pi p = 0$, de unde $\pi = 0$, p fiind un epimorfism. În concluzie $B = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$.

(b) Având în vedere (a), afirmaţia este evidentă. $\square$

Ne întoarcem acum la teoria de torsiune $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}, \mathcal{F}_{\mathcal{B}})$ definită în Teorema 1.5.1. Pentru orice subobiect I al lui S, notăm cu IU imaginea morphismului indus $\mathbf{L}(I) \to U$. Evident IU este un subobiect al lui U.

Lema 1.5.5. *(a) Presupunem* $\operatorname{Ker}\mathbf{L}(g) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ *pentru orice monomorfism* g *în* $\mathcal{B}$*. Atunci teoria de torsiune* $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}, \mathcal{F}_{\mathcal{B}})$ *este generată de mulţimea* $\{S/I \mid I \in \mathcal{G}\}$*, unde*

$$\mathcal{G} = \{I \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(S) \mid U/IU \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}\}$$

(b) Fie $\mathcal{D} = \mathcal{B}/\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ *respectiva categorie cât. Atunci* $\mathcal{D} = \mathcal{B}$ *dacă şi numai dacă* $\mathcal{G} = \{S\}$*.*

Demonstraţie. (a) Folosind Lema 1.5.4 este suficient să verificăm că

$$\mathcal{G} = \{I \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(S) \mid S/I \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}\}.$$

Dacă $I \leq S$, atuci şirul scurt exact $0 \to I \to S \to S/I \to 0$ induce diagramă comutativă cu linii exacte

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{L}(I) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{L}(S) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{L}(S/I) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & IU \arrow[r] & U \arrow[r] & U/IU \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

unde $\mathbf{L}(I) \to IU$ este un epimorfism. În consecinţă obţinem un epimorfism $\mathbf{L}(S/I) \to U/IU$, iar lema ker-coker implică faptul că el este chiar un izomorfism. Aşadar apartenenţa $U/IU \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ este echivalentă cu $\mathbf{L}(S/I) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ sau cu $S/I \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

(b) Folosind (a), afirmaţia este imediată. □

Observaţia 1.5.6. Dacă presupunem că S nu este numai un generator, dar şi proiectiv şi finit generat, atunci filtrul definit în această secţiune pe laticea subobiectelor lui S nu este altceva decât topologia Gabriel asociată teoriei de torsiune ereditare $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}, \mathcal{F}_{\mathcal{B}})$, despre care am amintit în Observaţia 1.2.9.

1.6 Echivalenţe

Lema 1.6.1. *(a) Dacă* $\operatorname{Tr}_U(A) = \operatorname{im} v_A$ *pentru un obiect* $A \in \mathcal{A}$*, atunci* $\operatorname{coker} v_A \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$*.*

(b) Dacă $\operatorname{Pres}[U] = \operatorname{Stat}(\mathbf{R})$*, atunci* $\ker v_A \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ *pentru orice* $A \in \mathcal{A}$*.*

Demonstraţie. (a) Cu ipoteza făcută, $\operatorname{coker} v_A = A/\operatorname{im} v_A = A/\operatorname{Tr}_U(A)$ aparţine clasei $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, conform definiţiei acestei clase.

(b) Acestă afirmaţie rezultă aplicând functorul exact la stânga $\mathbf{R}$ şirului exact

$$0 \to \ker v_A \to \mathbf{LR}(A) \xrightarrow{v_A} A,$$

folosind Propoziţia 1.3.6 (a) şi incluziunea $\operatorname{Ker}\mathbf{R} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ demonstrată în Lema 1.4.3. $\square$

Primul rezultat important al acestei secţiuni, de altfel principală în acest capitol, este:

Teorema 1.6.2. *Dacă* $\ker \mathbf{L}(g) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ *pentru orice monomorfism* g *în* $\mathcal{B}$*, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) Functorul $\mathbf{Ri} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ *este deplin fidel.*

(ii) Morfismul v_C *are nucleul şi conucleul de torsiune în* $\mathcal{A}$*, pentru orice obiect* C *al categoriei* $\mathcal{C}$*.*

(iii) $\mathcal{C} \underset{\mathbf{aL}}{\overset{\mathbf{Ri}}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ *sunt echivalenţe de categorii inverse una celeilalte.*

Demonstraţie. (i)⇔(ii). Functorul $\mathbf{aL} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ este adjunctul la stânga al lui $\mathbf{Ri}$, iar counitatea de adjuncţie este dată de

$$\mathbf{aLRi}(C) \xrightarrow{\mathbf{a}(v_{\mathbf{i}(C)})} \mathbf{ai}(C) \xrightarrow{\delta_C} C,$$

pentru orice $C \in \mathcal{C}$. În conformitate cu Teorema 1.1.1, $\mathbf{Ri}$ este deplin fidel dacă şi numai dacă această counitate este un izomorfism. Deoarece δ_C este întotdeauna un izomorfism, aceasta este mai departe echivalent cu inversabilitatea morfismului $\mathbf{a}(v_C) = \mathbf{a}(v_{\mathbf{i}(C)})$, deci cu faptul că $\ker v_C, \operatorname{coker} v_C \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ pentru orice $C \in \mathcal{C}$.

(i)⇒(iii). Deoarece functorul $\mathbf{aL}$ este exact, iar $\mathbf{Ri}$ este deplin fidel, Teorema 1.2.6 afirmă că $\mathbf{Ri}$ induce o echivalenţă între $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{B}/\operatorname{Ker}\mathbf{aL}$. Pe de altă parte, avem în mod clar $\operatorname{Ker}\mathbf{aL} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, de unde urmează (iii).

(iii)⇒(i). Această afirmaţie este evidentă. $\square$

Corolarul 1.6.3. *Dacă* $\ker \mathbf{L}(g) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ *pentru orice monomorfism* g *în* $\mathcal{B}$ *şi, în plus,* $\operatorname{Pres}[U] = \operatorname{Stat}(\mathbf{R})$*, atunci categoriile* $\mathcal{C}$ *şi* $\mathcal{D}$ *sunt echivalente.*

Demonstraţie. Fie $C \in \mathcal{C}$. Folosind Lema 1.6.1 (b), deducem $\ker v_C \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Pe de altă parte, Lema 1.3.2 implică egalitatea

$$\operatorname{Gen}[U] = \{A \in \mathcal{A} \mid v_A \text{ este un epimorfism}\},$$

aşadar $\operatorname{coker} v_C \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ datorită Lemelor 1.3.5 şi 1.6.1 (a). În final este suficient să constatăm că este îndeplinită condiţia (ii) a Teoremei 1.6.2. $\square$

Înainte de a demonstra cel de-al doilea rezultat important al acestui capitol avem nevoie de următoarea lemă tehnică:

Lema 1.6.4. *Dacă U este un obiect CQF-3 al categoriei $\mathcal{A}$, atunci:*

(a) $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \operatorname{Ker} \mathbf{L}$.

(b) Dacă, în plus, $\ker \mathbf{L}(g) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ *pentru orice monomorfism g în $\mathcal{B}$, atunci* $\ker \mathbf{LR}(f) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ *pentru orice morfism f în $\mathcal{A}$ cu nucleul de torsiune.*

Demonstraţie. (a) Incluziunea $\operatorname{Ker} \mathbf{L} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ este clară din însăşi definiţia lui $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Reciproc, dacă $B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, atunci $\mathbf{L}(B) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ şi $\mathbf{RL}(B) = 0$. Aşadar $\mathbf{LRL}(B) = 0$ şi de asemenea $\mathbf{L}(B) = 0$, deoarece $\mathbf{L}(u_B) : \mathbf{L}(B) \to \mathbf{LRL}(B)$ este un monomorfism.

(b) Fie $f : A \to A''$ un morfism în $\mathcal{A}$ cu $A' = \ker f$ aparţinând lui $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Aplicând functorul exact la stânga $\mathbf{R}$ şirului exact $0 \to A' \to A \xrightarrow{f} A''$ şi ţinând cont că $\mathbf{R}(A') = 0$, obţinem un monomorfism $\mathbf{R}(f) : \mathbf{R}(A) \to \mathbf{R}(A'')$. Atunci, ipoteza făcută asupra lui $\mathbf{L}$ ne asigură că $\ker \mathbf{LR}(f)$ este de torsiune în $\mathcal{A}$. □

Teorema 1.6.5. *Fie U este un obiect CQF-3 al categoriei $\mathcal{A}$ şi* $\ker \mathbf{L}(g) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ *pentru orice monomorfism g în $\mathcal{B}$.*

(a) Următoarele condiţii sunt echivalente:

- *(i)* $\operatorname{Pres}[U] = \operatorname{Stat}(\mathbf{R})$.
- *(ii)* $\mathbf{R}(\mathcal{A}) = \operatorname{Adst}(\mathbf{R})$.
- *(iii)* $\mathcal{C} \underset{\mathbf{aL}}{\overset{\mathbf{Ri}}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ *sunt echivalenţe de categorii inverse una celeilalte.*

(b) Când condiţiile echivalente din (a) au loc, atunci următoarele sunt de asemenea echivalente:

- *(i)* $\operatorname{Pres}[U]$ *este o categorie abeliană.*
- *(ii)* $\mathbf{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}$.
- *(iii)* $\mathcal{C} \underset{\mathbf{a}}{\overset{\mathbf{LR}}{\rightleftarrows}} \operatorname{Pres}[U]$ *sunt echivalenţe de categorii inverse una celeilalte.*
- *(iv)* $\operatorname{Pres}[U]$ *este o categorie Grothendieck.*
- *(v)* $\mathbf{RL} \cong \mathbf{jb}$.

(vi) *Functorul* $\mathbf{RL} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *este exact la stânga.*

(vii) *Functorul* $\mathbf{LR} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *este exact la dreapta.*

Demonstraţie. (a) (i)$\Leftrightarrow$(ii) este dată în Teorema 1.3.3.

(i)$\Rightarrow$(iii) este exact Corolarul 1.6.3.

(iii)$\Rightarrow$(i). Pentru a demonstra această implicaţie este suficient, coform Teoremei 1.3.3, să arătăm că $\mathbf{R}(\ker v_A) = 0$ pentru orice $A \in \mathcal{A}$. În cazul nostru, aceasta este echivalent cu $\ker v_A \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.

Fie atunci $A \in \mathcal{A}$. Construim diagrama comutativă cu liniile şi coloanele exacte

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & \ker f \arrow[d] & \ker v_A \arrow[d] & \ker v_{\mathbf{ia}(A)} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \ker \mathbf{LR}(\eta_A) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathbf{LR}(A) \arrow[r, "\mathbf{LR}(\eta_A)"] \arrow[d, "v_A"] & \mathbf{LRia}(A) \arrow[d, "v_{\mathbf{ia}(A)}"] \\
0 \arrow[r] & \ker \eta_A \arrow[r] & A \arrow[r, "\eta_A"] & \mathbf{ia}(A),
\end{tikzcd}$$

unde f este obţinut din definiţia nucleului. Lema ker-coker ne dă un şir exact $0 \to \ker f \xrightarrow{f'} \ker v_A \to \ker v_{\mathbf{ia}(A)}$. Considerăm diagrama cu linii exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & \ker v_A \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{coker} f' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r, "f'"] & \ker v_A \arrow[r] & \ker v_{\mathbf{ia}(A)}, &
\end{tikzcd}$$

unde morfismul indus $\operatorname{coker} f' \to \ker v_{\mathbf{ia}(A)}$ este un monomorphism. Acum $\ker \eta_A \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, deci $\ker \mathbf{LR}(\eta_A) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ din Lema 1.6.4 (b). În consecinţă, $\ker f \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, ca fiind subobject al lui $\ker \mathbf{LR}(\eta_A)$. Pe de altă parte $\mathbf{ia}(A) \in \mathcal{C}$, de unde, folosind (iii) împreună cu Teorema 1.6.2, deducem $\ker v_{\mathbf{ia}(A)} \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Mai departe, subobjectul său $\operatorname{coker} f'$ aparţine de asemenea lui $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Aşadar $\ker v_A \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, iar (i) este probat.

(b) (i)$\Rightarrow$(ii) Fie $A \in \mathcal{A}$. Dacă $B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ atunci avem, conform Lemei 1.6.4 (a),

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(B, \mathbf{R}(A)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}(B), A) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(0, A) = 0,$$

deci $\mathbf{R}(A) \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$.

Dacă $g : \mathbf{R}(A) \to B$ este un morfism în $\mathcal{B}$ cu nucleul şi conucleul de torsiune, el este de fapt un monomorfism, deoarece nucleul său este 0, fiind atât de torsiune cât şi fără torsiune. Notăm $B'' = \operatorname{coker} g$. Şirul scurt exact

$$0 \to \mathbf{R}(A) \xrightarrow{g} B \to B'' \to 0$$

induce un şir de asemenea exact

$$0 \to \ker \mathbf{L}(g) \to \mathbf{LR}(A) \xrightarrow{\mathbf{L}(g)} \mathbf{L}(B) \to 0,$$

unde am folosit că $\mathbf{L}(B'') = 0$. Deoarece $\ker \mathbf{L}(g) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, rezultă $\mathbf{LR}(\operatorname{Ker} \mathbf{L}(g)) = 0$, de unde $\mathbf{L}(g)$ este un monomorfism şi un epimorfism în $\operatorname{Pres}[U]$. Dar $\operatorname{Pres}[U]$ este echilibrată, fiind abeliană, deci $\mathbf{L}(g)$ este un izomorfism în $\operatorname{Pres}[U]$. Cum $\operatorname{Pres}[U]$ este o subcategorie plină a categoriei $\mathcal{A}$, deducem că $\mathbf{L}(g)$ este un izomorfism şi în $\mathcal{A}$. Atunci

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(v_A)\mathbf{R}(\mathbf{L}(g)^{-1})u_B g &= \mathbf{R}(v_A)\mathbf{R}(\mathbf{L}(g)^{-1})\mathbf{R}(\mathbf{L}(g))u_{\mathbf{R}(A)} \\ &= \mathbf{R}(v_A)u_{\mathbf{R}(A)} = 1_{\mathbf{R}(A)}, \end{aligned}$$

deci g este o secţiune, ceea ce înseamnă că $\mathbf{R}(A)$ este $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-închis. Aşadar $\mathbf{R}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}$.

Fie acum $B \in \mathcal{D}$. Considerăm şirul exact

$$0 \to \ker u_B \to B \xrightarrow{u_B} \mathbf{RL}(B) \to \operatorname{coker} u_B \to 0.$$

Propoziţia 1.3.6 implică faptul că $\mathbf{L}(u_B)$ este un izomorfism, deci $\mathbf{L}(\operatorname{coker} u_B) = 0$ de unde $\operatorname{coker} u_B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Pe de altă parte morfismul compus

$$\mathbf{L}(\ker u_B) \to \mathbf{L}(B) \xrightarrow{\mathbf{L}(u_B)} \mathbf{LRL}(B)$$

este nul, implicând faptul că $\mathbf{L}(\ker u_B) \to \mathbf{L}(B)$ este de asemenea zero. Atunci $\mathbf{L}(\ker u_B) = \ker(\mathbf{L}(\ker u_B) \to \mathbf{L}(B))$ aparţine lui $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, iar din definiţia clasei $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ obţinem $\ker u_B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Cum B este $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-închis, rezultă că u_B este o secţiune, în particular, un monomorfism, deci B este un sumand direct al lui $\mathbf{RL}(B)$. Fie B' un complement al lui B în $\mathbf{RL}(B)$. Deoarece functorii aditivi păstrează exactitatea şirurilor scurt exacte scindabile, obţinem o diagramă comutativă cu linii exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d, "u_{B'}"] & \mathbf{RL}(B) \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "u_B"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{RL}(B') \arrow[r] & \mathbf{RLRL}(B) \arrow[r] & \mathbf{RL}(B) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

În consecinţă, u_B este un epimorfism. Dar am văzut mai înainte că el este un monomorfism, deci $B \cong \mathbf{RL}(B) \in \mathbf{R}(\mathcal{A})$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Avem echivalenţele de categorii

$$\mathrm{Pres}[U] \underset{\mathbf{L}}{\overset{\mathbf{R}}{\rightleftarrows}} \mathbf{R}(\mathcal{A}) \ \text{ şi } \ \mathcal{D} \underset{\mathbf{Ri}}{\overset{\mathbf{aL}}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}.$$

Compunând aceste echivalenţe şi ţinând cont că $\mathbf{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}$ şi $\mathbf{LR}(A) \cong A$ pentru orice $A \in \mathrm{Pres}[U]$, obţinem afirmaţia (iii).

(iii)$\Rightarrow$(iv) şi (iv)$\Rightarrow$(i) sunt evidente.

(ii)$\Rightarrow$(v). Dacă (ii) are loc, atunci $\mathbf{RL} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ factorizează prin functorul incluziune $\mathbf{j} : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$. Functorul obţinut prin această factorizare este natural izomorf cu $\mathbf{b}$, fiind ambii adjuncţi la stânga pentru $\mathbf{j}$.

(v)$\Rightarrow$(vi). Această afirmaţie este imediată, deoarece $\mathbf{b}$ este exact şi $\mathbf{j}$ este exact la stânga.

(vi)$\Rightarrow$(ii). Demonstraţia este similară cu cea folosită pentru a arăta implicaţia (i)$\Rightarrow$(ii), cu următoarea modificare. Ca şi mai sus considerăm şirul exact $0 \to \mathbf{R}(A) \xrightarrow{g} B \to B'' \to 0$, cu $B'' \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Aplicând functorul exact la stânga $\mathbf{RL}$ şi ţinând cont că Lema 1.6.4 implică $\mathbf{RL}(B'') = 0$, deducem că $\mathbf{RL}(g)$ este un izomorfism.

(iii)$\Rightarrow$(vii). Avem următoarea diagramă de categorii şi functori (nu neapărat comutativă):

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A} \arrow[dl, shift left, "\mathbf{LR}"] \arrow[dr, shift left, "\mathbf{a}"] & \\ \mathrm{Pres}[U] \arrow[ur, shift left] \arrow[rr, shift left, "\mathbf{a}"] & & \mathcal{C}, \arrow[ul, shift left, "\mathbf{i}"] \arrow[ll, shift left, "\mathbf{LR}"] \end{tikzcd}$$

functorii de pe linia de jos fiind echivalenţe, iar $\mathrm{Pres}[U] \to \mathcal{A}$ fiind functorul incluziune. Această diagramă arată că functorul $\mathbf{LR} : \mathcal{A} \to \mathrm{Pres}[U]$ are un adjunct la dreapta, şi anume $\mathbf{ia}$. Aşadar el este exact la dreapta. Deoarece limitele în $\mathrm{Pres}[U]$ se calculează exact ca şi în $\mathcal{A}$ (vezi Propoziţia 1.2.1), functorul $\mathbf{LR} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este de asemenea exact la dreapta.

(vii)$\Rightarrow$(i). Este suficient să aplicăm duala Propoziţiei 1.2.2, pentru subcategoria reflectivă $\mathrm{Pres}[U]$ a categoriei $\mathcal{A}$. $\square$

Observaţia 1.6.6. Diagrama de categorii şi functori de mai sus nu este neapărat comutativă, pentru că $\mathbf{ia} : \mathrm{Pres}[U] \to \mathcal{A}$ nu este cu necesitate natural izomorf functorului incluziune.

Corolarul 1.6.7. *Dacă functorii* $\mathbf{R}$ *şi* $\mathbf{aL}$ *sunt exacţi şi* $U^{(\Lambda)} \in \mathrm{Stat}(\mathbf{R})$ *pentru orice mulţime* Λ, *atunci* $\mathbf{R}$ *se restricţionează la următoarele echivalenţe de categorii:*

(a) $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *cu inversa* $\mathcal{D} \xrightarrow{\mathbf{aL}} \mathcal{C}$.

(b) $\mathrm{Pres}[U] \longrightarrow \mathcal{D}$ *cu inversa* $\mathcal{D} \xrightarrow{\mathbf{L}} \mathrm{Pres}[M]$.

(c) $\mathrm{GF}[U] \longrightarrow \mathcal{D}$ *cu inversa* $\mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{GF}[U]$, $B \mapsto \mathbf{L}(B)/\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(\mathbf{L}(B))$.

Demonstraţie. Poate fi văzut cu uşurinţă că, ipotezele acestui corolar, implică $\mathrm{Pres}[U] = \mathrm{Stat}(\mathbf{R})$ şi că $\mathbf{LR} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ exact la dreapta. Mai mult, Lema 1.3.2 ne spune că $\mathrm{Gen}[U] = \{A \in \mathcal{A} \mid v_A \text{ is an epimorphism}\}$, deci $\mathrm{Tr}_U(A) = \mathrm{im}\, v_A$ pentru orice $A \in \mathcal{A}$, conform Lemei 1.3.5. Aplicând functorul $\mathbf{R}$ şirului exact $0 \to \mathrm{im}\, v_A \to A \to A/\,\mathrm{im}\, v_A \to 0$ şi folosind izomorphismul $\mathbf{R}(\mathrm{im}\, v_A) \cong \mathbf{R}(A)$ afirmat de Lema 1.3.4, deducem $A/\,\mathrm{Tr}_U(A) \in \mathrm{Ker}\, \mathbf{R}$, pentru orice $A \in \mathcal{A}$. Deoarece $\mathrm{Ker}\, \mathbf{R}$ este o clasă TTF, rezultă conform Lemei 1.4.4 (b) că U este un obiect CQF-3 al categoriei $\mathcal{A}$. Aşadar (a) şi (b) sunt consecinţe ale Teoremei 1.6.5.

Pe de altă parte, Propoziţia 1.4.6, ne asigură de existenţa echivalenţelor de categorii inverse una celeilalte

$$\mathrm{GF}[U] \underset{\mathbf{s}}{\overset{\mathbf{a}}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}.$$

unde $\mathbf{s}$ este radicalul idempotent asociat teoriei de torsiune $(\mathcal{S}, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})$. Mai mult, dacă $A \in \mathrm{GF}[U]$, atunci $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, deci η_A este un monomorfism. Aplicând functorul $\mathbf{R}$ şirului scurt exact

$$0 \to A \xrightarrow{\eta_A} \mathbf{ia}(A) \to \mathrm{coker}\, \eta_A \to 0,$$

şi ţinând cont că $\mathbf{R}(\mathrm{coker}\, \eta_A) = 0$, deducem $\mathbf{R}(A) \cong \mathbf{Ria}(A)$, de unde urmează că functorul $\mathrm{GF}[U] \to \mathcal{D}$ este restricţia lui $\mathbf{R}$. Pe de altă parte, compunând echivalenţele dintre $\mathrm{Pres}[U]$, $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{C}$ şi folosind egalitatea $\mathbf{Ra}(A) \cong \mathbf{R}(A)$ dedusă din faptul că $\ker \eta_A, \mathrm{coker}\, \eta_A \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, rezultă că $\mathrm{Pres}[U]$ şi $\mathrm{GF}[U]$ sunt echivalente, via functorii daţi de $A \mapsto \mathbf{sa}(A), A \in \mathrm{Pres}[U]$ şi $F \mapsto \mathbf{LR}(F), F \in \mathrm{GF}[U]$. Dar, pentru orice $A \in \mathrm{Pres}[U]$, $A/\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(A) \in \mathrm{GF}[U]$, pentru că $A/\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(A) \in \mathrm{Gen}[U] \cap \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, iar $\mathrm{Gen}[U] \subseteq \mathcal{S}$, conform Lemei 1.4.4 (a). Deoarece $\mathbf{LR}$ este exact la dreapta şi $\mathbf{LR}(\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(A)) = 0$ pentru orice $A \in \mathcal{A}$, rezultă izomorfismele $A \cong \mathbf{LR}(A) \cong \mathbf{LR}(A/\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(A))$ pentru orice $A \in \mathrm{Pres}[U]$. În sfârşit, pentru orice $A \in \mathrm{Pres}[U]$, $\mathbf{sa}(A) \cong \mathbf{saLR}(A/\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(A)) \cong A/\mathbf{t}(A)$ ceea ce ne asigură că inversa $\mathbf{sa}$ a restricţiei $\mathbf{R} : \mathrm{GF}[U] \to \mathcal{D}$ are forma indicată în (c). $\square$

Propoziţia 1.6.8. *Dacă functorii* $\mathbf{R}$ *şi* $\mathbf{aL}$ *sunt exacţi,* $U^{(\Lambda)} \in \mathrm{Stat}(\mathbf{R})$ *pentru orice mulţime* Λ *şi* U *este un subgenerator al categoriei* $\mathcal{A}$*, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\mathrm{GF}[U] \subseteq \mathrm{Pres}[U]$.

(ii) $\mathrm{Pres}[U] \subseteq \mathrm{GF}[U]$.

(iii) U *este un generator al categoriei* $\mathcal{A}$.

Mai mult, dacă aceste condiţii sunt satisfăcute, atunci categoriile $\mathrm{Pres}[U]$, $\mathrm{GF}[U]$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$ *sunt egale, iar* $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \{0\}$.

Demonstraţie. (i)⇒(ii). Fie $A \in \mathrm{Gen}[U]$. Compunem un epimorfism $U^{(\Lambda)} \to A$ cu proiecţia canonică $A \to A/\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(A)$ şi obţinem un alt epimorfism $U^{(\Lambda)} \to A/\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(A)$ pe care îl vom nota cu p. Dar $A/\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(A) \in \mathrm{GF}[U]$ şi , prin ipoteză, $A/\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(A) \in \mathrm{Pres}[U]$, aşadar $\ker p \in \mathrm{Gen}[U]$. Mai departe, $\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(A) \in \mathrm{Gen}[U]$ ca obiect cât al obiectului $\ker p$. Asta înseamnă $\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(A) = 0$, deoarece $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \cap \mathrm{Gen}[U] \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \{0\}$. În concluzie $A \in \mathrm{GF}[U]$, adică am demonstrat incluziunea $\mathrm{Gen}[U] \subseteq \mathrm{GF}[U]$, şi cu atât mai mult (ii).

(ii)⇒(i). Fie $A \in \mathrm{GF}[U]$. Conform Corolarului 1.6.7, $A \cong \mathbf{LR}(A)/\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(\mathbf{LR}(A))$. Dar $\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(\mathbf{LR}(A)) = 0$ deoarece $\mathbf{LR}(A) \in \mathrm{Pres}[U] \subseteq \mathrm{GF}[U]$. Atunci $A \cong \mathbf{LR}(A) \in \mathrm{Pres}[U]$.

(i)⇒(iii). Este clar că dacă (i), aşadar şi (ii), este valabilă, atunci $\mathrm{GF}[U] = \mathrm{Pres}[U] = \mathrm{Gen}[U]$, deci $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = 0$, de unde avem mai departe $\mathrm{Gen}[U] = \mathcal{A}$. În concluzie U este un generator. □

Observaţia 1.6.9. Propoziţia 1.6.8 poate fi aplicată pentru un obiect arbitrar U, desigur înlocuind categoria $\mathcal{A}$ cu $\boldsymbol{\sigma}[U]$, unde U este întotdeauna un subgenerator.

1.7 Unde $\mathbf{R} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -)$

Vom nota $\mathrm{Stat}[U] = \mathrm{Stat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -))$ şi $\mathrm{Adst}[U] = \mathrm{Adst}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -))$. Următorul rezultat este o variantă pentru [31, Theorem 1.6]. Trebuie precizat că argumentul folosit acolo pentru a verifica a doua afirmaţie a punctului (a) din Teorema de mai jos, nu este deloc imediat, constituind un ingredient important al demonstraţiei.

Teorema 1.7.1. *Fie $\mathcal{A}$ categorie Grothendieck, $U \in \mathcal{A}$, $S = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(U)$ şi $\mathcal{C}$ categoria cât a categoriei $\mathcal{A}$ modulo subcategoria localizantă $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ asociată cu U. Notăm cu $-\otimes_S U$ adjunctul la stânga al functorului $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U,-) : \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}\text{-}S$. Mai mult, presupunem*

$$\ker(B' \otimes_S U \to B \otimes_S U) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}},$$

pentru orice monomorfism $B' \to B$ din $\mathrm{Mod}\text{-}S$.

(a) $\mathcal{G} = \{I \in \mathcal{L}_S(S) \mid U/IU \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}\}$ este o topologie Gabriel pe S, iar $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{a}(U))$ este inelul de câturi al inelului S, în raport cu această topologie.

(b) Functorul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U,-)$ induce o echivalenţă de categorii între $\mathcal{C}$ şi $\mathrm{Mod}\text{-}(S,\mathcal{G})$.

(c) $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ dacă şi numai dacă U este un generator pentru $\mathcal{A}$.

Demonstraţie. (a) Faptul că $\mathcal{G}$ este o topologie Gabriel rezultă din Observaţia 1.5.6. Pentru a doua afirmaţie vezi [31, Theorem 1.6]

(b) Pentru a putea aplica rezultatele din secţiunea precedentă, punem $\mathbf{R} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U,-)$, $S = \mathrm{End}_R(U)$ şi $\mathcal{B} = \mathrm{Mod}\text{-}S$. În conformitate cu 1.4.5, $\mathbf{a}(U)$ este un generator al categoriei $\mathcal{C}$, deci functorul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}(U),-) : \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}\text{-}\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{a}(U))$ este deplin fidel, aşa cum afirmă Teorema Gabriel-Popescu (Teorema 1.2.7). Deoarece $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U,C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}(U),C)$ pentru orice $C \in \mathcal{C}$, iar $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{a}(U))$ este inelul de câturi al lui S aşa cum s-a demonstrat la (a), rezultă conform Propoziţiei 1.2.10 că functorul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U,-) : \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}\text{-}S$ este de asemenea deplin fidel. În consecinţă, Teorema 1.6.2 dă echivalenţa categoriei $\mathcal{C}$ cu categoria $\mathcal{D}$, unde $\mathcal{D}$ este categoria cât a categoriei $\mathrm{Mod}\text{-}S$, modulo subcategoria localizantă $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Mai mult, Lema 1.5.5 arată că teoria de torsiune $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}, \mathcal{F}_{\mathcal{B}})$ este generată de filtrul $\mathcal{G} = \{I \in \mathcal{L}_S(S) \mid U/IU \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}\}$, despre care am văzut că este chiar o topologie Gabriel, aşadar $\mathcal{D} = \mathrm{Mod}\text{-}(S,\mathcal{G})$.

(c) Afirmaţia rezultă imediat din Propoziţia 1.6.8. □

Un obiect U al unei categorii Grothendieck $\mathcal{A}$ se numeşte *quasiproiectiv*, dacă U este proiectiv relativ la şirurile exacte cu termenul din mijloc U. Dacă $U^{(\Lambda)}$ este quasiproiectiv pentru orice mulţime Λ, atunci obiectul U este numit Σ-*quasiproiectiv*. Menţionăm că U este Σ-quasiproiectiv dacă şi numai dacă el este proiectiv în categoria Grothendieck $\boldsymbol{\sigma}[U]$, aşa cum putem veda din:

Lema 1.7.2. *Fie U un subgenerator al categoriei Grothendieck $\mathcal{A}$. Un obiect P al categoriei $\mathcal{A}$ este proiectiv exact atunci când el este proiectiv relativ la şirurile scurt exacte cu termenul din mijloc de forma $U^{(\Lambda)}$, unde Λ este o mulţime arbitrară. În consecinţă U este proiectiv în $\mathcal{A}$ exact atunci când el este Σ-quasiproiectiv.*

Demonstraţie. Implicaţia directă este, desigur, evidentă.

Pentru implicaţia conversă, fie $P \in \mathcal{A}$ cu cu proprietatea indicată. Afirmăm la început că P este proiectiv relativ şirurile scurt exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, cu $A \in \mathrm{Gen}[U]$. Într-adevăr, decă există un epimorfism $U^{(\Lambda)} \to A$, construim în $\mathcal{A}$ diagrama comutativă cu linii exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & U^{(\Lambda)} \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

unde K este nucleul morfismului compus $U^{(\Lambda)} \to A \to A''$, iar morfismul $K \to A$ este obţinut din definiţia nucleului. Aplicând acestei diagrame functorul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$, care păstrează - prin ipoteză - exactitatea primei linii, suntem conduşi la diagrama comutativă cu linii exacte în categoria $\mathcal{A}b$ a grupurilor abeliene

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, U^{(\Lambda)}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, A'') \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, A') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, A''). &
\end{tikzcd}$$

Rezultă atunci afirmaţia de mai sus.

Fie acum un şir scurt exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ în $\mathcal{A}$. Cum U este un subgenerator al acestei categorii, există un monomorfism $A \to A_1$, A_1 fiind un obiect U-generat. Dacă C este conucleul morfismului compus $A' \to A \to A_1$, iar C' al monomorfismului $A \to A_1$, atunci morfismul indus $A'' \to C$ este un monomorfism din lema ker-coker. Mai mult, lema

3×3 conduce la o diagramă comutativă cu linii şi coloane exacte

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & C' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 & .
\end{tikzcd}$$

Afirmaţia pe care am demonstrat-o în prima parte ne asigură că functorul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-)$ păstrează exactitatea liniei din mijloc, precum şi a coloanelor. Folosind din nou Lema 3×3, de data aceasta pentru diagrama obţinută aplicând acest functor celei de mai sus, deducem că şirul de grupuri abeliene

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,A') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,A'') \to 0$$

este exact, aşadar P este proiectiv în $\mathcal{A}$.

În final, dacă U este Σ-quasiproiectiv, atunci el este - fiind sumand direct în $U^{(\Lambda)}$ pentru orice mulţime Λ - proiectiv relativ la orice şir scurt exact cu termenul din mijloc $U^{(\Lambda)}$, ceea ce completează demonstraţia. $\square$

Propoziţia 1.7.3. *Fie U un obiect proiectiv al categoriei Grothendieck $\mathcal{A}$, $S = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(U)$ şi $-\otimes_S U : \mathrm{Mod}\text{-}S \to \mathcal{A}$ adjunctul la stânga al functorului $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U,-)$.*

(a) $I \in \mathrm{Adst}[U]$ pentru orice ideal drept finit generat al lui S.

(b) $\ker(g\otimes_S U) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ pentru orice monomorfism $g : B' \to B$ în $\mathrm{Mod}\text{-}S$.

Demonstraţie. (a) Avem diagrama commutativă cu linia de sus exactă

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "u_I"] & S \arrow[d, "u_S"] \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, I\otimes_S U) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, S\otimes_S U)
\end{tikzcd} .$$

Deoarece u_S este un izomorfism, rezultă că u_I este un monomorfism.

Pe de altă parte, deoarece I este finit generat, obţinem un epimorfism $S^n \to I$, cu n număr natural. Cum functorul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -\otimes_S U)$ este exact, obţinem mai departe diagrama comutativă cu linii exacte

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[rr] \arrow[d, "u_{S^n}"] & & I \arrow[r] \arrow[d, "u_I"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, S^n \otimes_S U) \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, I \otimes_S U) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

Din nou u_{S^n} este un izomorfism, arătând că u_I este un epimorfism, iar (a) este probată.

(b) Vom demonstra mai întâi afirmaţia într-un caz particular şi anume dacă g este o incluziune $I \to S$ unde I este un ideal drept al lui S. Dacă I este finit generat, atunci, folosind (a), prima diagramă din demonstraţia acestui rezultat ne arată de asemenea că $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, \ker(g \otimes_S U)) = 0$, deci $\ker(g \otimes_S U) \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -) = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Dacă I este un ideal oarecare, îl vom scrie ca limita directă a familiei $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ a subidealelor sale finit generate. Notăm $K_\lambda = \ker(I_\lambda \otimes_S U \to S)$, $\lambda \in \Lambda$ şi $K = \ker(g \otimes_S U)$. Avem $K_\lambda \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, $\lambda \in \Lambda$, iar exactitatea limitelor directe ne arată că $K = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$. Prin urmare $K \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ şi cazul particular este demonstrat.

Fie acum $g : B' \to B$ un monomorfism oarecare în $\mathcal{B}$. Considerăm un cogenerator injectiv C al teoriei de torsiune $(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}})$, ceea ce înseamnă $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ dacă şi numai dacă $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, C) = 0$. Diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_S(B, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, C)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_S(B', \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, C)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B \otimes_S U, C) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B' \otimes_S U, C)
\end{tikzcd}$$

ne arată că relaţia $\ker(g \otimes_S U) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ este echivalentă cu injectivitatea în Mod-S a obiectului $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, C)$. Mai departe, conform [37, Lemma 1], pentru ca $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, C)$ să fie injectiv, este suficient să presupunem injectivitatea relativă la şirurile exacte de forma

$$0 \to I \to S \to S/I \to 0.$$

Dar aceasta rezultă din cazul particular demostrat mai sus, folosind ultima diagramă comutativă în care înlocuim $B' \to B$ cu $I \to S$.

$\square$

Teorema 1.7.4. *[28, Theorem 1.3][29, Theorem 1.3] Fie un R un inel cu unitate, U un R-modul Σ-quasiproiectiv $S = \mathrm{End}_R(U)$ şi $\mathcal{C}$ categoria cât a categoriei $\boldsymbol{\sigma}[U]$ modulo subcategoria localizantă $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ asociată cu U. Atunci $\mathcal{G} = \{I \in \mathcal{L}(S) \mid U/IU \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}\}$ este o topologie Gabriel pe S şi functorul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -) : \boldsymbol{\sigma}[U] \to \text{Mod-}S$ se restricţionează la următoarele echivalenţe de categorii:*

(a) $\mathcal{C} \longrightarrow \text{Mod-}(S, \mathcal{G})$ *cu inversa* $\text{Mod-}(S, \mathcal{G}) \xrightarrow{\mathbf{a}(-\otimes_E U)} \mathcal{C}$, *unde* $\mathbf{a} : \boldsymbol{\sigma}[U] \to \mathcal{C}$ *este functorul canonic.*

(b) $\mathrm{Pres}[U] \longrightarrow \text{Mod-}(S, \mathcal{G})$ *cu inversa* $\text{Mod-}(S, \mathcal{G}) \xrightarrow{-\otimes_E U} \mathrm{Pres}[M]$.

(c) $\mathrm{GF}[U] \longrightarrow \text{Mod-}(S, \mathcal{G})$ *cu inversa*

$$\text{Mod-}(S, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{GF}[U],\ B \mapsto (B \otimes_E U)/\mathbf{t}_{\mathcal{A}}(B \otimes_E U).$$

Demonstraţie. Având în vedere Propoziţia 1.7.3, Teorema 1.7.1, ne spune că $\mathcal{G} = \{I \in \mathcal{L}(S) \mid U/IU \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}\}$ este topologia Gabriel pe S asociată cu clasa de torsiune $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{B \in \text{Mod-}S \mid B \otimes_E U \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}\}$. Punem $\mathcal{A} = \boldsymbol{\sigma}[U]$, $\mathbf{R} = \mathrm{Hom}_R(U, -)$, $S = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(U)$, $\mathcal{B} = \text{Mod-}S$. Atunci [34, Theorem 2.1] afirmă că $U^{(\Lambda)} \in \mathrm{Stat}(\mathbf{R})$ pentru orice mulţime Λ, deci este suficient să aplicăm Corolarul 1.6.7 împreună cu Lema 1.5.5 şi demonstraţia se încheie. $\square$

Observaţia 1.7.5. Punctul (a) al Teoremei 1.7.4 poate fi de asemenea dedus imediat din Teorema 1.7.1.

Capitolul 2

Aplicaţii

Dintre posibilele aplicaţii ale studiului abstract întreprins în primul capitol al acestei teze, am ales în secţiunea 2.1 cazul modulelor peste categorii preaditive mici. Acest caz se specializează mai departe la cazul modulelor unitale peste inele cu unităţi locale, pentru care am găsit în secţiunea 2.2 o generalizare a teoriei Morita aşa cum apare ea dezvoltată în [6]. O altă specializare a categoriilor de module peste categorii preaditive mici îl reprezintă cazul categoriilor de module graduate de G-mulţimi, unde G este un grup, aşa cum reiese din secţiunea 2.3. În următoarele secţiuni ale capitolului studiem în detaliu această categoriile de module graduate de G-mulţimi, iar în secţiunea 2.7 aplicăm cazul general pentru a obţine echivalenţe între anumite subcategorii ale lor.

Cu acest capitol urmărim să arătăm că, rezultatele generale obţinute în cel precedent sunt relevante în multe situaţii particulare şi înlocuirea functorilor Hom şi tensor cu o pereche oarecare de functori adjuncţi $\mathbf{R}$ şi $\mathbf{L}$ se justifică prin exemple.

Particularizările cuprinse în acest capitol au fost indicate, fără a intra în detalii, în lucrarea autorului [50]. Studiul echivalenţelor de categorii de module graduate, precum şi legătura acestora cu functorul care uită graduarea a fost întreprins în [45], lucrare scrisă de autor împreună cu A. Marcus. O sistematizare a rezultatelor relative subcategorii rigide şi topologii Gabriel rigide, care apar în secţiunea 2.6, poate fi întâlnită în lucrarea autorului [51]. Rezultatele secţinilor 2.4 şi 2.5 au fost publicate de către autor împreună cu A. Marcus în [46].

2.1 Module peste categorii preaditive mici

Fie $\mathcal{Y}$ o categorie preaditivă mică. Un *modul la dreapta peste* $\mathcal{Y}$ (sau simplu, $\mathcal{Y}$*-modul*) este un functor aditiv contravariant $\mathcal{Y}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$. Clasa $\mathcal{Y}$-modulelor împreună cu transformările naturale dintre ele formează o categorie Grothendieck, pe care o vom nota cu Mod-$\mathcal{Y}$, limitele şi colimitele fiind calculate element cu element. De menţionat că pentru bine definirea categoriei Mod-$\mathcal{Y}$, nu trebuie neapărat ca $\mathcal{Y}$ să fie mică ci numai *scheletal mică* - ceea ce înseamnă că scheletul ei este o categorie mică - caz în care vom înlocui de câte ori va fi nevoie categoria $\mathcal{Y}$ cu scheletul ei. Reamintim că un obiect A al unei categorii Grothendieck $\mathcal{A}$ este numit *finit generat (prezentat)* dacă functorul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -)$ comută cu reuniunile (limitele) directe. Vom nota cu $\mathrm{fp}\,\mathcal{A}$ subcategoria plină a categoriei $\mathcal{A}$ ale cărei obiecte sunt cele finit prezentate din $\mathcal{A}$. Lema lui Yoneda ne spune că functorul

$$\mathcal{Y} \to \text{Mod-}\mathcal{Y},\ Y \mapsto H_Y = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}}(-, Y)$$

este o scufundare - pe care o vom numi *scufundarea Yoneda* - deci categoria $\mathcal{Y}$ poate fi identificată cu subcategoria plină $\{H_Y \mid Y \in \mathcal{Y}\}$ a categoriei Mod-$\mathcal{Y}$. Atunci, din aceeaşi lemă Yoneda, rezultă uşor că $\mathcal{Y}$ este o mulţime de generatori finit generaţi pentru categoria Mod-$\mathcal{Y}$ [49, Chapter IV, Proposition 2.3]. O astfel de categorie, care posedă o mulţime de generatori finit generaţi se va numi *local finit generată*.

Un functor $\mathbf{f} : \mathcal{Y} \to \mathcal{A}$, unde $\mathcal{A}$ este o categorie Grothendieck arbitrară, induce un functor unic (până la un izomorfism functorial) $\mathbf{L} : \text{Mod-}\mathcal{Y} \to \mathcal{A}$ care comută cu colimitele şi care satisface relaţia $\mathbf{L}(Y) = \mathbf{f}(Y)$ pentru orice $Y \in \mathcal{Y}$. Fie $S = \bigoplus_{Y \in \mathcal{Y}} Y$ şi $U = \mathbf{L}(S) \cong \bigoplus_{Y \in \mathcal{Y}} \mathbf{f}(Y)$. Functorul $\mathbf{L}$ are un adjunct la dreapta, şi anume $\mathbf{R} : \mathcal{A} \to \text{Mod-}\mathcal{Y}$, dat de egalitatea

$$\mathbf{R}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{f}(-), A).$$

Vom spune că perechea de functori adjuncţi $(\mathbf{R}, \mathbf{L})$ este *indusă de* $\mathbf{f}$. Se observă că sunt îndeplinite ipotezele de lucru din secţiunea 1.3, categoriile $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B} = \text{Mod-}\mathcal{Y}$ fiind în plus Grothendieck, aşa cum am cerut în capitolul precedent începând cu secţiunea 1.4.

Presupunem în continuare că $\mathbf{f}(Y)$ este un obiect proiectiv în $\mathcal{A}$ pentru orice $Y \in \mathcal{Y}$. Definiţia functorului $\mathbf{R}$ ne asigură că el este în acest caz exact. Deoarece U este proiectiv, Observaţia 1.4.7 ne spune că $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathrm{Ker}\,\mathbf{R} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -)$, adică U este un obiect CQF-3 al categoriei $\mathcal{A}$, unde $(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}})$ este - ca şi în primul capitol - teoria de torsiune (ereditară) asociată cu U.

Vom spune că perechea de functori adjuncţi $(\mathbf{R}, \mathbf{L})$ este *punctată la dreapta* dacă fiecare obiect $Y \in \mathcal{Y}$ este $\mathbf{R}$-adstatic, adică $u_Y : Y \to \mathbf{RL}(Y)$ este un izomorfism, unde $u : \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \to \mathbf{LR}$ este unitatea acestei adjuncţii. Se poate observa că - în acazul particular când $\mathcal{Y}$ are un singur obiect - definiţia dată aici unei adjuncţii punctate la dreapta revine la aceea din lucrarea [13, Section 2].

Lema 2.1.1. *Perechea de functori adjuncţi* $\mathbf{R} : \mathcal{A} \to \text{Mod-}\mathcal{Y}$, $\mathbf{L} : \text{Mod-}\mathcal{Y} \to \mathcal{A}$ *este punctată la dreapta dacă şi numai dacă restricţia functorului* $\mathbf{L}$ *la* $\mathcal{Y} \to \mathcal{A}$ *este un functor deplin fidel, altfel spus, perechea de functori adjuncţi poate fi indusă de un functor deplin fidel* $\mathbf{f}$.

Demonstraţie. Dacă $u_Y : Y \to \mathbf{RL}(Y)$ este un izomorfism pentru orice $Y \in \mathcal{Y}$, atunci $v_{\mathbf{L}(Y)}$ este de asemenea un izomorfism, fiind de fapt chiar inversul lui $\mathbf{L}(u_Y)$. Aşadar categoriile preaditive $\mathcal{Y}$ şi $\mathbf{L}(\mathcal{Y})$ sunt echivalente, deci restricţia $\mathbf{f} : \mathcal{Y} \to \mathcal{A}, \mathbf{f}(Y) = \mathbf{L}(Y)$ este un functor deplin fidel.

Reciproc, dacă $\mathbf{f} : \mathcal{Y} \to \mathcal{A}$ este un functor deplin fidel, atunci categoriile $\mathcal{Y}$ şi $\mathbf{f}(Y)$ sunt echivalente, inversul functorului $\mathbf{f} : \mathcal{Y} \to \mathbf{f}(\mathcal{Y})$ fiind dat de restricţia adjunctului la dreapta $\mathbf{R}$ al lui $\mathbf{L}$. $\square$

Propoziţia 2.1.2. *Dacă* $(\mathbf{R}, \mathbf{L})$ *este o pereche de functori adjuncţi indusă de* $\mathbf{f} : \mathcal{Y} \to \mathcal{A}$, *iar* $\mathbf{f}(Y)$ *este proiectiv în* $\mathcal{A}$ *pentru orice* $Y \in \mathcal{Y}$, *atunci*

$$\ker(\mathbf{L}(B') \to \mathbf{L}(B)) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$$

pentru orice monomorfism $B' \to B$ *în* $\mathcal{B}$. *În consecinţă* $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \operatorname{Ker} \mathbf{L}$ *este o subcategorie localizantă a categoriei* $\text{Mod-}\mathcal{Y}$.

Demonstraţie. Pentru prima afirmaţie se foloseşte acelaşi argument ca şi în demonstraţia Propoziţiei 1.7.3, categoria $\text{Mod-}\mathcal{Y}$ fiind local finit generată, în particular fiecare obiect putând fi exprimat ca limita directă a subobiectelor sale finit generate [49, Chapter III, Corollary 1.4]. Mai departe, se foloseşte Propoziţia 1.5.1 şi Lema 1.6.4 $\square$

Urmând definiţia dată în [32, paragraful 2.1], vom numi *topologie Gabriel* pe $\mathcal{Y}$ o familie $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_{\mathcal{Y}} \mid Y \in \mathcal{Y}\}$, unde $\mathcal{G}_Y \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(Y)$ cu $Y \in \mathcal{Y}$ satisfăcând axiomele:

T1. $Y \in \mathcal{G}_Y$.

T2. dacă $I \in \mathcal{G}_Y$ şi $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y', Y)$, atunci $g^{-1}(I) \in \mathcal{G}_{Y'}$.

T3. dacă $I_1, I_2 \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(Y)$ pentru un obiect $Y \in \mathcal{Y}$ şi $I_1 \in \mathcal{G}_Y$, astfel încât $g^{-1}(I_2) \in \mathcal{G}_{Y'}$ pentru orice $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y', Y)$ satisfăcând $\mathrm{im}\, g \leq I_1$ şi orice $Y' \in \mathcal{Y}$, atunci $I_2 \in \mathcal{G}_Y$.

De remarcat că T1 poate fi înlocuită cu afirmaţia că $\mathcal{G}_Y$ este un filtru pe laticea $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(Y)$. O familie $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_{\mathcal{Y}} \mid Y \in \mathcal{Y}\}$ ca şi mai sus se va numi *topologie liniară* dacă satisface numai axiomele T1 şi T2.

Ştim atunci că aplicaţia

$$\mathcal{T} \mapsto \mathcal{G}(\mathcal{T}) = \{I \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(H_Y) \mid Y \in \mathcal{Y},\ H_Y/I \in \mathcal{T}\}$$

stabileşte o bijecţie între clasele de torsiune ereditare din Mod-$\mathcal{Y}$ şi topologiile Gabriel pe $\mathcal{Y}$, cu inversa

$$\mathcal{G} \mapsto \mathcal{T}(\mathcal{G}) = \{B \in \mathcal{B} \mid \ker g \in \mathcal{G} \text{ pentru orice } g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(H_Y, B) \text{ şi orice } Y \in \mathcal{Y}\}.$$

Bineînţeles, topologia Gabriel pe $\mathcal{Y}$ determină teoria de torsiune $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}, \mathcal{F}_{\mathcal{B}})$ cu un plus de exactitate faţă de filtrul pe laticea $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(S)$ despre care am discutat în Lemele 1.5.5 şi 1.5.4. Teorema care urmează şi Corolarul ei sunt similare în spirit, dar nu şi în detalii, rezultatelor date în [32, Theorem 4.7, Corollary 4.9 şi Theorem 4.10].

Teorema 2.1.3. *Fie $\mathcal{Y}$ o categorie preaditivă mică, $\mathcal{B} = \mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{Y}$, iar $\mathbf{f} : \mathcal{Y} \to \mathcal{A}$ un functor, unde $\mathcal{A}$ este o categorie Grothendieck arbitrară. Fie $(\mathbf{R}, \mathbf{L})$ perechea de functori adjuncţi indusă de $\mathbf{f}$ şi $S = \bigoplus_{Y \in \mathcal{Y}} Y$, $U = \mathbf{L}(S)$. Păstrăm notaţiile făcute în Capitolul 1, mai precis secţiunile 1.3, 1.4 şi 1.5. Dacă $\mathbf{f}(Y)$ este un obiect proiectiv al categoriei $\mathcal{A}$ pentru orice $Y \in \mathcal{Y}$, iar perechea de functori adjuncţi $(\mathbf{R}, \mathbf{L})$ este punctată la dreapta, atunci $\mathbf{af}(\mathcal{Y}) = \{\mathbf{af}(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\}$ este o mulţime de generatori proiectivi pentru $\mathcal{C}$, iar functorul $\mathbf{R}$ se restricţionează la următoarele echivalenţe de categorii:*

(a) $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *cu inversa* $\mathcal{D} \xrightarrow{\mathbf{aL}} \mathcal{C}$.

(b) $\mathrm{Pres}[U] \longrightarrow \mathcal{D}$ *cu inversa* $\mathcal{D} \xrightarrow{\mathbf{L}} \mathcal{C}$.

(c) $\mathrm{GF}[U] \longrightarrow \mathcal{D}$ *cu inversa* $\mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{GF}[U]$, $B \mapsto \mathbf{L}(B)/\mathbf{t}_{\mathcal{B}}(\mathbf{L}(B))$.

Mai mult, topologia Gabriel pe $\mathcal{Y}$ asociată cu teoria de torsiune $(\mathcal{T}_\mathcal{B}, \mathcal{F}_\mathcal{B})$ este dată de

$$\mathcal{G}_Y = \{I \in \mathcal{L}_\mathcal{B}(Y) \mid \mathbf{f}(Y) = I\mathbf{f}(Y)\},$$

pentru orice $Y \in \mathcal{Y}$, unde prin $I\mathbf{f}(Y)$ am notat imaginea morfismului indus $\mathbf{L}(I) \to \mathbf{L}(Y) = \mathbf{f}(Y)$.

Demonstraţie. Am văzut mai înainte că U este un obiect CQF-3, iar $\mathbf{aL}$ este exact. Observăm că $\mathcal{T}_\mathcal{A} = \{T \in \mathcal{A} \mid \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(\mathbf{f}(Y), T) = 0 \text{ pentru orice } Y \in \mathcal{Y}\}$. În plus, ştim datorită Lemei 1.4.5 că $\mathbf{a}(U)$ este un generator pentru $\mathcal{C}$. Deoarece $\mathbf{a}$ comută cu sumele directe, avem $\mathbf{a}(U) = \bigoplus_{Y\in\mathcal{Y}} \mathbf{af}(Y)$, deci $\{\mathbf{af}(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\}$ este o mulţime de generatori pentru $\mathcal{C}$. Atunci functorul

$$\mathcal{C} \to \text{Mod-}\,\mathbf{af}(\mathcal{Y}),\ C \mapsto \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\mathbf{af}(-), C)$$

este deplin fidel, în conformitate cu Teorema Popescu–Gabriel generalizată ([32, Theorem 4.1]). Pentru a arăta că $\mathbf{af}(Y)$ este proiectiv în $\mathcal{C}$ pentru orice $Y \in \mathcal{Y}$, să observăm că un şir scurt exact $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ în $\mathcal{C}$ este determinat de un şir exact

$$0 \to C' \to C \to C'' \to T \to 0$$

în $\mathcal{A}$, cu $C', C, C'' \in \mathcal{C}$ şi $T \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$. Aplicăm functorul exact $\mathrm{Hom}_\mathcal{A}(\mathbf{f}(Y), -)$ $(Y \in \mathcal{Y})$ unui astfel de şir exact, folosim exprimarea clasei $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ dată la începutul acestei demonstraţii şi adjuncţia dintre $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{i}$, şi proiectivitatea dorită rezultă.

Pentru un obiect $A \in \mathcal{A}$, unitatea $\eta_A : A \to \mathbf{ia}(A)$ adjuncţiei dintre $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{i}$ are nucleul şi conucleul de torsiune, aşadar ea induce un isomorfism

$$\mathrm{Hom}_\mathcal{A}(\mathbf{f}(Y), A) \cong \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(\mathbf{f}(Y), \mathbf{ia}(A)) \cong \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\mathbf{af}(Y), \mathbf{a}(A)),$$

pentru orice $Y \in \mathcal{Y}$, ceea ce arată echivalenţa categoriilor $\mathbf{af}(\mathcal{Y})$ şi $\mathbf{f}(\mathcal{Y})$. Deoarece categoriile $\mathbf{f}(\mathcal{Y})$ şi $\mathcal{Y}$ sunt de asemenea echivalente, tot aşa vor fi şi categoriile Mod-$\,\mathbf{af}(\mathcal{Y})$ şi Mod-$\,\mathcal{Y}$. Observăm atunci că functorul

$$\mathcal{C} \to \text{Mod-}\,\mathbf{af}(\mathcal{Y}),\ C \mapsto \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\mathbf{af}(-), C),$$

despre care am văzut mai înainte că este deplin fidel, este natural izomorf functorului $\mathbf{Ri}$. În concluzie, pentru a demonsta (a) şi (b), aplicăm Propoziţia 1.3.6 şi Teorema 1.6.5. Pentru (c) este aplicabil un argument similar cu cel folosit în demonstraţia Corolarului 1.6.7.

În sfârşit, ca în Lema 1.5.5, $\mathcal{G}_Y = \{I \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(Y) \mid \mathbf{f}(Y)/I\mathbf{f}(Y) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}\}$, pentru orice $Y \in \mathcal{Y}$. Mai mult, deoarece obiectul $\mathbf{f}(Y)/I\mathbf{f}(Y)$ este izomorf cu $\mathbf{L}(Y/I)$, el aparţine clasei $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ dacă şi numai dacă el este egal cu 0, sau echivalent, $\mathbf{f}(Y) = I\mathbf{f}(Y)$. $\square$

Corolarul 2.1.4. *Fie $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{Y}$ două categorii preaditive mici, $\mathbf{f} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un functor şi notăm $\mathcal{A} = \text{Mod-}\mathcal{X}$, $\mathcal{B} = \text{Mod-}\mathcal{Y}$. Fie $\mathbf{L} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ unicul functor care comută cu colimitele care extinde pe $\mathbf{f}$ şi notăm $S = \bigoplus_{Y\in\mathcal{Y}} Y$ şi $U = \mathbf{L}(S)$. Dacă $\mathbf{f}$ este deplin fidel, atunci categoriile $\mathcal{C}$, $\mathrm{Pres}[U]$, $\mathrm{GF}[U]$ şi $\mathcal{B}$ sunt echivalente.*

Demonstraţie. După cum am văzut şi înainte $\mathbf{L}$ are un adjunct la dreapta, şi anume

$$\mathbf{R} : \mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \mathbf{R}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(H_{\mathbf{f}(-)}, A),$$

unde $H_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(-, X)$ pentru orice $X \in \mathcal{X}$. Observăm că izomorfismul postulat de lema lui Yoneda implică $\mathbf{R}(A) \cong A\mathbf{f}$. Deoarece $H_{\mathbf{f}(Y)}$ este finit generat şi proiectiv în $\mathcal{A}$ rezultă de asemenea că $\mathbf{R}$ comută cu colimitele. Dacă $\mathbf{f}$ este deplin fidel, ceea ce conform Lemei 2.1.1 revine la faptul că perechea de adjuncţi $(\mathbf{R}, \mathbf{L})$ este punctată la dreapta, deducem din Teorema 2.1.3 echivalenţa categoriilor $\mathcal{C}$, $\mathrm{Pres}[U]$, $\mathrm{GF}[U]$ şi $\mathbf{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}$. Mai mult fie $B \in \mathcal{B}$ un object al categoriei $\mathcal{B}$. Există atunci o prezentare a lui B

$$\bigoplus_{Y'} H_{Y'} \to \bigoplus_{Y} H_Y \to B \to 0,$$

unde Y' şi Y sunt obiecte ale categoriei $\mathcal{Y}$, cu posibilitatea ca un obiect să se repete. Aplicând acestui şir exact functorul care comută cu colimitele $\mathbf{RL}$ şi ţinând cont că lema lui Yoneda ne dă izomorfismul $\mathbf{RL}(H_Y) \cong H_Y$ pentru orice $Y \in \mathcal{Y}$, rezultă $B \cong \mathbf{RL}(B) \in \mathcal{D}$, deci $\mathcal{D} = \mathcal{B}$. $\square$

Exemplul 2.1.5. Fixăm un inel comutativ cu unitate k. O *k-categorie* este categorie aditivă $\mathcal{A}$, pentru care $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', A)$ este înzestrat cu o structură de k-modul pentru orice $A', A \in \mathcal{A}$, astfel încât compunerea morfismelor este lineară în ambele variabile. De exemplu conceptul de $\mathbb{Z}$-categorie coincide cu cel de categorie preaditivă. Fie $\mathcal{X}$ o k-categorie (scheletal) mică şi fie $\mathcal{A} = \text{Mod-}\mathcal{X}$. Evident $\mathcal{A}$ este de asemenea o k-categorie. Mai mult, $\mathcal{A}$ este o categorie Grothendieck, cu $\mathcal{X}$ fiind o mulţime de generatori finit generaţi.

Menţionăm că $\mathcal{A}$ este echivalentă cu categoria ale cărei obiecte sunt functorii aditivi contravarianţi $\mathcal{X}^{\mathrm{op}} \to \text{Mod-}k$. Privind categoriile preaditive mici ca fiind inele cu mai multe obiecte - sau, cum o vom face în secţiunea 2.2, ca inele fără unitate - situaţia este analogă cu cazul unei k-algebre R, şi anume, orice R-modul devine automat un k-modul.

În ceea ce a rămas din această secţiune considerăm un caz particular şi anume când $\mathcal{X}$ este categoria (scheletal mică şi preaditivă) mod- R a R-modulelor finit prezentate, unde R este o algebra finit dimensională peste un corp comutativ k. De notat că (mod- $R)^{\mathrm{op}}$, adică duala categoriei mod- R este echivalentă cu categoria mod- R^{op} a R-modulelor stângi finit prezentate, via functorul numit k-dualitate $\mathbf{D}$: mod- $R \to$ mod- R^{op}, $\mathbf{D}(M) = \mathrm{Hom}_k(M, k)$. Punem $\mathcal{A} =$ Mod- $\mathcal{X}$ şi vom numi *R-modul generalizat* un obiect al categoriei $\mathcal{A}$, adică un functor mod- $R^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$. Atunci $\mathcal{A}$ va fi numită *categoria R-modulelor generalizate*. Fixăm M un R-modul finit prezentat şi notăm $S = \mathrm{End}_R(M)$, $\mathcal{Y} = \{S\}$. Atunci $B =$ Mod- $\mathcal{Y} =$ Mod- S este categoria S-modulelor. Functorul $\mathbf{f} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, $\mathbf{f}(S) = M$ este deplin fidel, deci induce o pereche de functori adjuncţi punctată la dreapta $(\mathbf{R}, \mathbf{L})$, unde $\mathbf{L}$ este unicul functor care comută cu colimitele şi aplică E în $H_M = \mathrm{Hom}_R(-, M)$ (sau M după identificare), iar $\mathbf{R}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(H_M, A) \cong A\mathbf{f}$ pentru orice $A \in \mathcal{A}$. În consecinţă $\mathrm{Pres}[H_M]$ este echivalent cu Mod- S, datorită Corolarului 2.1.4. Obţinem atunci în particular:

Corolarul 2.1.6. *[61, Lemma 2.2 şi Lemma 2.3] Cu notaţiile de mai sus, categoria* mod- S *este echivalentă cu subcategoria plină a categoriei functorilor* (mod- $R)^{op} \to$ mod- k *formată din acele obiecte A care pot fi scrise ca imaginea unui morfism de forma*

$$H_M^n \to \mathbf{D}\,\mathrm{Hom}_R(M, -)^m,$$

cu m, n numere naturale nenule.

Demonstraţie. Deoarece o echivalenţă de categorii păstrază obiectele finit prezentate, functorul $\mathbf{L}$ duce un obiect din mod- S într-unul din $\mathrm{fp}\,\mathrm{Pres}[H_M]$. Pe de altă parte, deoarece colimitele în $\mathrm{Pres}[H_M]$ sunt calculate exact ca în $\mathcal{A}$ - conform Propoziţiei 1.3.6 şi dualei Propoziţiei 1.2.1 - $A \in \mathrm{fp}\,\mathrm{Pres}[H_M]$ exact atunci când $A \in \mathrm{Pres}[H_M]$ şi el este finit prezentat ca obiect al categoriei $\mathcal{A}$. Aşadar

$$\mathrm{fp}\,\mathrm{Pres}[H_M] = \{A \in \mathcal{A} \mid \text{există un şir exact } H_M^m \to H_M^n \to A \to 0, \text{ cu } m, n \geq 1\}.$$

Acum ca în demonstraţia rezultatului [8, Proposition 3.1], functorii finit prezentaţi din $\mathrm{Pres}[H_M]$ sunt caracterizaţi ca fiind imagini ale unui morfism convenabil din $\mathcal{A}$ de forma

$$H_M^n \to \mathbf{D}\,\mathrm{Hom}_R(M, -)^m,$$

unde $m, n \geq 1$ sunt numere naturale. Mai mult, pentru orice $X \in \text{mod-}R$ şi orice $A \in \text{fp}\,\mathcal{A}$, $A(X) \in \text{mod-}k$, deci A poate fi văzut ca un functor $(\text{mod-}R)^{\text{op}} \to \text{mod-}k$. Aşadar obiectele din $\text{fp}\,\text{Pres}[U]$ sunt exact functorii de forma descrisă în [61, Section 2]. $\square$

2.2 Inele cu unităţi locale

Fie R un inel (asociativ, fără unitate). Un *modul* la dreapta peste un astfel de inel - numit simplu şi R-modul - este un grup abelian $(M, +)$ pe care s-a definit o operaţie externă (numită înmulţire cu scalari din R), $M \times R \to M$, distributivă atât faţă de adunarea din R cât şi faţă de cea din M şi care satisface $(mr_1)r_2 = m(r_1r_2)$ pentru orice $m \in M$ şi orice $r_1, r_2 \in R$. Un R-modul M se zice *unital* dacă, în plus, $MR = M$. Vom nota cu $\text{Mod-}R$ categoria R-modulelor unitale.

Un inel R este numit *inel cu suficienţi idempotenţi* dacă el conţine o mulţime $\mathcal{X}$ de idempotenţi ortogonali doi câte doi, astfel încât

$$R = \bigoplus_{e \in \mathcal{X}} eR = \bigoplus_{e \in \mathcal{X}} Re = \bigoplus_{e \in \mathcal{X}} eRe.$$

Propoziţia 2.2.1. *Dacă R este un inel cu suficienţi idempotenţi, atunci* $\text{Mod-}R$ *este echivalentă cu o categorie de module peste o categorie preaditivă mică. Reciproc, orice categorie de module peste o categorie preaditivă mică este echivalentă cu una de R-module unitale peste un anumit inel cu suficienţi idempotenţi. În consecinţă* $\text{Mod-}R$ *este o categorie Grothendieck, pentru orice inel cu suficienţi idempotenţi R.*

Demonstraţie. Fie R un inel cu suficienţi idempotenţi şi notăm cu $\mathcal{X}$ mulţimea idepotenţilor săi. Considerăm categoria preaditivă mică ale cărei obiecte sunt elementele mulţimii $\mathcal{X}$, morfismele sunt date de

$$\text{Hom}_{\mathcal{X}}(e', e) \cong \text{Hom}_R(e'R, eR) \cong eRe',$$

pentru orice $e', e \in \mathcal{X}$, iar compunerea morfismelor este indusă de înmulţirea din R. Dacă M este un R-modul unital, definim

$$M^* : \mathcal{X}^{\text{op}} \to \mathcal{A}b \text{ unde } M^*(e) = Me = \{me \mid m \in M\}.$$

Este clar că dacă $ere' \in eRe'$ este văzut ca un morfism de la e' în e, atunci $M^*(ere') : Me \to Me'$ este dat de $M^*(ere')(me) = mere'$, iar $M^*(er_1e')M^*(e''r_2e) = M^*((e''r_2e)(er_1e'))$ pentru orice două morfisme compozabile $er_1e' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(e', e)$ şi $e''r_2e \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(e, e'')$. Aşadar am definit un functor contravariant $M^* : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$. Reciproc dacă $A : \mathcal{X} \to \mathcal{A}b$ este un astfel de functor punem

$$A^* = \bigoplus_{e \in \mathcal{X}} A(e),$$

şi definim $m(re') = A(ere')(m)$ pentru orice $m \in A(e)$ şi orice $re' \in R$. Deoarece $R = \bigoplus_{e \in \mathcal{X}} Re$, rezultă astfel o înmulţire cu scalari din R, astfel încât A^* este un R-modul unital. Se verifică imediat că $(M^*)^* = M$ şi $(A^*)^* = A$ pentru orice R-modul unitar M şi orice functor $A : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$.

Reciproc, dacă $\mathcal{X}$ este o categorie preaditivă mică punem $R = \bigoplus_{e \in \mathcal{X}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(e, e)$, şi definim r_1r_2 ca fiind compunerea dintre ele dacă $r_1, r_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(e, e)$ sau zero altfel. Atunci R este un inel cu suficienţi idempotenţi, iar categoriile Mod-$\mathcal{X}$ şi Mod-R sunt echivalente, conform [26, Chapitre II, Proposition 2]. Notăm de asemenea că demonstraţia acestei echivalenţe este similară celei de mai sus. □

Numim *inel cu unităţi locale* un inel R care posedă o mulţime de idempotenţi $\mathcal{E}$, cu proprietatea că orice submulţime finită a lui R este conţinută într-un subinel de forma eRe cu $e \in \mathcal{E}$. De notat că $e \in \mathcal{E}$ acţionează ca unitate pentru subinelul eRe, ceea ce explică denumirea de inel cu unităţi locale. Ca şi în cazul inelelor cu suficienţi idempotenţi, vom considera categoria R-modulelor unitale pe care o vom nota cu Mod-R.

Definim o relaţie pe $\mathcal{E}$ punând $e \leq e'$ dacă şi numai dacă $ee' = e'e = e$, sau echivalent, dacă $eRe \subseteq e'Re'$. Se constată imediat că această relaţie este una de ordine pe $\mathcal{E}$, că $(\mathcal{E}, \leq)$ este directă în raport cu acestă ordine, iar $R = \sum_{e \in \mathcal{E}} eRe$. Mai mult un R-modul M este unital exact atunci când ele este de forma $M = \sum_{e \in \mathcal{E}} Me$, unde Me este privit ca un subgrup al grupului abelian M.

Folosind terminologia din [6], spunem că un R-modul unital M - R fiind un inel cu unităţi locale - este *local proiectiv* dacă el este limita directă a unui sistem $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de sumanzi direcţi finit generaţi ai lui M, atfel încât proiecţia canonică $M \to M_\lambda$ factorizează prin $M \to M_{\lambda'}$, ori de câte ori $\lambda \leq \lambda'$, pentru orice $\lambda, \lambda' \in \Lambda$.

Lema 2.2.2. *Fie M un R-modul unital, unde R este un inel cu unităţi locale. Atunci M este local proiectiv dacă şi numai dacă există o mulţime directă de idempotenţi $\{\epsilon_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ai inelului $\mathrm{End}_R(M)$, ordinea fiind dată de $\epsilon_\lambda \leq \epsilon_{\lambda'}$ exact atunci când $\epsilon_\lambda \epsilon_{\lambda'} = \epsilon_{\lambda'} \epsilon_\lambda = \epsilon_\lambda$, pentru orice $\lambda, \lambda' \in \Lambda$. Mai mult, atunci $\{\mathrm{End}_R(M_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ este un sistem direct de subinele ale lui $\mathrm{End}_R(M)$ iar $\mathrm{END}_R(M) = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{End}_R(M_\lambda)$ este un inel cu unităţi locale şi este constituit exact din acele endomorfisme ale lui M care factorizează printr-o proiecţie $M \to M_\lambda$.*

Demonstraţie. Dacă $M = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ este un R-modul local proiectiv, atunci, pentru orice $\lambda \in \Lambda$, $\epsilon_\lambda \in \mathrm{End}_R(M)$ va fi idempotentul corespunzător sumandului direct M_λ al lui M, adică homomorfismul compus $M \to M_\lambda \to M$, unde $M_\lambda \to M$ este injecţia canonică, iar $M \to M_\lambda$ proiecţia. Atunci se verifică imediat că mulţimea de idempotenţi $\{\epsilon_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ satisface cerinţele din enunţ. Reciproc dacă $\{\epsilon_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ este o astfel de mulţime de idempotenţi ai lui $\mathrm{End}_R(M)$, atunci punem $M_\lambda = \mathrm{im}\, \epsilon_\lambda$ şi rezultă imediat că $M = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ este un R-modul local proiectiv.

Inelul $\mathrm{End}_R(M_\lambda)$ este un subinel al lui $\mathrm{End}_R(M)$, de fapt $\mathrm{End}_R(M_\lambda) \cong \epsilon_\lambda \mathrm{End}_R(M) \epsilon_\lambda$. Din condiţia pe care o satisfac idempotenţii de forma ϵ_λ, rezultă că sistemul de subinele $\{\mathrm{End}_R(M_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ ale lui $\mathrm{End}_R(M)$ este direct şi construim inelul

$$\mathrm{END}_R(M) = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{End}_R(M_\lambda).$$

Chiar constucţia acestui inel ne asigură că mulţimea $\{\epsilon_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ acţionează ca una de unităţi locale ale inelului $\mathrm{END}_R(M)$, iar acesta este format din exact acele endomorfisme ale lui M care factorizează printr-un sumand direct M_λ. $\square$

Notăm în continuare $E = \mathrm{END}_R(M)$. Să observăm că ultima afirmaţie din Lema 2.2.2 implică $E = \mathrm{End}_R(M)E$. Mai mult, există o structură de E-modul stâng pe M, definită de restricţia scalarilor via incluziunea $E \to \mathrm{End}_R(M)$. Atunci, pentru orice $A \in$ Mod-R, grupul abelian $\mathrm{Hom}_R(M, A)$ devine un E-modul. Vom nota cu $\mathrm{HOM}_R(M, A) = \mathrm{Hom}_R(M, A)E$ cel mai mare E-submodul unital al acestui modul. Avem atunci:

$$\mathrm{HOM}_R(M, A) \cong \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M, A)\epsilon_\lambda \cong \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, A).$$

De fapt, $\mathrm{HOM}_R(M, A)$ este format exact din acele R-homomorfisme $M \to A$ care fectorizează printr-un sumand direct de forma M_λ. Observăm că în felul acesta am definit un functor

$$\mathrm{HOM}_R(M,-) : \mathrm{Mod}\text{-}\,R \to \mathrm{Mod}\text{-}\,E.$$

Deoarece produsul tensorial usual poate fi definit fără a face apel la unitatea inelului, obţinem un alt functor

$$-\otimes_E M : \mathrm{Mod}\text{-}\,E \to \mathrm{Mod}\text{-}\,R.$$

Lema 2.2.3. *Functorul produs tensorial definit mai sus este adjunct la stânga pentru* $\mathrm{HOM}_R(M,-)$.

Demonstraţie. Pentru orice $A \in \mathrm{Mod}\text{-}\,R$ şi orice $B \in \mathrm{Mod}\text{-}\,E$, definim aplicaţiile

$$u_B : B \to \mathrm{HOM}_R(M, B \otimes_E M),\ \ u_B(b) : m \mapsto b \otimes m,$$

$$v_A : \mathrm{HOM}_R(M,A) \otimes_E M \to A,\ \ v_A(f \otimes m) = f(m).$$

Prin verificare directă se arată că v_A şi u_B sunt R, respectiv E, homomorfisme bine definite. Mai mult ele sunt chiar unitatea şi counitatea adjuncţiei dintre $\mathrm{HOM}_R(M,-)$ şi $-\otimes_E M$. □

Lema 2.2.4. *[6, Corollary 1.3 şi Proposition 1.5] Fie R şi E două inele cu unităţi locale $M \in \mathrm{Mod}\text{-}\,R$, $N \in \mathrm{Mod}\text{-}\,E$, iar U un (E,R)-bimodul.*

(a) Dacă e este un idempotent al inelului R, atunci $M \otimes_E Re \cong Me$.

(b) Dacă M este proiectiv finit generat în $\mathrm{Mod}\text{-}\,R$*, atunci*

$$N \otimes_E \mathrm{Hom}_R(M,U) \cong \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_E U).$$

Teorema 2.2.5. *[6, Theorem 2.5] Categoriile* $\mathrm{Mod}\text{-}\,R$ *şi E sunt echivalente, unde R şi E sunt două inele cu unităţi locale dacă şi numai dacă există un generator local proiectiv M în* $\mathrm{Mod}\text{-}\,R$*, astfel încât* $E = \mathrm{END}_R(M)$.

Observaţia 2.2.6. [6, p. 12, Remark] Fie R un inel cu unităţi locale arbitrar şi fie $M = \bigoplus_{e\in\mathcal{E}} eR$, unde $\mathcal{E}$ este mulţimea de idempotenţi corespunzătoare din R. Evident M este un generator local proiectiv al categoriei $\mathrm{Mod}\text{-}\,R$, deci $\mathrm{Mod}\text{-}\,R$ este echivalentă cu $\mathrm{Mod}\text{-}\,E$ unde $E = \mathrm{END}_R(M)$, aşa cum am văzut în Teorema 2.2.5. Fiecărui idempotent $e \in \mathcal{E}$ îi asociem un idempotent $\epsilon_e \in \mathrm{END}_R(M)$ care este de fapt homomorfismul compus $M \to eM \to M$, ca în Lema 2.2.2. Este evident atunci că

$$E = \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} \epsilon_e E = \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} E\epsilon_e$$

este un inel cu suficienţi idempotenţi, şi anume $\{\epsilon_e \mid e \in \mathcal{E}\}$.

Observaţia 2.2.7. Dacă R este un inel cu suficienţi idempotenţi, atunci mulţimea

$$\{e_1 + \ldots + e_n \mid e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{X}\},$$

unde $\mathcal{X}$ sunt idempotenţii lui R, acţionează ca o mulţime de unităţi locale pe R. Pe de altă parte, conform 2.2.6, categoria modulelor unitale peste un inel cu unităţi locale arbitrar este echivalentă unei categorii de module unitale peste un anumit inel cu suficienţi idempotenţi, aşadar ea este o categorie Grothendieck, aşa cum am văzut în Propoziţia 2.2.1.

Punem $\mathbf{R} = \mathrm{HOM}_R(M, -)$ şi $\mathbf{L} = (- \otimes_E M)$. Deoarece E este un generator pentru Mod-E, iar $M = E \otimes_E M$, sunt satisfăcute ipotezele de lucru prezentate în secţiunea 1.4, categoriile Mod-R şi Mod-E fiind în plus Grothendieck, după cum am văzut în Observaţia 2.2.7. Aşadar vom putea păstra notaţiile din Capitolul 1, pentru $\mathcal{A} =$ Mod-R and $\mathcal{B} =$ Mod-E.

Lema 2.2.8. *Dacă $M = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ este un modul local proiectiv peste un inel cu unităţi locale R, atunci functorul $\mathrm{HOM}_R(M, -)$ este exact şi comută cu sumele directe de copii de M.*

Demonstraţie. Functorul $\mathrm{HOM}_R(M, -)$ este exact deoarece

$$\mathrm{HOM}_R(M, -) = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, -),$$

fiecare M_λ este presupus proiectiv, iar limitele directe sunt exacte.

Fie Γ o mulţime arbitrară şi fie $\lambda \in \Lambda$. Folosind Lema 2.2.4, obţinem izomorfismele:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, M^{(\Gamma)}) &\cong \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, E \otimes_E M^{(\Gamma)}) \cong \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, E^{(\Gamma)} \otimes_E M) \cong \\ & E^{(\Gamma)} \otimes_E \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, M) \cong E^{(\Gamma)} \otimes_E E\epsilon_\lambda \cong E^{(\Gamma)}\epsilon_\lambda \cong (E\epsilon_\lambda)^{(\Gamma)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, M)^{(\Gamma)} &\cong \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, E \otimes_E M)^{(\Gamma)} \cong \\ & (E \otimes_E \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, M))^{(\Gamma)} \cong (E \otimes_E \epsilon_\lambda)^{(\Gamma)} \cong (E\epsilon_\lambda)^{(\Gamma)} \end{aligned}$$

Trecând la limită cu $\lambda \in \Lambda$ obţinem $\mathrm{HOM}_R(M, M^{(\Gamma)}) \cong E^{(\Gamma)}$. $\square$

Teorema 2.2.9. *Dacă* $M = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ *este un modul local proiectiv peste un inel cu unităţi locale* R*, atunci functorul* $\mathrm{HOM}_R(M,-)$ *se restricţionează la următoarele echivalenţe de categorii:*

(a) $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ *cu inversa* $\mathcal{B} \overset{\mathbf{a}(-\otimes_E M)}{\longrightarrow} \mathcal{C}$*;*

(b) $\mathrm{Pres}[M] \longrightarrow \mathcal{B}$ *cu inversa* $\mathcal{B} \overset{-\otimes_E M}{\longrightarrow} \mathcal{C}$*;*

(c) $\mathrm{GF}[M] \longrightarrow \mathcal{B}$ *cu inversa* $\mathcal{B} \longrightarrow \mathrm{GF}[M]$, $B \mapsto B \otimes_E M/\mathbf{t}_\mathcal{A}(B \otimes_E M)$*.*

Dacă, în plus, M *este un generator al categoriei* Mod- R*, atunci*

$$\mathcal{C} = \mathrm{Pres}[M] = \mathrm{GF}[M] = \text{Mod-}R.$$

Demonstraţie. Conform Observaţiei 2.2.6, categoria Mod- E este echivalentă cu categoria Mod- $\mathrm{END}_E(P)$, unde $P = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, iar $\mathrm{END}_E(P)$ este un inel cu suficienţi idempotenţi. Aşadar ea este de asemenea echivalentă cu categoria Mod- $\mathcal{Y}$, unde $\mathcal{Y}$ este o categorie preaditivă mică având ca obiecte elementele mulţimii Λ, iar $\mathrm{Hom}_\mathcal{Y}(\lambda',\lambda) \cong \epsilon_\lambda E \epsilon_{\lambda'}$. Vom nota cu $\mathbf{T}$: Mod- $\mathcal{Y} \to$ Mod- E această ultimă echivalenţă. Atunci $(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}, \mathbf{LT})$ este o pereche de functori adjuncţi, care este indusă de $\mathbf{f} : \mathcal{Y} \to$ Mod- R, $\mathbf{f}(\lambda) = M_\lambda$. Din ipoteză $\mathbf{f}(\lambda)$ este proiectiv în Mod- R, pentru orice $\lambda \in \Lambda$. Mai mult, afirmăm că $\mathrm{Hom}_R(M_{\lambda'}, M_\lambda) \cong \epsilon_\lambda E \epsilon_{\lambda'}$ pentru orice $\lambda, \lambda' \in \Lambda$. Într-adevăr, aceast izomorfism este evident dacă înlocuim E cu $\mathrm{End}_R(M)$. Dar, pentru orice endomorfism f al lui M, avem $\epsilon_\lambda f \epsilon_{\lambda'} = \epsilon_\lambda^2 f \epsilon_{\lambda'}^2 \in \epsilon_\lambda E \epsilon_{\lambda'}$, aşadar afirmaţia noastră este adevărată. Aceasta, împreună cu izomorfismul $\mathbf{L}(E_\lambda) = E_\lambda \otimes_E M \cong M_\lambda$ arată că perechea de functori adjuncţi $(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}, \mathbf{LT})$ este punctată la dreapta. În concluzie Teorema 2.1.3 dă echivalenţele dorite, dar cu $\mathcal{D}$ în locul lui $\mathcal{B}$. Egalitatea $\mathcal{D} = \mathcal{B}$ rezultă din [13, Corollary 2.5], deoarece $\mathrm{HOM}_R(M,-)$ este exact şi comută cu sumele directe de copii de M, după cum afirmă Lema 2.2.8.

Ultima afirmaţie din enunţ rezultă imediat din Propoziţia 1.6.8. □

Observaţia 2.2.10. În Teorema 2.2.9 este generalizată echivalenţa postulată de Teorema 2.2.5, unde modulul M este presupus, în plus faţă de cazul de aici, a fi un generator al categoriei Mod- R.

Observaţia 2.2.11. Observaţia 2.2.6 - care a constituit un ingredient esenţial al demonstraţiei Teoremei 2.2.9 - este o consecinţă a Teoremei 2.2.5. Este clar că nu se produce în acest fel vreun cerc vicios, teorema în cauză fiind demonstrată mai înainte în [6]. Totuşi există o cale de a evita recursul la această Observaţie, folosind cele două leme pe care le vom prezenta în continuare, pentru ca Teorema 2.2.9 să fie dedusă apoi direct din Corolarul 1.6.7. Dacă am preferat pentru o expunere mai amănunţită demonstraţia de mai sus, am procedat aşa deoarece urmărim să relevăm astfel că în această secţiune, ca şi peste tot în acest capitol, sunt studiate categorii de module peste subcategorii preaditive mici, lucrarea având de câştigat în unitate.

Lema 2.2.12. *Fie R un inel cu unităţi locale, a căror mulţime o notăm cu $\mathcal{E}$. Considerăm categoria preaditivă $\mathcal{X}$, ale cărei obiecte sunt elementele mulţimii $\mathcal{E}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(e', e)$ este izomorf cu eRe' dacă $e \leq e'$ sau este 0 altfel, iar compunerea morfismelor este indusă de înmulţirea din R. Atunci categoria $\mathrm{Mod}\text{-}R$ este echivalentă cu categoria $\mathrm{Lex}(\mathcal{X}^{op}, \mathcal{A}b)$ a functorilor contravarianţi exacţi la stânga de la $\mathcal{X}$ la $\mathcal{A}b$. În consecinţă $\mathrm{Mod}\text{-}R$ este o categorie Grothendieck iar R este un generator.*

Demonstraţie. Dacă M este un R-modul unital, atunci definim $\overline{M} : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$, punând $\overline{M}(e) = Me$, iar $\overline{M}(r) : Me \to Me'$, $m \mapsto mr$ pentru orice $e, e' \in \mathcal{E}$ cu $e \leq e'$ şi orice $r = e're \in e'Re \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(e', e)$. Am definit un functor contravariant care este exact la stânga, deoarece morfismul $e = ee' \in e'Re$ este un epimorfism în $\mathcal{X}$, pentru $e \leq e' \in \mathcal{E}$. Mai mult, orice homomorfism de R-module $f : M' \to M$ induce o transformare naturală $\overline{M'} \to \overline{M}$.

Reciproc, dacă $A \in \mathrm{Lex}(\mathcal{X}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b)$ definim $\overline{A} = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} A(e)$, familia $\{A(e) \mid e \in \mathcal{E}\}$ fiind directă întrucât A este exat la stânga. Atunci $\overline{A}$ este un R-modul unital. În mod evident $\overline{\overline{M}} = M$ pentru orice R-modul unital M, iar $\overline{\overline{A}} = A$ pentru orice functor contravariant exact la stânga $\mathcal{X}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$.

În final, că $\mathrm{Mod}\text{-}R$ este o categorie Grothendieck, ea fiind localizare a categoriei $\mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{X}$, rezultă din [63, Chapter 4, Lemma 8.3], iar faptul că R este un generator rezultă exact ca şi în cazul inelelor cu unitate. $\square$

Conform lemei de mai sus, $\mathrm{Mod}\text{-}R$ şi $\mathrm{Mod}\text{-}E$ sunt categorii Grothendieck, E este un generator pentru $\mathrm{Mod}\text{-}E$, iar $M = E \otimes_E M$, aşadar putem păstra notaţiile făcute în secţiunea 1.4. Cu aceste notaţii avem:

Lema 2.2.13. *Dacă* $M = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ *este un modul local proiectiv peste un inel cu unităţi locale* R*, iar* $E = \mathrm{END}_R(M)$*, atunci functorul* $\mathbf{a}(- \otimes_E M)$ *este exact, iar*

$$M^{(\Gamma)} \cong \mathrm{HOM}_R(M, M^{(\Gamma)}) \otimes_E M,$$

pentru orice mulţime Γ*.*

Demonstraţie. Pentru a demonstra exactitatea functorului $\mathbf{a}(- \otimes_E M)$, să observăm la început izomorfismul $\mathrm{Hom}_R(M_\lambda, M) \cong E\epsilon_\lambda$, unde $\epsilon_\lambda \in \mathrm{End}_R(M)$ este idempotentul corespunzător. Într-adevăr, această egalitate este evidentă dacă înlocuim pe E cu $\mathrm{End}_R(M)$, iar orice homomorfism de R-module $M_\lambda \to M$ privit ca endomorfism al lui M factorizează prin M_λ, aşadar aparţine inelului E. Alegem un element $\lambda \in \Lambda$, considerăm un şir scurt exact $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ în Mod-E şi notăm $K = \ker(B' \otimes_E M \to B \otimes_E M)$. Este clar că şirul de grupuri abeliene $0 \to B'\epsilon_\lambda \to B\epsilon_\lambda \to B''\epsilon_\lambda \to 0$ este de asemenea exact. Mai mult, aplicând functorul exact $\mathrm{Hom}_R(M_\lambda, -)$ şirului exact

$$0 \to K \to B' \otimes_E M \to B \otimes_E M \to B'' \otimes_E M \to 0$$

şi folosind izomorfismele $\mathrm{Hom}_R(M_\lambda, B \otimes_E M) \cong B \otimes_E \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, M) \cong B \otimes_E E\epsilon_\lambda \cong B\epsilon_\lambda$, deduse din cele de mai sus şi din Lema 2.2.4, rezultă $\mathrm{Hom}_R(M_\lambda, K) = 0$. Cum $\lambda \in \Lambda$ a fost ales arbitrar, deducem mai departe $\mathrm{HOM}_R(M, K) = 0$, de unde $K \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$, ceea ce exte echivalent cu exactitatea dorită.

Ultima afirmaţie a enunţului rezultă din Lema 2.2.8. $\square$

2.3 Inele şi module graduate

Fie R un inel cu unitate şi G un grup, cu operaţia notată multiplicativ, iar elementul neutru notat prin 1. Spunem că R este un *inel graduat* de G - sau simplu G*-graduat* - dacă grupul abelian $(R, +)$ are o descompunere $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$, astfel încât $R_g R_{g'} \subseteq R_{gg'}$ pentru orice $g, g' \in G$. Este evident atunci că R_1 este un subinel al inelului R.

Reamintim că prin G*-mulţime* (la dreapta) înţelegem o mulţime X, împreună cu o operaţie externă $X \times G \to X$, $(x, g) \mapsto xg$, astfel încât $x(gg') = (xg)g'$ şi $x1 = x$, pentru orice $g, g' \in G$ şi orice $x \in X$. Un *homomorfism de* G*-mulţimi* este o aplicaţie $\phi : X \to Y$, astfel încât $\phi(x)g = \phi(xg)$ pentru orice $x \in X$ şi orice $g \in G$. Pe o G-mulţime X se introduce o relaţie binară, care se dovedeşte imediat a fi o echivalenţă, dată de $x' \sim x$ exact atunci când există $g \in G$ astfel încât $x = gx'$. Clasele de echivalenţă în care se împarte mulţimea X, relativ la această relaţie de echivalenţă, se numesc *orbitele* lui G în X şi sunt de forma $xG = \{xg \mid g \in G\}$, unde $x \in X$. Pentru un element $x \in X$, mulţimea $H_x = \{g \in G \mid xg = x\}$ formează un subgrup al grupului G, numit *stabilizatorul* lui x în G.

Fie acum $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ un inel G-graduat şi X o G-mulţime. Vom spune atunci despre un R-modul M că este *graduat* de X (sau X-graduat) dacă grupul abelian $(M, +)$ are o descompunere de forma $M = \bigoplus_{x\in X} M_x$, astfel încât $M_x R_g \subseteq M_{xg}$. Un element al sumandului direct M_x al lui M se va numi *omogen de grad* x. Vom nota cu $\mathrm{h}(M)$ mulţimea elementelor omogene ale lui M şi cu $\deg(m)$ gradul unui element $m \in \mathrm{h}(M)$. Între două R-module X-graduate M' şi M, vom considera acele R-homomorfisme $f : M' \to M$ care satisfac relaţia $f(M'_x) \subseteq M_x$ pentru orice $x \in X$, pe care le vom numi *graduate*; vom nota $\mathrm{Hom}_{X,R}(M', M)$ mulţimea tuturor homomorfismelor de acest fel. Deoarece compunerea a două R-homomorfisme X-graduate este de asemenea un R-homomorfism X-graduat, clasa R-modulelor X-graduate formează o categorie, având ca morfisme între două obiecte M' şi M elementele mulţimii $\mathrm{Hom}_{X,R}(M', M)$. Vom nota cu Gr-$(X, R)$ această categorie. În cele ce urmează ne vom ocupa de un caz particular de G-mulţime. Fie H un subgrup - nu neapărat normal - al grupului G. Pe mulţimea claselor de echivalenţă la dreapta ale lui H în G

$$H\backslash G = \{Hg \mid g \in G\}$$

exisă o structură naturală de G-mulţime, dată de $(Hg)g' = H(gg')$ pentru orice $g, g' \in G$. Acest tip de G-mulţime se numeşte *tranzitivă*. Particularizând în continuare, sunt de remarcat cazurile în care $H = 1$ sau $H = G$. Notăm atunci cu Gr-R = Gr-$(1\backslash G, R)$ categoria R-modulelor G-graduate şi observăm că Gr-$(G\backslash G, R)$ = Mod-R. Pentru un R-modul G-graduat M şi un element $g \in G$, definim *suspensia* a γ-a a lui M, ca fiind R-modului G-graduat $M(\gamma) = \bigoplus_{g\in G} M(\gamma)_g$, unde $M(\gamma)_g = M_{\gamma g}$.

Observaţia 2.3.1. Remarcăm doar, fără a avea nevoie în continuare de aceasta, că suspensia defineşte la un functor Gr-R → Gr-R, $M \mapsto M(\gamma)$, care este o echivalenţă cu inversa Gr-R → Gr-R, $M \mapsto M(\gamma^{-1})$. Mai general, dacă $H \leq G$, se poate defini o suspensie de grad $H\gamma$ punând $N(H\gamma)_g = N_{H\gamma g}$, pentru orice R-modul $H\backslash G$-graduat N. Şi în acest caz vom obţine o echivalenţa de categorii Gr-$(H\backslash G, R)$ → Gr-$((\gamma H \gamma^{-1})\backslash G, R)$.

Observaţia 2.3.2. Cazul R-modulelor graduate de G-mulţimi oarecare se reduce, de fapt, la cazul acelora tranzitive. Într-adevăr, se constată cu uşurinţă că aplicaţia $xG \to H_x\backslash G$, $xg \mapsto H_x g$ este un izomorfism de G-mulţimi pentru orice $x \in X$, iar mulţimea X se poate scrie ca reuniunea (disjunctă) a orbitelor lui G, adică $X = \bigcup_{x\in[X/\sim]} xG$, unde $[X/\sim]$ este un sistem de reprezentanţi pentru mulţimea factor. Mai mult, dacă $M = \bigoplus_{x\in X} M_x$ este un R-modul X-graduat, atunci deoarece $M_x R_g \subseteq M_{xg}$ şi $x \sim xg$ rezultă că M se scrie ca o sumă directă

$$M = \bigoplus_{x\in[X/\sim]} \left(\bigoplus_{x'\in xG} M_{x'} \right),$$

unde $\bigoplus_{x'\in xG} M_{x'}$ este un R-modul $H_x\backslash G$-graduat pentru orice $x \in [X/\sim]$. Având în vedere aceasta, în continuare ne vom focaliza asupra G-mulţimilor tranzitive, cazul general fiind studiat numai din motivul că, în anumite situaţii, notaţia este mai scurtă.

Propoziţia 2.3.3. *Categoria* Gr-(X,R) *este echivalentă cu categoria* Mod-$\mathcal{X}$*, unde* $\mathcal{X}$ *este o categorie preaditivă mică ale cărei obiecte sunt elementele mulţimii* X*,* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(xg_1, xg_2) \cong R_{g_2^{-1}H_x g_1} = \bigoplus_{h\in H_x} R_{g_2^{-1}hg_1}$ *şi* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x', x) = 0$ *dacă* $x \nsim x'$*, iar compunerea morfismelor este indusă de înmulţirea din* R*. În consecinţă* Gr-(X,R) *este o categorie Grothendieck.*

Demonstraţie. Să observăm mai întâi că definiţia categoriei $\mathcal{X}$ nu depinde de reprezentanţi. Într-adevăr, dacă $x = x'g$, cu $g \in G$, atunci $H_x = g^{-1}H_{x'}g$, deci $R_{g_2^{-1}g^{-1}H_{x'}gg_1} = R_{g_2^{-1}H_x g_1}$.

Fie acum M un R-modul X-graduat. Lui îi vom pune în corespondenţă functorul $M^* : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$, dat de $M^*(x) = M_x$ pentru orice $x \in X$ şi $M^*(\alpha)(m) = x\alpha$ pentru orice $\alpha \in R_{g_2^{-1}Hg_1}$ şi orice $m \in M_x$. Reciproc dacă $A : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$ este un functor contravariant, atunci definim R-modulul X-graduat $A^* = \bigoplus_{x\in X} A^*(x)$. Se constată imediat că $(M^*)^* = M$ pentru orice R-modul X-graduat M, iar $(A^*)^* = A$ pentru orice functor $A : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$. $\square$

Observaţia 2.3.4. Echivalenţa dintre categoria Gr-$(H\backslash G, R)$ şi o categorie de module unitale peste un inel cu suficienţi idempotenţi a fost de asemenea observată în [3, 2.9]. Pe de altă parte noi ştim că această ultimă categorie este echivalentă cu una de module peste o categorie preaditivă mică din Propoziţia 2.2.1.

Considerăm două G-mulţimi X şi Y şi un homomorfism surjectiv $\phi : X \to Y$ între ele. Plecând de la un R-modul X-graduat M, definim unul Y-graduat prin $\overline{M} = \bigoplus_{y\in Y} \overline{M}_y$, unde $\overline{M}_y = \bigoplus_{x\in\phi^{-1}(y)} M_x$. Dacă $f : M' \in M$ este un R-homomorfism X-graduat, atunci punem $\overline{f} : \overline{M'} \to \overline{M}$, $\overline{f}(a) = f(a)$, pentru orice $a \in A$. Invers, plecând de la un R-modul Y-graduat N, construim unul X-graduat $\widetilde{N} = \bigoplus_{x\in X} \widetilde{N}_x$, punând $\widetilde{N}_x = N_{\phi(x)}$ pentru orice $x \in X$, iar înmulţirea dintre două elemente omogene $\widetilde{n} \in \widetilde{N}_x$ şi $r_g \in R_g$ fiind dată prin aceea că $\widetilde{n} = n \in N_{\phi(x)}$, iar $nr_g \in N_{\phi(xg)}$, de unde rezultă că putem vedea acest element ca având gradul xg în $\widetilde{N}$, aşadar $\widetilde{n}r_g \in \widetilde{N}_{xg}$. Dacă $f : N' \to N$ este un homomorfism Y-graduat, atunci $\widetilde{f} : \widetilde{N'} \to \widetilde{N}$, unde pentru un elment $\widetilde{n} \in \widetilde{N}_x$ avem ca mai înainte $\widetilde{n} = n \in N_{\phi(x)}$ şi $\widetilde{f}(\widetilde{n}) = f(n) \in \widetilde{N}_x = N_{\phi(x)}$. Observăm că în felul descris mai sus am definit doi functori

$$\mathbf{U}_\phi : \text{Gr-}(X,R) \to \text{Gr-}(Y,R) \text{ şi } \mathbf{F}_\phi : \text{Gr-}(Y,R) \to \text{Gr-}(X,R),$$

daţi de $\mathbf{U}_\phi(M) = \overline{M}$ şi $\mathbf{F}_\phi(N) = \widetilde{N}$. Folosind numai definiţiile acestor functori deducem imediat că, dacă $\phi : X \to Y$ şi $\phi' : Y \to Z$ sunt două homomorfisme surjective de G-mulţimi, atunci $\mathbf{U}_{\phi\phi'} \cong \mathbf{U}_{\phi'}\mathbf{U}_\phi$, iar $\mathbf{F}_{\phi\phi'} \cong \mathbf{F}_{\phi'}\mathbf{F}_\phi$.

Lema 2.3.5. *Fie R un inel G-graduat şi $\phi : X \to Y$ un homomorfism de G-mulţimi.*

(a)[44, Lemma 1.9] Functorul $\mathbf{U}_\phi$ este un adjunct la stânga al functorului $\mathbf{F}_\phi$.

(b) Functorii $\mathbf{U}_\phi$ şi $\mathbf{F}_\phi$ sunt exacţi şi comută cu sumele şi produsele directe.

Demonstraţie. (a) Imediat se poate observa că unitatea şi counitatea adjuncţiei din enunţ sunt

$$\zeta : \mathbf{1}_{\text{Gr-}(X,R)} \to \mathbf{F}_\phi\mathbf{U}_\phi \text{ şi } \xi : \mathbf{U}_\phi\mathbf{F}_\phi \to \mathbf{1}_{\text{Gr-}(Y,R)},$$

date de $\zeta_M(m_x) = m_x \in \mathbf{F}_\phi(\mathbf{U}_\phi(M))_x$ pentru orice $M \in \text{Gr-}(X,R)$, orice $x \in X$ şi orice $m_x \in M_x$, iar $\xi(\widetilde{n}) = \widetilde{n} \in N_\phi(x)$ pentru orice $\widetilde{n} \in \widetilde{N}_x = N_{\phi(x)}$ $(x \in X)$.

(b) Lăsând la o parte graduarea, R-modulele A şi $\mathbf{U}_\phi(A)$ coincid, şi de asemenea coincid homomorfismele de R-module f şi $\mathbf{U}_\phi(f)$. În concluzie, functorul $\mathbf{U}_\phi$ definit mai devreme este exact şi comută cu sumele şi produsele directe. Aplicând direct definiţia functorului $\mathbf{F}_\phi$, putem constata că şi acest al doilea functor este exact, iar el comută cu produsele directe, având un adjunct la stânga.

Fie $N = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ o sumă directă în $\text{Gr-}(H\backslash G,R)$ ale cărei injecţii canonice sunt notate cu $q_\lambda : N_\lambda \to N$. Homomorfismele de R-module X-graduate $\mathbf{F}_\phi(q_\lambda) : \mathbf{F}_\phi(N_\lambda) \to \mathbf{F}_\phi(N)$, $\lambda \in \Lambda$ induc un unic homomorfism

$$\alpha : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{F}_\phi(N_\lambda) \to \mathbf{F}_\phi(N),$$

în Gr-(Y,R). Fie $(\widetilde{n}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{F}_\phi(N_\lambda)$ un element omogen de ordin $x \in X$, unde $\widetilde{n}_\lambda = n_\lambda \in (N_\lambda)_{\phi(x)}$, oricare ar fi $\lambda \in \Lambda$. Atunci $\alpha((\widetilde{n}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \widetilde{n} \in \mathbf{F}_\phi(N)_x$, unde $\widetilde{n} = n \in N_{\phi(x)}$ iar $n = (\widetilde{n}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Rezultă aşadar că α este un epimorfism. Pe de altă parte, este clar că el este un monomorfism, functorul $\mathbf{F}_\phi$ fiind aditiv (vezi [15, Exercise S 6.18]), deci el este un izomorfism. $\square$

Corolarul 2.3.6. *Cu notaţiile folosite în Lema 2.3.5, ξ_N este un epimorfism, iar ζ_M un monomorfism pentru orice $N \in$ Gr-(Y,R) şi orice $M \in$ Gr-(X,R).*

În cazul în care $K \leq H \leq G$ sunt două subgrupuri ale lui G, există o aplicaţie naturală de G-mulţimi între $X = K\backslash G$ şi $Y = H\backslash G$, şi anume proiecţia $\phi : Kg \mapsto Hg$ pentru orice $g \in G$. În acest caz vom nota $\mathbf{U}_{H\backslash G}^{K\backslash G} = \mathbf{U}_\phi$ şi $\mathbf{F}_{H\backslash G}^{K\backslash G} = \mathbf{F}_\phi$, iar functorul $\mathbf{U}_{H\backslash G}^{K\backslash G}$ "uită" parţial graduarea unui R-modul $K\backslash G$-graduat M. De exemplu, dacă $K = 1$ şi $H = G$, iar $M \in$ Gr-R, atunci $\mathbf{U}(M(g)) = \mathbf{U}(M)$ pentru orice $g \in G$, unde $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{G\backslash G}^{1\backslash G}$. Remarcăm de asemenea

Lema 2.3.7. *Există un izomorfism de module G-graduate*

$$\mathbf{F}_{H\backslash G}^{1\backslash G}(\mathbf{U}_{H\backslash G}^{1\backslash G}(M)) \cong \bigoplus_{h\in H} M(h),$$

pentru orice $M \in$ Gr-R şi orice $H \leq G$.

Demonstraţie. Fie $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{H\backslash G}^{1\backslash G}$ şi $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{H\backslash G}^{1\backslash G}$. Fie $N = \mathbf{U}(M) = \bigoplus_{g\in[H\backslash G]} N_{Hg}$, unde $N_{Hg} = \bigoplus_{h\in H} M_{hg}$. Alegem $h \in H$ şi $m \in M(h)_g = M_{hg}$. Din construcţia functorului $\mathbf{F}$, m determină un unic element $f(m) = m$ aparţinând componentei $\mathbf{F}(N)_g$ a modulului G-graduat $\mathbf{F}(N)$ (mai precis, aparţinând copiei lui M_{hg} care este inclusă în această componentă). Este clar că am obţinut un izomorfism de R-module G-graduate $f : \bigoplus_{h\in H} M(h) \to \mathbf{F}(N)$. $\square$

Fie $M = \bigoplus_{g\in G} M_g \in$ Gr-R şi $N = \bigoplus_{x\in X} N_x \in$ Gr-(X,R). Se verifică imediat că mulţimea

$$\mathrm{HOM}_{X,R}(M,N)_x = \{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N) \mid f(M_g) \subseteq N_{xg} \text{ pentru orice } g \in G\}$$

formează un subgrup aditiv al grupului $\mathrm{Hom}_R(M,N)$, pentru orice $x \in X$. Mai mult, suma

$$\mathrm{HOM}_{X,R}(M,N) = \sum_{x\in X} \mathrm{HOM}_{X,R}(M,N)_x$$

este directă. În particular, dacă $N \in \mathrm{Gr}\text{-}R$, notăm $\mathrm{HOM}_R(M,N) = \mathrm{HOM}_{1\backslash G,R}(M,N)$ şi considerăm subinelul $E = \mathrm{END}(M) = \mathrm{HOM}_R(M,M)$ al inelului $\mathrm{End}_R(M)$. Atunci E este un inel G-graduat, iar M devine un (R,E)-bimodul G-graduat, ceea ce - revenind la cazul în care $N \in \mathrm{Gr}\text{-}(X,R)$, unde X este o G-mulţime oarecare - conduce la concluzia că $\mathrm{HOM}_{X,R}(M,N)$ este un E-modul X-graduat. Rezumând, având dat un R-modul G-graduat M, tocmai am definit un functor

$$\mathrm{HOM}_{X,R}(M,-) : \mathrm{Gr}\text{-}(X,R) \to \mathrm{Gr}\text{-}(X,E).$$

Lema 2.3.8. *Fie R un inel graduat de un grup G, X o G-mulţime, $M \in \mathrm{Gr}\text{-}R$ şi $E = \mathrm{END}_R(M)$. Functorul $\mathrm{HOM}_{X,R}(M,-)$ definit mai sus este un adjunct la dreapta al functorului produs tensorial*

$$-\otimes_E M : \mathrm{Gr}\text{-}(X,E) \to \mathrm{Gr}\text{-}(X,R).$$

Demonstraţie. Definim aplicaţiile

$$u_B^X : B \to \mathrm{HOM}_{X,R}(M, B\otimes_E M),\ u_B^X(b) : m \mapsto b\otimes m,$$

$$v_A^X : \mathrm{HOM}_{X,R}(M,A)\otimes_E M \to A,\ v_A^X(f\otimes m) = f(m),$$

pentru orice $A \in \mathrm{Gr}\text{-}(X,R)$ şi orice $B \in \mathrm{Gr}\text{-}(X,E)$. Se demonstrează imediat că aceste aplicaţii sunt unitatea, respectiv counitatea adjuncţiei pe care o afirmă lema. $\square$

Lema 2.3.9. *Fie R este un inel G-graduat, $H \leq G$ un subgrup, $\gamma \in G$ şi notăm $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{H\backslash G}^{1\backslash G}$. Dacă $M \in \mathrm{Gr}\text{-}R$ şi $N \in \mathrm{Gr}\text{-}(H\backslash G, R)$ atunci*

$$\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M,N)_{H\gamma} = \mathrm{Hom}_{H\backslash G,R}(\mathbf{U}(M(\gamma^{-1})), N).$$

În particular $\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M,N)_H = \mathrm{Hom}_{H\backslash G,R}(\mathbf{U}(M), N)$.

Demonstraţie. Considerăm un homomorfism $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Acest homomorfism este un element al grupului $\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M,N)_{H\gamma}$ exact atunci când $f(M_g) \subseteq N_{H\gamma g}$ pentru orice $g \in G$. Punând $g' = \gamma g$, deci $g = \gamma^{-1}g'$, aceasta este echivalent cu $f(M_{\gamma^{-1}g'}) \subseteq N_{Hg'}$ pentru orice $g' \in G$, sau cu $f(M(\gamma^{-1})_{g'} \subseteq N_{Hg'}$ pentru orice $g' \in G$. Mai departe, găsim incluziunile, de asemenea echivalente cu cele de dinainte $f(\bigoplus_{h\in H} M(\gamma_{hg'}^{-1})) \subseteq N_{Hg'}$ pentru orice $g' \in G$, respectiv $f(\mathbf{U}(M(\gamma^{-1}))_{Hg'}) \subseteq N_{Hg'}$ pentru orice $g' \in G$, ceea ce înseamnă $f \in \mathrm{Hom}_{H\backslash G,R}(\mathbf{U}(M(\gamma^{-1}), N)$. $\square$

Lema 2.3.10. *Fie R şi E două inele graduate de un grup G, H un subgrup al lui G, M un (R,E)-bimodul $H\backslash G$-graduat, iar $I \in \mathrm{Gr}\text{-}E$. Atunci functorii*

$$\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(I \otimes_E M, -) : \mathrm{Gr}\text{-}(H\backslash G, R) \to \mathcal{A}b,$$

$$\mathrm{HOM}_{H\backslash G,E}(I, \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M, -)) : \mathrm{Gr}\text{-}(H\backslash G, R) \to \mathcal{A}b$$

sunt natural izomorfi.

Demonstraţie. Deoarece $\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M, -)$ este adjunctul la dreapta al functorului $-\otimes_E M$, rezultă izomorfismele naturale

$$\mathrm{Hom}_{H\backslash G,R}(I(g^{-1}) \otimes_E M, N) \cong \mathrm{Hom}_{H\backslash G,E}(I(g^{-1}), \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M, N)),$$

pentru orice $g \in G$ şi orice $N \in \mathrm{Gr}\text{-}(H\backslash G, R)$. Fie $[H\backslash G]$ un sistem de reprezentanţi pentru clasele la dreapta induse de H în G. Însumând izomorfismele de mai sus după $g \in [H\backslash G]$, obţinem izomorfismele, de asemenea naturale:

$$\begin{aligned}\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(I \otimes_E M, N) &\cong \bigoplus_{g\in[H\backslash G]} \mathrm{Hom}_{H\backslash G,R}(I(g^{-1}) \otimes_E M, N) \cong \\ &\cong \bigoplus_{g\in[H\backslash G]} \mathrm{Hom}_{H\backslash G,E}(I(g^{-1}), \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M, N)) \cong \\ &\cong \mathrm{HOM}_{H\backslash G,E}(I, \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M, N)).\end{aligned}$$

□

2.4 Topologia finită pe $\mathrm{HOM}_{X,R}(M, -)$

La începutul acestui paragraf vom reaminti câteva noţiuni de topologie pe care le vom folosi în continuare. Mai întâi, despre un spaţiu topologic se zice că este *Hausdorff* (sau *separat*), dacă dându-se două puncte distincte există câte o vecinătate a fiecăruia cu intersecţia dintre cele două vecinătăţi vidă. Topologia *discretă* pe o mulţime este acea topologie în care orice punct are ca vecinătate submulţimea formată cu un singur element, şi anume el însuşi. Plecând de la o familie de spaţii topologice, pe produsul cartezian al mulţimilor subiacente se poate defini o topologie, submulţimile deschise fiind produsele carteziene de submulţimi deschise ale fiecărei componente, topologie ce poartă denumirea de *topologia* *produs* a celor iniţiale. O submulţime a unui spaţiu topologic se zice *densă*, dacă intersecţia oricărei vecinătăţi a unui punct al acestui spaţiu topologic cu respectiva submulţime este nevidă.

Un spaţiu topologic uniform se zice *complet* dacă orice filtru Cauchy din acest spaţiu este convergent. Desigur, aici ar fi de spus ce înseamnă spaţiu uniform, filtru Cauchy, şi filtru convergent, dar - întrucât aceste noţiuni nu intervin esenţial în ceea ce urmează - ne mărginim să trimitem cititorul interesat la [9]. Pentru scopurile noastre, este suficient să amintim că un spaţiu topologic Hausdorff este completarea unui subspaţiu al său, dacă el este complet şi conţine subspaţiul ca o submulţime densă.

Fie $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck şi fie $M, N \in \mathcal{A}$. Reamintim că *topologia finită* pe grupul abelian $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ este definită prin aceea că el este un grup topologic, având ca sistem fundamental de vecinătăţi ale originii mulţimea

$$\mathcal{V}(0) = \{V_A \mid A \text{ este un subobiect finit generatal lui } M\},$$

unde

$$V_A = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \mid A \leq \ker f\}.$$

Dacă, în plus, $\mathcal{A}$ este local finit generată, atunci $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ este un spaţiu topologic Hausdorff complet relativ la această topologie [35, Section 2]. În particular, această afirmaţie este adevărată pentru $\mathcal{A} = \text{Mod-}R$. Tot în acest caz, putem constata cu uşurinţă că $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ împreună cu topologia finită este un subspaţiu al spaţiului topologic N^M înzestrat cu topologia produs, plecând de la topologia discretă pe fiecare componentă. În plus, sistemul fundamental de vecinătăţi ale punctului 0 dat mai sus poate fi rescris ca

$$\mathcal{V}(0) = \{V_F \mid F \text{ este o submulţime finită a mulţimii } M\},$$

unde $V_F = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \mid F \subseteq \ker f\}$. Într-adevăr, pentru orice mulţime finită $F \subseteq M$ se constată imediat că $V_F = V_{\langle F \rangle}$.

În ceea ce a mai rămas din acest paragraf considerăm un inel $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ graduat de un grup G, X o G-mulţime, iar $M \in \text{Gr-}R$ şi $N \in \text{Gr-}(X, R)$, particularizând uneori G-mulţimea X. Este clar că N este un R-modul, deci putem considera mulţimea $\mathrm{Hom}_R(M, N)$. De fapt avem de-a face cu o identificare a lui N cu $\mathbf{U}_\phi(N)$ unde $\phi : X \to \{1\} = G \backslash G$ este homomorphismul canonic de G-mulţimi (unic şi surjectiv), iar

$$\mathbf{U}_\phi : \text{Gr-}(X, R) \to \text{Gr-}(G \backslash G, R) = \text{Mod-}R.$$

În mod asemeănător, un R-modul $K\backslash G$-graduat N, unde $1 \leq K \leq H \leq G$, poate fi văzut, uitând graduarea, ca fiind $H\backslash G$-graduat. Este vorba aici de identificarea lui N cu $\mathbf{U}_{\phi}(N)$ unde $\phi : K\backslash G \to H\backslash G$ este homomorfismul canonic (surjectiv) de G-mulţimi. În cele ce urmează, nu numai în acest paragraf, vom omite scrierea functorului $\mathbf{U}_{\phi}$ atunci când nu este pericol de confuzie.

Lema 2.4.1. *Topologia finită pe* $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ *induce pe* $\mathrm{HOM}_{X,R}(M, N) \subseteq \mathrm{Hom}_R(M, N)$ *o structură de grup topologic determinată de sistemul fundamental de vecinătăţi ale originii*

$$\mathcal{W}(0) = \{W_F \mid F \textit{ este o submulţime finită a mulţimii } M\},$$

unde $W_F = \{f \in \mathrm{HOM}_{X,R}(M, N) \mid F \subseteq \ker f\}$*. În concluzie,* $\mathrm{HOM}_{X,R}(M, N)$ *echipat cu această topologie este un spaţiu Hausdorff.*

Demonstraţie. Dacă $F \subseteq M$ este o mulţime finită, atunci $W_F = V_F \cap \mathrm{HOM}_{X,R}(M, N)$, unde $V_F = \{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid F \subseteq \ker f\}$. Mai mult,

$$\mathcal{W}(f) = \{f + W_F \mid F \text{ este o submulţime finită a mulţimii } M\}$$

defineşte un sistem fundamental de vecinătăţi pentru orice $f \in \mathrm{HOM}_{X,R}(M, N)$. □

Topologia indusă pe $\mathrm{HOM}_{X,R}(M, N)$ de topologia finită pe $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ o vom numi de asemenea *finită*.

O familie $\{t_i \mid i \in I\}$ de puncte ale unui spaţiu topologic T se zice *sumabilă* la $t \in T$ dacă pentru orice vecinătate V a lui t există o submulţime finită J_V a lui I astfel încât $\sum_{i \in J} t_i \in V$ pentru orice submulţime finită a lui I satisfăcând $J_V \subseteq J$. Vom scrie în acest caz $\sum_{I \in I} t_i = t$.

Lema 2.4.2. *Considerăm spaţiul topologic* $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ *echipat cu topologia finită. Pentru ca o familie de puncte* $\{f_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{Hom}_R(M, N)$ *să fie sumabilă la* $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ *este suficient să verifice condiţia din definiţia sumabilităţii numai relativ la vecinătăţi de forma* $f + V_{\{m\}}$ *unde* m *este un element omogen al lui* M*.*

Demonstraţie. Fie $\{f_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{Hom}_R(M, N)$ care satisface condiţia a cărei suficienţă este afirmată în lemă. Fie $m = m_1 + \ldots + m_n \in M$ unde $m_1, \ldots, m_n$ sunt elemente omogene. Există atunci mulţimile finite $J_1, \ldots, J_n \subseteq I$ astfel încât pentru orice $j \in \{1, \ldots, n\}$ şi orice mulţime finită $J \subseteq I$ care conţine J_j avem $\sum_{i \in J} f_i \in f + V_{\{m_j\}}$, şi desigur $\sum_{i \in J} f_i(m_j) = f(m_j)$. Punem $J_m = \bigcup_{j=1}^{n} J_j$, deci pentru orice $j \in \{1 \ldots n\}$ avem $\left(\sum_{i \in J} f_i\right)(m_j) = f(m_j)$ aşadar $\sum_{i \in J} f_i \in f + V_{\{m\}}$ pentru orice mulţime finită $J \subseteq I$ care conţine J_m. În sfârşit fie $V = f + V_F$ o vecinătate a punctului $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, unde $F \subseteq M$ este finită. Cu metoda de mai sus, obţinem submulţimile finite J_m, $m \in F$ ale lui I astfel încât $\left(\sum_{i \in J} f_i\right)(m) = f(m)$ pentru orice $m \in F$ şi orice $J \subseteq I$ finită, conţinând J_m. Reunind din nou, punem $J_V = \bigcup_{m \in F} J_m$ şi rezultă că $\sum_{i \in J} f_i \in V$ pentru orice submulţime finită J a lui I care conţine J_V, aşadar $\sum_{i \in I} f_i = f$. $\square$

Teorema 2.4.3. *Considerăm $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ şi definim*

$$f_x : M = \bigoplus_{g \in G} M_g \to N,$$

pentru orice $x \in X$, cu componentele $f_x^g : M_g \to N$, $f_x^g(m_g) = f(m_g)_{xg}$ oricare ar fi $m_g \in M_g$ şi $g \in G$, unde prin $f(m_g)_{xg}$ inţelegem respectiva componenta omogenă de grad $xg \in X$ a elementului $f(m_g) \in N \in \mathrm{Gr}\text{-}(X, R)$. Avem atunci:

(a) $f_x \in \mathrm{HOM}_{X,R}(M, N)_x$ pentru orice $x \in X$.

(b) Familia $\{f_x \mid x \in X\}$ este sumabilă la f în topologia finită, iar componentele f_x sunt unic determinate de proprietatăţile $f_x \in \mathrm{HOM}_{X,R}(M, N)_x$ şi $\sum_{x \in X} f_x = f$.

(c) $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ este completarea spaţiului topologic $\mathrm{HOM}_{X,R}(M, N)$ în topologia finită.

Demonstraţie. (a) Este evident că f_x este un homomorfism de grupuri abeliene pentru orice $x \in X$. Mai mult, dacă $r_\gamma \in R_\gamma$, $\gamma \in G$, atunci $r_\gamma m_g \in M_{\gamma g}$, deci

$$f_x(r_\gamma m_g) = f_x^{\gamma g}(r_\gamma m_g) = f(r_\gamma m_g)_{x\gamma g} = (r_\gamma f(m_g))_{x\gamma g}.$$

Cum orice element al R-modulului X-graduat N are o unică descompunere în componente omogene, rezultă $f_x(r_\gamma m_g) = r_\gamma f_x(m_g)$, de unde f_x este R-liniară. Mai departe, că f_x aparţine componentei $\mathrm{HOM}_{X,R}(M, N)_x$ rezultă chiar din definiţia acestei funcţii.

(b) Conform lemei 2.4.2, putem să considerăm numai vecinătăţi de forma $f + V_{\{m_g\}}$, unde $m_g \in M_g$ pentru un element $g \in G$, fără a restricţiona generalitatea. Considerăm descompunerea în componente omogene $f(m_g) = n_{x_1} + \ldots + n_{x_k}$ cu $n_{x_j} \in N_{x_j}$ şi submulţimea finită $J_0 = \{x_1, \ldots x_k\}$ a mulţimii X. Atunci $f(m_g) = \left(\sum_{x \in J_0} f_x\right)(m_g)$, de unde $\sum_{x \in J_0} f_x \in$

$f+V_{\{m_g\}}$. Deoarece $f(m_g)=0$ pentru orice $x\in X\setminus J_0$, rezultă $f(m_g)=\left(\sum_{x\in J} f_x\right)(m_g)$ pentru orice submulţime finită J a lui I pentru care $J_0\subseteq J$. În consecinţă $\sum_{x\in J} f_x\in f+V_{\{m_g\}}$, aşadar $\sum_{x\in X} f_x=f$ în topologia finită.

Pentru a demonstra unicitatea afirmată de teoremă, presupunem că $\{g_x\mid x\in X\}$ este o altă familie de aplicaţii liniare astfel încât $g_x\in \mathrm{HOM}_{X,R}(M,N)_x$ şi $\sum_{x\in X} g_x=f$. Considerăm un element omogen $m_g\in M_g$, un element $x_0\in X$ şi vecinătatea $f+V_{\{m_g\}}$ a punctului f în topologia finită. Vom găsi atunci mulţimea finită $J_0\subseteq X$ cu proprietatea că $\sum_{x\in X} f_x\in f+V_{\{m_g\}}$ şi $\sum_{x\in X} g_x\in f+V_{\{m_g\}}$ oricare ar fi mulţimea finită J satisfăcând $J_0\subseteq J\subseteq I$. În particular $J=J_0\cup\{x_0\}$ este o mulţime finită care satisface aceste condiţii, deci $\left(\sum_{x\in J} f_x\right)(m_g)=f(m_g)=\left(\sum_{x\in J} g_x\right)(m_g)$. Din unicitatea descompunerii în componente omogene obţinem $f_{x_0}(m_g)=g_{x_0}(m_g)$. Prin urmare $f_{x_0}(m_g)=g_{x_0}(m_g)$ pentru orice element omogen $m_g\in M_g$, de unde $f_{x_0}=g_{x_0}$. Cum x_0 a fost ales arbitrar în X, rezultă $f_x=g_x$ pentru orice $x\in X$.

(c) Fie f un element al grupului $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ şi $m\in M$. Deoarece

$$\sum_{x\in J} f_x\in\bigoplus_{x\in X}\mathrm{HOM}_{X,R}(M,N)_x=\mathrm{HOM}_{X,R}(M,N),$$

pentru orice submulţime finită J a mulţimii X, iar familia $\{f_x\mid x\in X\}$ este sumabilă la f, obţinem că $\mathrm{HOM}_{G/H,R}(M,N)\cap\left(f+V_{\{m\}}\right)\neq 0$. Aşadar $\mathrm{HOM}_{G/H,R}(M,N)$ este dens în $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ cu topologia finită. Pe de altă parte $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ este un spaţiu topologic Hausdorff complet cu această topologie, deci el este completarea lui $\mathrm{HOM}_{X,R}(M,N)$. □

Corolarul 2.4.4. *(a) Dacă $\phi: X\to Y$ este un homomorfism surjectiv de G-mulţimi, atunci $\mathrm{HOM}_{X,R}(M,N)$ este dens in $\mathrm{HOM}_{Y,R}(M,\mathbf{U}_\phi(N))$ în topologia finită.*

(b) Dacă $K\leq H$ sunt subgrupuri ale grupului G, $M\in \mathrm{Gr}\text{-}R$ şi $N\in\mathrm{Gr}\text{-}(K\backslash G,R)$, atunci $\mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,N)$ este dens în $\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}\left(M,\mathbf{U}_{H\backslash G}^{K\backslash G}(N)\right)$ în topologia finită.

Propoziţia 2.4.5. *Dacă $K\leq H$ sunt subgrupuri ale grupului G, $M\in\mathrm{Gr}\text{-}R$ şi $N\in\mathrm{Gr}\text{-}(K\backslash G,R)$, iar $K\backslash H$ este o mulţime finită, atunci*

$$\mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,N)=\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}\left(M,\mathbf{U}_{H\backslash G}^{K\backslash G}(N)\right).$$

Demonstraţie. Pentru simplitate notăm $\mathbf{U}=\mathbf{U}_{H\backslash G}^{K\backslash G}$. Alegem un sistem de reprezentanţi $\{h_1,\dots,h_n\}=[K\backslash H]$ pentru clasele la dreapta ale subgrupului K în H. Deoarece $H=$

$\bigcup_{h\in[K\backslash H]} Kh$ avem $Hg = \bigcup_{h\in[K\backslash H]} Khg = Kh_1g \cup \ldots \cup Kh_ng$, iar $K\backslash G = \{Khg \mid g \in [H\backslash G], h \in [K\backslash H]\}$. Atunci

$$\begin{aligned} N = \bigoplus_{x\in K\backslash G} N_x &= \bigoplus_{g\in[K\backslash G]} \left(\bigoplus_{h\in[K\backslash H]} N_{Khg} \right) \\ &= \bigoplus_{g\in[H\backslash G]} \left(\bigoplus_{i=1}^{n} N_{Kh_ig} \right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\bigoplus_{g\in[H\backslash G]} N_{Kh_ig} \right). \end{aligned}$$

Vom nota atunci proiecţiile canonice corespunzătoare cu $p_i : N \to \bigoplus_{g\in[H\backslash G]} N_{Kh_ig}$, $1 \le i \le n$.

Considerăm mai întâi un homomorfism omogen $f \in \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M, \mathbf{U}(N))_{H\gamma}$, de grad $H\gamma$ cu $\gamma \in G$. Desigur avem atunci $p_if : M \to \bigoplus_{g\in[H\backslash G]} N_{Kh_ig}$, $1 \le i \le n$. Deoarece $f(M_g) \subseteq N_{H\gamma g}$ pentru orice $g \in G$, $kH \in G/H$ există un unic indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât $gh_iK \subseteq kgH$. Atunci f poate fi scris ca $\sum_{i=1}^{n}(p_if)$, unde $p_if \in \mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M, N)$. În final, cazul general când $f \in \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M, N)$ rezultă din cel particular considerat mai sus, ţinând cont că f poate fi scris ca o suma finită de homomorfisme omogene $f = f_{Hg_1} + \ldots + f_{Hg_s}$, cu $f_{Hg_j} \in \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M, N)_{Hg_j}$, $1 \le j \le s$. $\square$

2.5 Obiecte mici în categoria R-modulelor graduate

Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliana cu sume directe. Un obiect $A \in \mathcal{A}$ este numit *mic* dacă functorul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ comută cu sumele directe. Imediat se poate observa că, pentru ca un obiect $A \in \mathcal{A}$ să fie mic este suficient ca functorul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -)$ să comute numai cu sumele directe numărabile (vezi [72, Chapter V, Exercise 13]), ceea ce este echivalent mai departe cu faptul că orice morfism $f : A \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$, unde $A_n \in \mathcal{A}$ sunt obiecte oarecare, factorizează printr-o sumă directă $\bigoplus_{n\in F} A_n$, unde F este o submulţime finită a mulţimii numerelor naturale [49, Chapter II, Proposition 16.2]. Mai general, supunem că $A \in \mathcal{A}$ este A'-*mic* - sau mic relativ la A' - unde $A' \in \mathcal{A}$, dacă $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ comută cu sumele directe (numărabile) de copii de A'. În particular, pentru $A' = A$ obţinem conceptul de obiect *auto–mic*.

Propoziţia 2.5.1. *[35, Proposition 1.1] Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană cu sume directe şi $A \in \mathcal{A}$.*

(a) Obiectul A este mic dacă şi numai dacă el este mic relativ la orice obiect A' al categoriei $\mathcal{A}$.

(b) Dacă, în plus, categoria $\mathcal{A}$ este una Grothendieck, atunci A este mic dacă şi numai dacă el este mic relativ la orice obiect injectiv al categoriei $\mathcal{A}$.

Teorema 2.5.2. *[35, Theorem 1.3.] Considerăm două categorii abeliene cu sume directe $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$, iar $A \in \mathcal{A}$ şi $B \in \mathcal{B}$. Presupunem de asemenea că este dat un functor care comută cu sumele directe $\mathbf{F} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ şi care are un adjunct la stânga $\mathbf{U} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Avem atunci:*

(a) A este $\mathbf{F}(B)$-mic în $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă $\mathbf{U}(A)$ este B-mic în $\mathcal{B}$.

(b) Dacă A este mic în $\mathcal{A}$ atunci $\mathbf{U}(A)$ este mic în $\mathcal{B}$.

(c) Dacă, în plus, presupunem că $\mathbf{FU} \cong \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$, atunci A este mic (respectiv auto-mic) în $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă $\mathbf{U}(A)$ este mic (auto-mic) în $\mathcal{B}$.

Lema 2.5.3. *[35, p. 3176-3177] Într-o categorie Grothendieck $\mathcal{A}$, un obiect A este mic relativ la un altul A', presupunând că topologia finită pe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$ coincide cu cea discretă. Reciproca este de asemena adevărată, presupunând, în plus, categoria $\mathcal{A}$ ca fiind local finit generată, iar topologia finită pe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$ ca satisfăcând prima condiţie de numerabilitate.*

În particular, dacă M este un R-modul numărabil generat, unde R este un inel cu unitate, atunci M este N-mic pentru un R-modul oarecare N, exact atunci când topologia finită pe $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ este discretă.

Propoziţia 2.5.4. *Fie $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ un inel graduat de un grup G, iar $\phi : X \to Y$ un homomorfism surjectiv de G-mulţimi. Păstrăm notaţiile făcute în secţiunea 2.3. Pentru două obiecte $M, N \in \mathrm{Gr}\text{-}(X, R)\,\mathrm{Gr}\text{-}$ următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) $\mathbf{U}_\phi(M)$ este mic în $\mathrm{Gr}\text{-}(Y, R)$ dacă şi numai dacă M este mic în $\mathrm{Gr}\text{-}(X, R)$.

(b) $\mathbf{U}_\phi(M)$ este $\mathbf{U}_\phi(N)$-mic în $\mathrm{Gr}\text{-}(Y, R)$ dacă şi numai dacă M este $\mathbf{F}_\phi(\mathbf{U}_\phi(N))$-mic în $\mathrm{Gr}\text{-}(X, R)$.

Demonstraţie. (a) Proprietatea lui M de a fi mic în $\mathrm{Gr}\text{-}(X, R)$ se transmite asupra lui $\mathbf{U}_\phi(M)$ în virtutea Teoremei 2.5.2, (b), deoarece adjunctul la dreapta $\mathbf{F}_\phi$ al functorului

$\mathbf{U}_\phi$ comută cu sumele directe (vezi Lemma 2.3.5). Implicaţia conversă este o consecinţă imediată a faptului că $\mathrm{Hom}_{X,R}(M,N)$ este un subgrup, în particular o submulţime, în $\mathrm{Hom}_{Y,R}(M,N)$ pentru orice $N \in \mathrm{Gr}\text{-}(X,R)$.

(b) Este un caz particular al Teoremei 2.5.2, (a). $\square$

Observaţia 2.5.5. Pentru cazul în care $\phi : G \to H\backslash G$ este homomorfismul natural de G-mulţimi, afirmaţia (a) din teorema de mai sus spune că un un R-modul G-graduat M este mic exact atunci când $\mathbf{U}^{1\backslash G}_{H\backslash G}(M)$ este un obiect mic în $\mathrm{Gr}\text{-}(H\backslash G,R)$.

Lema 2.5.6. *Fie $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ un inel graduat de un grup G, X o G-mulţime, iar $M \in \mathrm{Gr}\text{-}R$ şi $N \in \mathrm{Gr}\text{-}(X,R)$. Dacă M este N-mic în $\mathrm{Mod}\text{-}R$, atunci*

$$\mathrm{HOM}_{X,R}(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M,N).$$

Demonstraţie. Conform Teoremei 2.4.3, oricărui homomorfism $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ de R-module i se asociază câte o familie de homomorfisme $\{f_x \in \mathrm{HOM}_{X,R}(M,N)_x \mid x \in X\}$, care este sumabilă la f în topologia finită, fiecare element f_x al acestei familii fiind definit de componentele $f_x^g : M_g \to N$, $f_x^g(m_g) = f(m_g)_{xg}$ oricare ar fi $m_g \in M_g$ şi $g \in G$. Deoarece descompunerea (unică) a unui element $f(m) \in N$ $(m \in M)$ în elemente omogene ale lui $N = \bigoplus_{x\in X} N_x$ este finită, rezultă că $f_x(m) \neq 0$ numai pentru un număr finit de elemente x ale mulţimii X. Aceasta arată că aplicaţia $g : M \to \bigoplus_{x\in X} N^x$, unde $N^x \cong N$, dată de $g(m) = (f_x(m))_{x\in X}$ pentru orice $m \in M$ este bine definită. Se verifică imediat că g este un R-homomorphism. Deoarece M este N-mic în $\mathrm{Mod}\text{-}R$, există $x_1,\ldots,x_n \in X$ astfel încât $g(M) \subseteq \bigoplus_{i=1}^n N^{x_i}$. Prin urmare $f_x = 0$ pentru orice $x \in X \setminus \{x_1,\ldots,x_n\}$. Cum ştim că $f = \sum_{x\in X} f_x = \sum_{i=1}^n f_{x_i}$, rezultă $f \in \mathrm{HOM}_{X,R}(M,N)$. $\square$

Corolarul 2.5.7. *Fie R un inel G-graduat şi $K \leq H \leq G$. Fie $M \in \mathrm{Gr}\text{-}R$ şi $N \in \mathrm{Gr}\text{-}(K\backslash G,R)$. Dacă M este N-mic în $\mathrm{Mod}\text{-}R$ atunci*

$$\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M,N) = \mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,N).$$

Teorema 2.5.8. *Fie R un inel graduat de un grup G, iar $K \leq H \leq G$ două subgrupuri astfel încât K este finit şi $K\backslash H$ este o mulţime infinită. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) M este mic în $\mathrm{Gr}\text{-}(H\backslash G,R)$ (respectiv $\mathrm{Mod}\text{-}R$, $\mathrm{Gr}\text{-}(K\backslash G,R)$ sau $\mathrm{Gr}\text{-}R$).

(ii) $\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M,\mathbf{U}(N)) = \mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,N)$ *pentru orice* $N \in \mathrm{Gr}\text{-}(K\backslash G,R)$*, unde* $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{K\backslash G}_{H\backslash G}$ *este functorul care uită graduarea.*

Demonstraţie. (i)⇒(ii) rezultă din Propoziţia 2.5.1 şi Corolarul 2.5.7.

(ii)⇒(i) Considerăm $M = \bigoplus_{g\in G} M_g \in \mathrm{Gr}\text{-}R$ cu proprietatea că

$$\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M,\mathbf{U}(N)) = \mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,N)$$

pentru orice $N \in \mathrm{Gr}\text{-}(K\backslash G,R)$. Considerăm de asemenea R-modulele G-graduate A_i cu $i \in \mathbb{N}$ şi alegem un R-homomorfism G-graduat (adică un morfism în $\mathrm{Gr}\text{-}R$) $f : M \to A$, unde $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Urmărim să arătăm că f factorizează printr-o sumă directă finită $A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_s}$. Cu acest scop punem $N = \bigoplus_{\gamma\in G} A(\gamma)$, unde $A(\gamma) \in \mathrm{Gr}\text{-}R$ este suspensia de grad γ a R-modulului G-graduat A. Chiar din construcţia lui N rezultă existenţa unui izomorfism G-graduat $N \cong N(\gamma)$, oricare ar fi $\gamma \in G$. Mai departe, notăm cu $[K\backslash H]$ un sistem de reprezentanţi pentru clasele la dreapta ale lui K în H. Deoarece $K\backslash H$ este o mulţime infinită, rezultă că există o aplicaţie injectivă $\mathbb{N} \to [K\backslash H]$, de unde deducem că există un monomorfism în $\mathrm{Gr}\text{-}(H\backslash G,R)$:

$$\alpha : N^{(\mathbb{N})} \to \bigoplus_{h\in[K\backslash H]} N(h).$$

Vom nota cu $q_1 : A = A(1) \to N$ şi cu $\rho_i : A_i \to A$ injecţiile canonice. Cum $\mathrm{Gr}\text{-}(K\backslash G,R)$ este o categorie Grothendieck, morfismul

$$q = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} (q_1\rho_i) : A \to N^{(\mathbb{N})}$$

este un monomorfism în $\mathrm{Gr}\text{-}R$.

Deoarece un element $n \in \bigoplus_{h\in[K\backslash H]} N(h)$ are o descompunere (unică) finită $n = n(h_1) + \ldots + n(h_k)$ cu $n(h_j) \in N(h_j), 1 \leq j \leq k$, putem defini un R-homomorfism

$$\beta : \bigoplus_{h\in[K\backslash H]} N(h) \to N,$$

prin $\beta(n) = \sum_{i=1}^{k} n(h_j) = \sum_{h\in[K\backslash H]} n(h)$. De fapt β este unicul R-homomorfism care face comutative toate diagramele de forma

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[dr, equal] & \bigoplus_{h\in[K\backslash H]} N(h) \arrow[d, "\beta"] \\ & N, \end{tikzcd}$$

având pe prima linie injecţiile canonice. Este clar

$$\beta\left(\bigoplus_{h\in[K\backslash H]} N(h)_{Kg}\right)=\beta\left(\bigoplus_{h\in[K\backslash H]} N_{Khg}\right)\subseteq N_{Hg},$$

unde N_{gH} este respectiva componenetă omogenă a R-modulului $H\backslash G$-graduat $\mathbf{U}(N)$. În consecinţă β este un R-homomorfism $K\backslash G$-graduat, deci şi unul $H\backslash G$-graduat.

Fie acum $\psi=\beta\alpha qf : M\to N$. Deoarece

$$\psi\in \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M,\mathbf{U}(N))_H=\mathrm{Hom}_{H\backslash G,R}(M,\mathbf{U}(N))$$

şi, prin ipoteză,

$$\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M,\mathbf{U}(N))=\bigoplus_{h\in[K\backslash H]}\mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,N)_{Kh},$$

există elementele $h_1,\dots,h_t\in[K\backslash H]$ şi $\psi_j\in\mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,N)_{Kh_j}$, $1\le j\le t$, astfel încât $\psi=\sum_{j=1}^{t}\psi_j$. Considerăm un element $(n(h))_{h\in[K\backslash H]}$ care este imaginea unui element omogen $m_g\in M_g$ prin morfismul αqf. Desigur, întrucât αqf este G-graduat, avem de asemenea $n(h)\in N(h)_g\cong N_{hg}$. Pe de altă parte, avem

$$\sum_{h\in[K\backslash H]} n(h)=\psi(m_g)\in\psi_1(M_g)+\ldots+\psi_t(M_g)\subseteq N_{Kh_1g}+\ldots+N_{Kh_tg},$$

de unde rezultă $n(h)=0$ pentru toţi $h\in[K\backslash H]$ care nu aparţin mulţimii $Kh_1\cup\ldots\cup Kh_t$. Prin urmare $\operatorname{im}\alpha qf\subseteq N_{Kh_1g}+\ldots+N_{Kh_tg}$, ceea ce împreună cu finitudinea lui K şi cu faptul că α şi q sunt funcţii injective, implică factorizarea dorită. $\square$

Exemplul 2.5.9. Fie $K\le H$ două subgrupuri ale grupului G, astfel încât $K\backslash H$ este o mulţime infinită. Considerăm inelul grupal $R=\mathbb{Z}G$ împreună cu graduarea naturală. Dacă $M=\bigoplus_{g\in G}R(g)$ este generatorul canonic al categoriei Gr-R, atunci $\mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,M)$ este strict inclus în $\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M,M)$.

2.6 Subcategorii rigide şi topologii Gabriel rigide

Fie G un grup, $H\le G$ iar $R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ un inel G-graduat. Notăm $\mathbf{U}=\mathbf{U}^{1\backslash G}_{H\backslash G}$ şi $\mathbf{F}=\mathbf{F}^{1\backslash G}_{H\backslash G}$. În contextul studiului categoriei Gr-$(H\backslash G,R)$ este util să considerăm subcategorii care sunt închise, într-un anume sens, la schimbarea graduării. Vom spune atunci că o subcategorie $\mathcal{D} \subseteq \text{Gr-}(H\backslash G, R)$ este *rigidă* dacă $\mathbf{UF}(M(g)) \in \mathcal{D}$, pentru orice $M \in \mathcal{D}$ şi orice $g \in G$. De remarcat că atunci când $H = 1$, o subcategorie a categoriei Gr- R este rigidă dacă şi numai dacă ea este închisă relativ la orice suspensie, definiţie care care coincide cu cea întâlnită în [36, Section 2].

Propoziţia 2.6.1. *Fie $\mathcal{C} \subseteq \text{Gr-}R$ şi $\mathcal{D} \subseteq \text{Gr-}(H\backslash G, R)$ două subcategorii închise rigide.*

(a) Notând cu $\overline{\mathbf{U}(\mathcal{C})}$ clasa formată din obiectele cât ale obiectelor de forma $\mathbf{U}(M)$, cu $M \in \mathcal{C}$, avem

$$\overline{\mathbf{U}(\mathcal{C})} = \mathbf{F}^{-1}(\mathcal{C}),$$

aceasta fiind cea mai mică subcategorie închisă care conţine $\mathbf{U}(\mathcal{C})$, care subcategorie este în plus rigidă. Mai mult, această subcategorie este localizantă, presupunând că $\mathcal{C}$ verifică acceaşi proprietate.

(b) Notând cu $\widetilde{\mathbf{F}(\mathcal{D})}$ clasa formată din subobiectele obiectelor de forma $\mathbf{F}(N)$, cu $N \in \mathcal{D}$, avem

$$\widetilde{\mathbf{F}(\mathcal{D})} = \mathbf{U}^{-1}(\mathcal{D}),$$

aceasta fiind cea mai mică subcategorie închisă care conţine $\mathbf{F}(\mathcal{D})$, care subcategorie este în plus rigidă. Mai mult, această subcategorie este localizantă, presupunând că $\mathcal{D}$ verifică aceeaşi proprietate.

Demonstraţie. (a) Deoarece $\mathbf{F}$ este exact şi comută cu sumele directe, deducem că $\mathbf{F}^{-1}(\mathcal{C})$ este o subcategorie închisă a categoriei $\text{Gr-}(H\backslash G, R)$. Desigur, aceeaşi exactitate a functorului $\mathbf{F}$ ne asigură că $\mathbf{F}^{-1}(\mathcal{C})$ este localizantă atunci când $\mathcal{C}$ este aşa.

Dacă $N \in \mathbf{F}^{-1}(\mathcal{C})$, atunci $\mathbf{F}(N) \in \mathcal{C}$, iar epimorfismul canonic $\xi_N : \mathbf{U}(\mathbf{F}(N)) \to N$ implică faptul că $N \in \overline{\mathbf{U}(\mathcal{C})}$.

Reciproc, dacă $N = \mathbf{U}(M)$ pentru un obiect $M \in \mathcal{C}$, atunci conform Lemei 2.3.7 rezultă că $\mathbf{F}(N) = \mathbf{F}(\mathbf{U}(M)) \cong \bigoplus_{\gamma \in G} M(\gamma)$, iar cum subcategoria $\mathcal{C}$ este rigidă şi închisă (la sume directe) obţinem $\mathbf{F}(N) \in \mathcal{C}$. Aceasta, împreună cu închiderea subcategoriei $\mathbf{F}^{-1}(\mathcal{C})$, arată că $\overline{\mathbf{U}(\mathcal{C})} \subseteq \mathbf{F}^{-1}(\mathcal{C})$.

Mai mult, este clar că orice subcategorie închisă a categoriei $\text{Gr-}(H\backslash G, R)$ care conţine $\mathbf{U}(\mathcal{C})$, conţine de asemenea şi $\overline{\mathbf{U}(\mathcal{C})}$, aşadar $\overline{\mathbf{U}(\mathcal{C})}$ este cea mai mică subcategorie închisă care satisface această proprietate.

În final, $\overline{\mathbf{U}(\mathcal{C})} = \mathbf{F}^{-1}(\mathcal{C})$ este rigidă, deoarece dacă $N \in \overline{\mathbf{U}(\mathcal{C})}$, atunci $\mathbf{F}(N)(\gamma) \in \mathcal{C}$ pentru orice $\gamma \in G$, de unde $\mathbf{U}(\mathbf{F}(N)(\gamma)) \in \overline{\mathbf{U}(\mathcal{C})}$.

(b) Verificarea egalităţii şi a minimalităţii afirmate în enunţ este similară cu cea de mai sus. Pentru a arăta că $\mathbf{U}^{-1}(\mathcal{D}) = \widetilde{\mathbf{F}(\mathcal{D})}$ este rigidă, fie $M \in \widetilde{\mathbf{F}(\mathcal{D})}$ şi $\gamma \in G$. Deoarece există un monomorfism $M \to \mathbf{F}(N)$ pentru un obiect $N \in \mathcal{D}$, deducem că există unul $M(\gamma) \to \mathbf{F}(N)(\gamma)$. Fie $M' = \mathbf{F}(N)(\gamma)$ şi $N' = \mathbf{U}(M')$. Atunci $N' \in \mathcal{D}$ deoarece $\mathcal{D}$ este rigidă. Compunând monomorfismul de mai sus cu monomorfismul $\zeta_{M'} : M' \to \mathbf{F}(\mathbf{U}(M')) = \mathbf{F}(N')$ obţinem un altul $M(\gamma) \to \mathbf{F}(N')$ în Gr- R, de unde $M(\gamma) \in \widetilde{\mathbf{F}(\mathcal{D})}$. □

Dacă $\mathcal{C} \subseteq$ Gr- R şi $\mathcal{D} \subseteq$ Gr-$(H\backslash G, R)$ sunt două subcategorii închise rigide, atunci vom nota $\mathcal{C}^{H\backslash G} = \mathbf{F}^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq$ Gr-$(H\backslash G, R)$ şi $\mathcal{D}^{1\backslash G} = \mathbf{U}^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq$ Gr- R. Desigur dacă $\mathcal{C} =$ Gr- R atunci $\mathcal{C}^{H\backslash G} =$ Gr-$(H\backslash G, R)$

Corolarul 2.6.2. *(a) Construcţiile de mai sus a unei subcategorii închise rigide a categoriei* Gr-$(H\backslash G, R)$ *plecând de la una a categoriei* Gr- R*, respectiv a unei subcategorii rigide închise a categoriei* Gr- R *plecând de la una a categoriei* Gr-$(H\backslash G, R)$ *sunt mutual inverse.*

(b) Orice subcategorie închisă rigidă a categoriei Gr-$(H\backslash G, R)$ *este de forma* $\mathcal{C}^{H\backslash G}$*, unde* $\mathcal{C}$ *este o subcategorie rigidă închisă a categoriei* Gr- R*.*

Demonstraţie. (a) Vom verifica numai prima parte, restul urmând a fi demonstrat în mod analog. Dacă $\mathcal{C}$ este o subcategorie rigidă închisă a categoriei Gr- R şi $M \in (\mathcal{C}^{H\backslash G})^{1\backslash G}$, atunci există $N \in \mathcal{C}^{H\backslash G}$ şi un monomorfism $M \to \mathbf{F}(N)$, conform Propoziţiei 2.6.1, (b). Pe de altă parte, punctul (a) al aceleiaşi Propoziţii ne spune că $\mathbf{F}(N) \in \mathcal{C}$, deci $M \in \mathcal{C}$, deoarece $\mathcal{C}$ este închisă la subobiecte. Reciproc dacă $M \in \mathcal{C}$, atunci $\mathbf{U}(M) \in \mathcal{C}^{H\backslash G}$, de unde $M \in (\mathcal{C}^{H\backslash G})^{1\backslash G}$ conform Propoziţiei 2.6.1 (b).

(b) Se aplică prima parte a acestui corolar. □

Observaţia 2.6.3. Fixăm o subcategorie închisă rigidă $\mathcal{C}^{1\backslash G} \subseteq$ Gr- R şi două subgrupuri $K \leq H \leq G$. Deoarece $\mathbf{U}^{1\backslash G}_{H\backslash G} = \mathbf{U}^{K\backslash G}_{H\backslash G}\mathbf{U}^{1\backslash G}_{K\backslash G}$ şi $\mathbf{F}^{1\backslash G}_{H\backslash G} = \mathbf{F}^{1\backslash G}_{K\backslash G}\mathbf{F}^{K\backslash G}_{H\backslash G}$, Propoziţia 2.6.1 arată că perechea de functori adjuncţi $(\mathbf{U}^{K\backslash G}_{H\backslash G}, \mathbf{F}^{K\backslash G}_{H\backslash G})$ între categoriile Gr-$(H\backslash G, R)$ şi Gr-$(K\backslash G, R)$ se restricţionează la o pereche de functori adjuncţi, notaţi în acelaşi fel, între $\mathcal{C}^{H\backslash G}$ şi $\mathcal{C}^{K\backslash G}$. Într-adevăr, dacă $M \in \mathcal{C}^{H\backslash G}$, atunci aplicând 2.6.1 (a) obţinem un epimorfism

$\mathbf{U}^{1\backslash G}_{K\backslash G}(L) \to M$, cu L un obiect din $\mathcal{C}^{1\backslash G}$, deci un epimorfism $\mathbf{U}^{1\backslash G}_{H\backslash G}(L) \to \mathbf{U}^{K\backslash G}_{H\backslash G}(M)$, de unde $\mathbf{U}^{K\backslash G}_{H\backslash G}(M) \in \mathcal{C}^{H\backslash G}$. Pe de altă parte, dacă $N \in \mathcal{C}^{H\backslash G}$, atunci aplicând aceeaşi Propoziţie obţinem $\mathbf{F}^{1\backslash G}_{K\backslash G}(\mathbf{F}^{K\backslash G}_{H\backslash G}(N)) = \mathbf{F}^{1\backslash G}_{H\backslash G}(N) \in \mathcal{C}$, deci $\mathbf{F}^{K\backslash G}_{H\backslash G}(N) \in \mathcal{C}^{K\backslash G}$.

Corolarul următor generalizează [36, Corollary 2.5 (i) şi Proposition 2.9].

Corolarul 2.6.4. *Fie $K \leq H$ sunt două subgrupuri ale grupului G şi $\mathcal{C} \subseteq$ Gr- R o subcategorie închisă rigidă. Dacă un obiect $M \in \mathcal{C}^{K\backslash G}$ este proiectiv sau generator în categoria $\mathcal{C}^{K\backslash G}$, atunci $\mathbf{U}^{K\backslash G}_{H\backslash G}(M)$ are aceeaşi proprietate în categoria $\mathcal{C}^{H\backslash G}$.*

Demonstraţie. Afirmaţia referitoare la proiectivitate rezultă imediat folosind faptul că $\mathbf{U}^{K\backslash G}_{H\backslash G}$ este un functor separabil (vezi [70, Section 4] pentru definiţia şi unele caracterizări ale separabilităţii).

Alegem un obiect $N \in \mathcal{C}^{H\backslash G}$. Deoarece $\mathbf{U}^{K\backslash G}_{H\backslash G}$ este exact şi comută cu sumele directe, obţinem un epimorfism

$$\mathbf{U}^{G/K}_{G/H}(M)^{(\Lambda)} \to \mathbf{U}^{G/K}_{G/H}(\mathbf{F}^{G/K}_{G/H}(N)) \xrightarrow{\xi_N} N,$$

unde Λ este o mulţime convenabil aleasă. $\square$

Observaţia 2.6.5. Considerăm două subgrupuri $K \leq H$ ale grupului G şi notăm $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{K\backslash G}_{H\backslash G}$ şi $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{K\backslash G}_{H\backslash G}$. Ca şi în [58, Propositions 4.3 – 4.8], vom considera următoarea "situaţie relativă".

Fie $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{C}$ două subcategorii închise rigide ale categoriei Gr- R astfel încât $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. Este evident atunci că $\mathcal{C}^{K\backslash G} \subseteq \mathcal{A}^{K\backslash G}$. Deoarece $\mathbf{U}^{1\backslash G}_{H\backslash G}$ şi $\mathbf{F}^{1\backslash G}_{H\backslash G}$ sunt functori exacţi, demonstraţia Propoziţiei 2.6.1 se aplică pentru a arăta că, dacă $\mathcal{C}$ este o subcategorie localizantă a categoriei $\mathcal{A}$, atunci $\mathcal{C}^{H\backslash G}$ este de asemenea localizantă în $\mathcal{A}^{H\backslash G}$. Presupunem în continuare că acesta este cazul. Conform observaţiei 2.6.3, functorii $\mathbf{U}$ şi $\mathbf{F}$ se restricţionează la

$$\mathcal{A}^{K\backslash G} \underset{\mathbf{F}}{\overset{\mathbf{U}}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}^{H\backslash G} \quad \text{şi} \quad \mathcal{C}^{K\backslash G} \underset{\mathbf{F}}{\overset{\mathbf{U}}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}^{H\backslash G}.$$

Considerăm functorii canonici

$$\mathcal{A}^{K\backslash G} \underset{\mathbf{i}^{K\backslash G}}{\overset{\mathbf{a}^{K\backslash G}}{\rightleftarrows}} \left(\mathcal{A}^{K\backslash G}\right) / \left(\mathcal{C}^{K\backslash G}\right) \quad \text{şi} \quad \mathcal{A}^{H\backslash G} \underset{\mathbf{i}^{H\backslash G}}{\overset{\mathbf{a}^{H\backslash G}}{\rightleftarrows}} \left(\mathcal{A}^{H\backslash G}\right) / \left(\mathcal{C}^{H\backslash G}\right),$$

iar apoi definim functorii

$$\left(\mathcal{A}^{K\backslash G}\right) / \left(\mathcal{C}^{K\backslash G}\right) \underset{\overline{\mathbf{F}}}{\overset{\overline{\mathbf{U}}}{\rightleftarrows}} \left(\mathcal{A}^{H\backslash G}\right) / \left(\mathcal{C}^{H\backslash G}\right)$$

prin $\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{a}^{H\backslash G}\mathbf{U}\mathbf{i}^{K\backslash G}$ şi $\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{a}^{K\backslash G}\mathbf{F}\mathbf{i}^{H\backslash G}$.

Exact ca şi în cazul tratat în [58], caz în care $K = 1$ şi $H = G$, se demonstrază următoarele proprietăţi ale functorilor $\overline{\mathbf{U}}$ şi $\overline{\mathbf{F}}$.

Propoziţia 2.6.6. *(a)* $\overline{\mathbf{U}}\mathbf{a}^{K\backslash G} = \mathbf{a}^{H\backslash G}\mathbf{U}$.

(b) $\overline{\mathbf{U}}$ *şi* $\overline{\mathbf{F}}$ *sunt exacţi.*

(c) $\overline{\mathbf{F}}$ *este adjunctul la dreapta al functorului* $\overline{\mathbf{U}}$ *şi comută cu sumele directe.*

(d) Dacă $M \in \left(\mathcal{A}^{K\backslash G}\right) / \left(\mathcal{C}^{K\backslash G}\right)$ *este proiectiv, respectiv generator sau mic, atunci* $\overline{\mathbf{U}}(M)$ *este proiectiv, generator sau mic în* $\left(\mathcal{A}^{H\backslash G}\right) / \left(\mathcal{C}^{H\backslash G}\right)$.

În cele ce urmează vom nota cu $\mathcal{L}^{H\backslash G}(M)$ laticea submodulelor $H\backslash G$-graduate ale unui modul $M \in \text{Gr-}(H\backslash G, R)$. Mai notăm cu G/H mulţimea claselor la stânga definite de H în G, şi cu $[G/H]$ un sistem de reprezentanţi pentru aceste clase.

Lema 2.6.7. *Dacă* $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ *este un inel graduat de un grup* G*,* H *este un subgrup al lui* G*,* M *este un* R*-modul* $H\backslash G$*-graduat, iar* $m \in M_{Hg}$ *este un element omogen al lui* M*, atunci* $\operatorname{ann}_R^M(m) \in \mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1}))$.

Demonstraţie. Se verifică prin calcul că aplicaţia $\mathbf{U}_{H\backslash G}^{1\backslash G}(R(g^{-1})) \to M,\ r \mapsto rm$ este un homomorfism de R-module $H\backslash G$-graduate, deci nucleul său este un submodul $H\backslash G$-graduat al lui $R(g^{-1})$. Pe de altă parte este evident că acest nucleu este $\operatorname{ann}_R^M(m)$. □

După cum se vede din lema anterioară, graduarea pe anulatorul unui element omogen $m \in \mathrm{h}(M)$ depinde de graduarea existentă pe M. Aceasta explică notaţia folosită aici pentru anulator, în care R-modului $H\backslash G$-graduat M apare în mod explicit.

Categoria $\text{Gr-}(H\backslash G, R)$ este, după cum afirmă Propoziţia 2.3.3, echivalentă cu o categorie de module peste o categorie preaditivă mică. Specializând definiţia dată în secţiunea 2.1, vom spune că o *topologie liniară (Gabriel)* $H\backslash G$*-graduată* (la dreapta) pe R este o familie

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_{gH} \subseteq \mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1})) \mid g \in [G/H]\},$$

satisfacând primele două, respectiv cele trei, axiome de mai jos:

T1. Pentru orice $g \in [G/H]$, $\mathcal{G}_{gH}$ este un filtru pe laticea $\mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1}))$.

T2. Dacă $I \in \mathcal{G}_{gH}$ şi $a \in R(g^{-1})_{H\gamma} = R_{gH\gamma}$ este un element omogen, unde $g, \gamma \in G$, atunci $(I : a) \in \mathcal{G}_{\gamma H}$.

T3. Dacă $I \in \mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1}))$ cu $g \in [G/H]$ cu proprietatea că există $I' \in \mathcal{G}_{gH}$ astfel încât $(I : a) \in \mathcal{G}_{\gamma H}$ pentru orice $a \in \mathrm{h}(I')$ cu $\deg(a) = H\gamma$, atunci $I \in \mathcal{G}_{gH}$.

Ţinând cont că dacă $I \in \mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1}))$, pentru un element $g \in G$, atunci $(I : a) = \mathrm{ann}_R^{(R(g^{-1})/I)}(a + I)$ pentru orice $a \in \mathrm{h}(R(g^{-1}))$, Lemma 2.6.7 ne asigură că în expunerea axiomelor T2 şi T3, condiţia $(I : a) \in \mathcal{G}_{\gamma H}$ este consistentă de fiecare dată. Desigur ca şi în cazul general al modulelor peste o categorie preaditivă mică, o topologie liniară poate fi indexată după mulţimea obiectelor acesei categorii şi anume $[H\backslash G]$. Explicarea alegerii mulţimii $[G/H]$ ca mulţime de indici constă din existenţa bijecţiei $[H\backslash G] \to [G/H]$, $Hg \mapsto g^{-1}H$. Preferăm această mulţime de indici deoarece dacă $g, g' \in G$ atunci $\mathbf{U}_{H\backslash G}^{1\backslash G}(R(g^{-1})) = \mathbf{U}_{H\backslash G}^{1\backslash G}(R(g'^{-1}))$ în Gr-$(H\backslash G, R)$ exact atunci când $gH = g'H$.

Propoziţia 2.6.8. *Există o corespondenţă bijectivă între clase de pretorsiune ereditare în* Gr-$(H\backslash G, R)$ *şi topologii liniare $H\backslash G$-graduate. Mai mult, acesta se restricţionează la o corespondenţă bijectivă între clase de torsiune ereditare şi topologii Gabriel $H\backslash G$-graduate.*

Demonstraţie. Plecând de la o clasă de pretorsiune ereditară $\mathcal{T}$ în Gr-$(H\backslash G, R)$, definim

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{T}) = \{\mathcal{G}_{gH} \mid g \in [G/H]\}, \text{ unde } \mathcal{G}_{gH} = \{I \in \mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1})) \mid R(g^{-1})/I \in \mathcal{T}\}.$$

Mulţimea $\mathcal{G}_{Hg}$ formează un filtru pe laticea $\mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1}))$, unde $g \in [G/H]$ este un element fixat, deoarece $\mathcal{T}$ este închisă la module cât şi la submodule, iar

$$R(g^{-1})/(I \cap I') \to (R(g^{-1})/I) \times (R(g^{-1})/I') \cong (R(g^{-1})/I) \oplus (R(g^{-1})/I')$$

este o scufundare pentru orice două ideale $I, I' \in \mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1}))$.

Fie $I \in \mathcal{G}_{gH}$ şi $a \in R(g^{-1})_{H\gamma}$, unde $g, \gamma \in G$. Atunci nucleul R-homomorfismului $H\backslash G$-graduat $R(\gamma^{-1}) \to R(g^{-1})/I$, $x \mapsto ax + I$ este chiar $(I : a)$. În consecinţă, diagrama cu linii exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (I : a) \arrow[r] \arrow[d, equal] & R(\gamma^{-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & R(\gamma^{-1})/(I : a) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & (I : a) \arrow[r] & R(\gamma^{-1}) \arrow[r] & R(g^{-1})/I &
\end{tikzcd}$$

poate fi completată cu un morfism $R(\gamma^{-1})/(I:a) \to R(g^{-1})/I$ în Gr-$(H\backslash G, R)$, lema ker-coker arătând atunci că $R(\gamma^{-1})/(I:a)$ este izomorf cu un R-submodul $H\backslash G$-graduat al modulului $R(g^{-1})/I \in \mathcal{T}$, deci $(I:a) \in \mathcal{G}_{\gamma H}$.

Având acum o topologie liniară $H\backslash G$-graduată $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_{gH} \mid g \in [G/H]\}$, definim $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{G})$ ca fiind clasa acelor module $\{M \in$ Gr-$(H\backslash G, R)$ cu proprietatea că $\operatorname{ann}_R^M(m) \in \mathcal{G}_{gH}$ pentru orice $m \in \mathrm{h}(M)$ cu $\deg(m) = Hg$, unde $g \in [H\backslash G]$ este un element arbitrar. Din nou atenţionăm asupra faptului că dacă $m \in M_{Hg}$, atunci $\operatorname{ann}_R^M(m) \in \mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1}))$ conform Lemei 2.6.7. Se verifică uşor că definiţia de mai sus a clasei $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ conduce la o clasă de torsiune ereditară.

Plecând de la o clasă de pretorsiune ereditară $\mathcal{T}$ în Gr-$(H\backslash G, R)$, pentru a demonstra egalitatea $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$, folosim proprietăţile de închidere ale clasei $\mathcal{T}$ şi scrierea unui obiect $M \in$ Gr-$(H\backslash G, R)$ ca $M = \sum_{m \in \mathrm{h}(M)} mR$, unde $mR \cong R(g^{-1})/\operatorname{ann}_R^M(m)$ pentru orice $m \in M_{Hg}$ cu $g \in [H\backslash G]$. Pornind cu $\mathcal{G}$ o topologie liniară $H\backslash G$-graduată pe R, scrierea unui ideal $I \in \mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1}))$ ca $I = \operatorname{ann}_R^{R(g^{-1})/I}(1+I)$ este utilă pentru a demonstra că $\mathcal{G}(\mathcal{T}(\mathcal{G})) = \mathcal{G}$.

În final presupunem că $\mathcal{T}$ este o clasă de torsiune ereditară în Gr-$(H\backslash G, R)$ şi fie $I \in \mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1}))$ astfel încât există $I' \in \mathcal{G}_{gH}$ cu proprietatea $(I:a) \in \mathcal{G}_{\gamma H}$ pentru orice $\gamma \in [G/H]$ şi orice $a \in I'_{H\gamma}$. Pe de o parte avem $I'/(I \cap I') = \sum_{a \in \mathrm{h}(I')} (a + I \cap I')R \cong \sum_{a \in \mathrm{h}(I')} R(g_a^{-1})/\operatorname{ann}_R^{(I'/(I \cap I'))}(a + I \cap I')$, unde $\deg(a) = Hg_a$ şi $\operatorname{ann}_R^{(I'/(I\cap I'))}(a + I \cap I') = (I \cap I' : a) = (I:a)$, deci $I'/(I \cap I') \in \mathcal{T}$. Deoarece $R(g^{-1})/(I + I') \in \mathcal{T}$, închiderea clasei $\mathcal{T}$ la extinderi împreună cu şirul scurt exact în Gr-$(H\backslash G, R)$

$$0 \to I'/(I \cap I') \to (R(g^{-1})/I) \to (R(g^{-1})/(I + I')) \to 0$$

arată că $I \in \mathcal{G}_{gH}$. Reciproc, dacă $\mathcal{G}$ este o topologie Gabriel, pentru a arăta că $M \in \mathcal{T}$ presupunând că $N, M/N \in \mathcal{T}$ unde $N \leq M$, arătăm că $\operatorname{ann}_R^M(m) \in \mathcal{G}_{gH}$ pentru orice $m \in M_{Hg}$, folosind axioma T3 în care $I' = \operatorname{ann}_R^{M/N}(m + N)$. $\square$

În continuare vom căuta topologiile asociate unei clase de (pre)torsine ereditare rigide. Cu acest scop, să observăm mai întâi că, dacă "uităm" graduarea, atunci toate mulţimile $\mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1}))$ cu $g \in [G/H]$, sunt egale. Mai precis, pentru orice $g \in [G/H]$, vom defini o bijecţie

$$\varphi_g : \mathcal{L}^{H\backslash G}(R) \to \mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1})),$$

care aplică un ideal $H\backslash G$-graduat I într-un submodul $H\backslash G$-graduat I^g al lui $R(g^{-1})$, cu proprietatea că I şi I^g sunt egale ca submulţimi ale mulţimii R. Într-adevăr, fie $I \in \mathcal{L}^{H\backslash G}(R)$ şi fixăm $g \in [G/H]$. Atunci $R/I \in \text{Gr-}(H\backslash G, R)$, iar $I = \text{ann}_R^{R/I}(1+I)$. Să observăm că în R-modulul $H\backslash G$-graduat

$$M = \mathbf{U}_{H\backslash G}^{1\backslash G}\left(\left(\mathbf{F}_{H\backslash G}^{1\backslash G}(R/I)\right)(g^{-1})\right) = \bigoplus_{\gamma\in[H\backslash G]} M_{H\gamma},$$

unde $M_{H\gamma} = \bigoplus_{h\in H}(R/I)_{Hg^{-1}h\gamma}$, elementul $1+I$ are gradul gH, deci conform Lemei 2.6.7, anulatorul său, pe care îl vom nota I^g, este un element al laticii $\mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1}))$ şi desigur ca mulţime coincide cu I. Nu este greu de văzut că printr-o construcţie similară obţinem inversa aplicaţiei φ_g.

Dacă $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_{gH} \mid g \in [G/H]\}$ cu $\mathcal{G}_{gH} \subseteq \mathcal{L}^{H\backslash G}(R(g^{-1}))$ este o topologie liniară (Gabriel) a $H\backslash G$-graduată, vom spune că ea este *rigidă* dacă aplicaţia φ_g se restricţionează la o bijecţie de la $\mathcal{G}_H$ la $\mathcal{G}_{Hg}$ pentru orice $g \in [G/H]$.

Propoziţia 2.6.9. *Corespondenţa definită în Propoziţia 2.6.8 aplică clasele de pretorsiune (torsiune) ereditare rigide din* Gr-$(H\backslash G, R)$ *în topologii liniare (Gabriel) $H\backslash G$-graduate rigide şi reciproc.*

Demonstraţie. Notăm $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{H\backslash G}^{1\backslash G}$ şi $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{H\backslash G}^{1\backslash G}$. Considerăm o topologie liniară $H\backslash G$-graduată rigidă pe inelul graduat R, şi fie $\mathcal{T}$ clasa de pretorsiune corespunzătoare, în conformitate cu Propoziţia 2.6.8. Fie $M \in \mathcal{T}$ şi $M' = \mathbf{U}(\mathbf{F}(M)(g^{-1}))$, unde $g \in G$. Un element

$$m \in M'_{H\gamma} \cong \bigoplus_{h\in H} M_{Hg^{-1}h\gamma},$$

cu $\gamma \in [H\backslash G]$ arbitrar, este o sumă $m = m_1 + \ldots + m_k$, unde $m_i \in M_{Hg^{-1}h_i\gamma}$, $1 \le i \le k$. Dar $\text{ann}_R^M(m_i) \in \mathcal{G}_{\gamma^{-1}h_i^{-1}gH}$, deoarece $M \in \mathcal{T}$. Rigiditatea topologiei de la care am pornit implică $\text{ann}_R^{M'}(m_i) \in \mathcal{G}_{\gamma H}$. În concluzie anulatorul elementului m aparţine filtrului $\mathcal{G}_{\gamma H}$, deoarece el include $\text{ann}_R^{M'}(m_1) \cap \ldots \cap \text{ann}_R^{M'}(m_k)$, deci $\mathcal{T}$ este rigidă.

Reciproc, dacă $\mathcal{T}$ este rigidă, atunci $R/I \in \mathcal{T}$ implică $\mathbf{U}(\mathbf{F}(R/I)(g^{-1})) \in \mathcal{T}$, pentru orice $I \in \mathcal{G}_H$. După cum am văzut mai înainte elementul $1+I$ este de gradul Hg în $\mathbf{U}(\mathbf{F}(R/I)(g^{-1}))$, aşadar anulatorul său I^g aparţine filtrului $\mathcal{G}_{gH}$. $\square$

Fie $\mathcal{G}^{1\backslash G} = \{\mathcal{G}_g^{1\backslash G} \mid g \in G\}$ o topologie liniară (Gabriel) G-graduată rigidă pe inelul G-graduat R şi fie $\mathcal{T}^{1\backslash G}$ clasa de pretorsiune (torsiune) ereditară asociată. Pentru a da o topologie liniară (Gabriel) $H\backslash G$-graduată rigidă $\mathcal{G}^{H\backslash G} = \left\{\mathcal{G}^{H\backslash G}_{gH} \mid g \in [G/H]\right\}$ pe R este suficient să cunoaştem $\mathcal{G}_H$, restul fiind completat prin intermediul bijecţiilor φ_g cu $g \in [G/H]$. Definim atunci

$$\mathcal{G}_H = \{I \in \mathcal{L}^{H\backslash G}(R) \mid \text{există } J \in \mathcal{G}_g \text{ astfel încât } J \subseteq I\},$$

incluziunea $J \subseteq I$ fiind văzută ca una de mulţimi.

Propoziţia 2.6.10. *Folosim notaţiile de mai sus şi punem* $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{1\backslash G}_{H\backslash G}$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{1\backslash G}_{H\backslash G}$.

(a) $\mathcal{G}^{H\backslash G}$ *este cea mai mică topologie liniară (Gabriel) $H\backslash G$-graduată rigidă pe R care conţine* $\mathbf{U}(J)$, *pentru orice $g \in G$ şi orice $J \in \mathcal{G}_g$.*

(b) Dacă $\mathcal{T}^{H\backslash G}$ *este clase de pretorsiune (torsiune) ereditară rigidă asociată cu* $\mathcal{G}^{H\backslash G}$, *atunci*

$$\mathcal{T}^{H\backslash G} = \{M \in \mathrm{Gr}\text{-}(H\backslash G, R) \mid \mathbf{F}(M) \in \mathcal{T}^{1\backslash G}\};$$

reciproc, dacă $\mathcal{T}^{H\backslash G}$ *este definită de acastă egalitate, atunci topologia corespondentă este exact cea dată înainte.*

Demonstraţie. Pentru început vom arăta o parte a afirmaţiei de la (a), şi anume faptul că $\mathcal{G}^{H\backslash G}$ este o topologie liniară, cu condiţia că $\mathcal{G}^{1\backslash G}$ este aşa. Într-adevăr, $\mathcal{G}^{H\backslash G}_H$ este în mod evident un filtru pe laticea $\mathcal{L}^{H\backslash G}(R)$. Mai departe, fie $I \in \mathcal{G}^{H\backslash G}_H$, şi fie $a \in R_{H\gamma} \cong \bigoplus_{h\in H} R_{h\gamma}$. Prin definiţia filtrului $\mathcal{G}^{H\backslash G}_H$, există $J \in \mathcal{G}^{1\backslash G}_g$, astfel încât $J \subseteq I$. Pe de altă parte $a = a_1 + \ldots + a_k$, cu $a_i \in R_{h_i}\gamma$, $1 \leq i \leq k$, unde $h_i \in H$. Deoarece $\mathcal{G}^{1\backslash G}$ este o topologie liniară G-graduată, deducem că $(J : a_i) \in \mathcal{G}^{1\backslash G}_{h_i\gamma}$. Cu ajutorul bijecţiilor φ_g găsim idealele $J_i \in \mathcal{G}^{1\backslash G}_\gamma$, cu proprietatea că J_i şi $(J : a_i)$ au acceaşi mulţime suport pentru orice $i \in \{1 \ldots k\}$. Desigur, $J_1 \cap \ldots \cap J_k \subseteq (I : a)$.

Acum, corespondenţele definite de Propoziţiile 2.6.8 şi 2.6.9 împreună cu afirmaţia de la (b), pe care o vom arăta în continuare, completează demonstraţia. Considerăm modulul $H\backslash G$-graduat $M \in \mathcal{T}^{H\backslash G}$ şi notăm $\widetilde{M} = \mathbf{F}(M)$. Atunci, pentru un element $\gamma \in G$, rezultă $\widetilde{M(g^{-1})}_\gamma = \widetilde{M}_{g^{-1}\gamma} \cong M_{Hg^{-1}\gamma}$. Deoarece pentru orice element $m \in \widetilde{M}(g^{-1})_\gamma$ avem $\mathrm{ann}^M_R(m) \in \mathcal{G}^{H\backslash G}_{g^{-1}\gamma H}$, există $J \in \mathcal{G}^{1\backslash G}_{g^{-1}\gamma}$ astfel încât $J \subseteq \mathrm{ann}^M_R(m)$. Dar $\mathrm{ann}^{\widetilde{M}}_R(m) = \mathrm{ann}^M_R(m)$, aşadar $\mathrm{ann}^{\widetilde{M}}_R(m) \in \mathcal{G}^{1\backslash G}_{g^{-1}\gamma}$, de unde $\widetilde{M} \in \mathcal{T}^{1\backslash G}$.

Reciproc, dacă M aparţine clasei de pretorsiune ereditară din $\mathrm{Gr}\text{-}(H\backslash G, R)$ definită de egalitatea $\mathbf{F}(M) \in \mathcal{T}^{1\backslash G}$, atunci există un epimorfism $f : \mathbf{U}(N) \to M$, cu $N \in \mathcal{T}^{1\backslash G}$

convenabil ales. Pentru un element $m \in M_{Hg}$, există $n \in \mathbf{U}(N)_{Hg} \cong \bigoplus_{h\in H} N_{hg}$, astfel încât $f(n) = m$. Deducem $\mathrm{ann}_R^N(n) \subseteq \mathrm{ann}_R^M(m)$. Fie $n = n_1 + \ldots + n_k$, cu $n_i \in N_{h_i g}$ descompunerea lui n în suma directă de mai sus. Avem $\mathrm{ann}_R^N(n_i) \in \mathcal{G}_{h_i g}^{H\backslash G}$. Folosind bijecţiile φ_g, $g \in [G/H]$, aceste ideale dau imagini cu acelaşi suport aparţinând toate filtrului $\mathcal{G}_g^{1\backslash G}$. Notând cu $J \in \mathcal{G}_g^{1\backslash G}$ intersecţiile tuturor acestor imagini, avem $J \subseteq \mathrm{ann}_R^M(m)$.

În final, punând

$$\mathcal{T}^{H\backslash G} = \{M \in \text{Gr-}(H\backslash G, R) \mid \mathbf{F}(M) \in \mathcal{T}^{1\backslash G}\} = \mathbf{F}^{-1}(\mathcal{T}^{1\backslash G}),$$

ea este o clasă de pretorsiune ereditară după cum am văzut în Propoziţia 2.6.8. Desigur topologia $\mathcal{G}^{H\backslash G}$ obţinută prin procedura indicată mai sus este chiar cea care corespunde acestei clase de pretorsiune. □

Observaţia 2.6.11. Fie J un ideal bilateral idempotent G-graduat al inelului R. Atunci J determină o topologie Gabriel G-graduată rigidă $\mathcal{G}^{1\backslash G}$ pe R, care determină la rândul ei o topologie Gabriel $H\backslash G$-graduată rigidă $\mathcal{G}^{H\backslash G}$, unde

$$\mathcal{G}_{gH}^{H\backslash G} = \{I \in \mathcal{L}_{gH}^{H\backslash G}(R) \mid J \subseteq I\},$$

pentru orice $g \in [G/H]$.

Nu este greu să arătăm, aşa ca în [72, Example 3, p. 200], că un obiect $N \in \text{Gr-}(H\backslash G, R)$ este de torsiune (închis) relativ la $\mathcal{G}^{H\backslash G}$ dacă şi numai dacă $JN = 0$, sau echivalent, $J \otimes_R N = 0$ (respectiv homomorfismul canonic $N \to \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(J, N)$ este un izomorfism).

Mai notăm şi

Lema 2.6.12. *Considerăm $K \leq H$ două subgrupuri ale grupului G şi $\mathcal{C}^{1\backslash G}$ o subcategorie închisă rigidă a categoriei* Gr-R. *Notăm $\mathbf{t}_{H\backslash G}$ şi $\mathbf{t}_{K\backslash G}$ preradicalii asociaţi categoriilor închise $\mathcal{C}^{H\backslash G}$, respectiv $\mathcal{C}^{K\backslash G}$ şi fie $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{H\backslash G}^{K\backslash G}$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{H\backslash G}^{K\backslash G}$.*

(a) Dacă $N \in$ Gr-$(H\backslash G, R)$ *este $\mathcal{C}^{H\backslash G}$-fără torsiune, atunci $\mathbf{F}(N)$ este $\mathcal{C}^{K\backslash G}$-fără torsiune.*

(b) $\mathbf{t}_{H\backslash G}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{t}_{H\backslash G}$.

Demonstraţie. (a) Fie $M \in \mathcal{C}^{K\backslash G}$. Atunci

$$\mathrm{Hom}_{(K\backslash G,R)}(M, \mathbf{F}(N)) \cong \mathrm{Hom}_{(H\backslash G,R)}(\mathbf{U}(M), N) = 0$$

deoarece $\mathbf{U}(M) \in \mathcal{C}^{H\backslash G}$. În consecinţă, $\mathbf{F}(N)$ este $\mathcal{C}^{K\backslash G}$-fără torsiune.

(b) Fie $\mathcal{G}^{1\backslash G}$ topologia liniară G-graduată rigidă corespunzătoare subcategoriei închise $\mathcal{C}$. Atunci

$$\mathcal{G}_{gH}^{H\backslash G} = \{J \in \mathcal{L}_{gH}^{H\backslash G}(R) \mid \text{există } I \in \mathcal{G}_{gK}^{K\backslash G} \text{ astfel încât } \mathbf{U}(I) \leq J\},$$

deoarece putem alege I să fie un ideal G-graduat. Acum, se aplică argumentul folosit în [36, Proposition 2.2]. □

2.7 Echivalenţe pentru categorii de module graduate

Fie $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ un inel graduat de un grup G, $H \leq G$ şi M un R-modul G-graduat. Notăm $\widetilde{M} = \bigoplus_{g\in G} M(g)$. Vom considera următoarele subcategorii ale categoriei Gr- R asociate cu M: $\boldsymbol{\sigma}^{1\backslash G}[M] = \boldsymbol{\sigma}[\widetilde{M}]$, $\mathrm{Gen}^{1\backslash G}[M] = \mathrm{Gen}[\widetilde{M}]$, $\mathrm{Pres}^{1\backslash G}[M] = \mathrm{Pres}[\widetilde{M}]$. Corespunzător vom defini următoarele subcategorii ale categoriei Gr-$(H\backslash G, R)$: $\boldsymbol{\sigma}^{H\backslash G}[M] = \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{U}(\widetilde{M})]$, $\mathrm{Gen}^{H\backslash G}[M] = \mathrm{Gen}[\mathbf{U}(\widetilde{M})]$, respectiv $\mathrm{Pres}^{H\backslash G}[M] = \mathrm{Pres}[\mathbf{U}(\widetilde{M})]$, unde cu $\mathbf{U}$ am notat functorul $\mathbf{U}_{H\backslash G}^{1\backslash G}$. Se poate observa că $\boldsymbol{\sigma}^{1\backslash G}[M]$ este o subcategorie închisă rigidă, iar $\boldsymbol{\sigma}^{H\backslash G}[M]$ este chiar corespondenta aşa cum este definită de Propoziţia 2.6.1. Mai mult, din definiţia celorlalte două perechi de subcategorii, exactitata functorilor $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{H\backslash G}^{1\backslash G}$ şi $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{H\backslash G}^{1\backslash G}$, Lema 2.3.7 şi din faptul că $\widetilde{M}$ este izomorf cu orice suspensie a sa, se poate arăta imediat că functorii $\mathbf{U}$ şi $\mathbf{F}$ induc functori între fiecare dintre perechile $\mathrm{Gen}^{1\backslash G}[M]$ şi $\mathrm{Gen}^{H\backslash G}[M]$ respectiv $\mathrm{Pres}^{1\backslash G}[M]$ şi $\mathrm{Pres}^{H\backslash G}[M]$.

În acord cu Corolarul 2.6.4 rezultă că M este proiectiv în $\boldsymbol{\sigma}^{1\backslash G}[M]$ dacă şi numai dacă el este proiectiv în $\boldsymbol{\sigma}^{H\backslash G}[M]$, sau echivalent, dacă M este un R-modul Σ-quasiproiectiv. Mai mult, acelaşi Corolar ne spune că $\mathbf{U}(\widetilde{M})$ este un generator al categoriei $\boldsymbol{\sigma}^{H\backslash G}[M]$ deoarece $\widetilde{M}$ este un generator al categoriei $\boldsymbol{\sigma}^{1\backslash G}[M]$.

Notăm $E = \mathrm{END}_R(M)$. După cum am văzut în Lema 2.3.8, functorii

$$\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M, -) : \text{Gr-}(H\backslash G, R) \to \text{Gr-}(H\backslash G, E)$$

$$- \otimes_E M : \text{Gr-}(H\backslash G, E) \to \text{Gr-}(H\backslash G, R)$$

sunt adjuncţi, unitatea şi counitatea de adjuncţie fiind date de

$$u_B^{H\backslash G} : B \to \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M, B \otimes_E M),\ u_B^{H\backslash G}(b) : m \mapsto b \otimes m,$$

$$v_A^{H\backslash G} : \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M, A) \otimes_E M \to A,\ v_A^{H\backslash G}(f \otimes m) = f(m),$$

pentru orice $A \in \mathrm{Gr}\text{-}(H\backslash G, R)$ şi orice $B \in \mathrm{Gr}\text{-}(H\backslash G, E)$.

Presupunem în continuare că R-modulul G-graduat M este Σ-quasiproiectiv. Fie $\mathcal{T}^{1\backslash G}$ clasa de torsiune (ereditară) în $\boldsymbol{\sigma}^{1\backslash G}[M]$ determinată de $\widetilde{M}$, aşa ca şi în paragraful 1.4, mai precis $\mathcal{T}^{1\backslash G} = \operatorname{Ker}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}\text{-}R}(\widetilde{M}, -)$. Să observăm că $A \in \mathcal{T}^{1\backslash G}$ dacă şi numai dacă $\mathrm{HOM}_R(M, A) = 0$, deoarece

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}\text{-}R}(\widetilde{M}, A) = \prod_{g\in G} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}\text{-}R}(M(g^{-1}), A) = \prod_{g\in G} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}\text{-}R}(M, A)_g.$$

Aceasta implică, în particular, că $\mathcal{T}^{1\backslash G}$ este rigidă, pentru că

$$\mathrm{HOM}_R(M, A(g)) = \mathrm{HOM}_R(M, A)(g)$$

oricare ar fi $g \in G$.

Lema 2.7.1. *Dacă M este un R-modul G-graduat Σ-quasiproiectiv şi $\mathcal{T}^{1\backslash G} \subseteq \boldsymbol{\sigma}^{1\backslash G}[M]$ este teoria de torsiune (ereditară) asociată cu $\widetilde{M}$, atunci:*

(a) $\mathcal{T}^{H\backslash G} = \{N \in \boldsymbol{\sigma}^{H\backslash G}[M] \mid \mathrm{HOM}_{G/H,R}(M, N) = 0\}$.

(b) $\mathcal{T}^{H\backslash G}$ *este teoria de torsiune în* $\boldsymbol{\sigma}^{H\backslash G}[M]$ *determinată de* $\mathbf{U}_{H\backslash G}^{1\backslash G}(\widetilde{M})$.

Demonstraţie. (a) Conform Propoziţiei 2.6.1, este suficient să arătăm că pentru orice $A \in \boldsymbol{\sigma}^{1\backslash G}[M]$ avem $A \in \mathcal{T}^{1\backslash G}$ dacă şi numai dacă $\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M, \mathbf{U}(A)) = 0$. În altă ordine de idei, această echivalenţă este imediată, deoarece $\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M, \mathbf{U}(A))$ este inclus în $\mathrm{Hom}_R(M, A)$ care este completarea grupului $\mathrm{HOM}_R(M, A)$ în topologia finită, aşa cum afirmă Teorema 2.4.3.

(b) Folosind Lema 2.3.9 deducem

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{H\backslash G,R}(\widetilde{M}, A) &= \prod_{g\in G} \mathrm{Hom}_{H\backslash G,R}(M(g^{-1}), N)\\ &= \prod_{g\in G} \mathrm{Hom}_{H\backslash G,R}(M(g^{-1}), M)_{Hg},\end{aligned}$$

de unde $A \in \mathcal{T}^{H\backslash G}$ exact atunci când $\mathrm{Hom}_{H\backslash G,R}(\widetilde{M}, A) = 0$. □

De remercat că Teorema 2.4.3 implică de asemenea că $A \in \mathcal{T}^{H\backslash G}$ dacă şi numai dacă $\mathrm{Hom}_R(M, A) = 0$.

Ca şi în Capitolul 1, vom considera categoriile $\mathcal{C}^{1\backslash G}[M] = \left(\boldsymbol{\sigma}^{1\backslash G}[M]\right) / \left(\mathcal{T}^{1\backslash G}\right)$ respectiv $\mathcal{C}^{H\backslash G}[M] = \left(\boldsymbol{\sigma}^{H\backslash G}[M]\right) / \left(\mathcal{T}^{H\backslash G}\right)$ care pot fi identificate cu subcategoriile pline ale categoriilor $\boldsymbol{\sigma}^{1\backslash G}[M]$ şi $\boldsymbol{\sigma}^{H\backslash G}[M]$ formate din obiectele $\mathcal{T}^{1\backslash G}$, respectiv $\mathcal{T}^{H\backslash G}$, închise. Observaţia 2.6.5 ne spune că, dacă $K \leq H$, atunci există o pereche de functori adjuncţi $(\overline{\mathbf{U}}, \overline{\mathbf{F}})$ între $\mathcal{C}^{K\backslash G}[M]$ şi $\mathcal{C}^{H\backslash G}[M]$.

Considerăm de asemenea subcategoriile $\mathrm{GF}^{1\backslash G}[M] = \mathrm{GF}[\widetilde{M}]$ formată cu acele obiecte ale categoriei $\boldsymbol{\sigma}^{1\backslash G}[M]$ care sunt $\widetilde{M}$-generate, $\mathcal{T}^{1\backslash G}$-fără torsiune şi $\mathrm{GF}^{H\backslash G}[M] = \mathrm{GF}[\mathbf{U}(\tilde{M})]$ definită asemănător.

Notăm $S = \mathrm{End}_R(M)$ inelul endomorfismelor R-modulului G-graduat Σ-quasiproiectiv M. Considerăm idealul bilateral J_S al inelului S, format din acele endomorfisme care factorizează printr-un submodul finit generat al lui M. Conform [29, Theorem 1.3], $MJ_S = M$, J_S este un ideal idempotent care determină o topologie Gabriel pe inelul $S = \mathrm{End}_R(M)$, formată din toate idealele lui S care îl conţin pe J_S. Mai mult, această topologie, notată aici cu $\mathcal{G}$, este dată de egalitatea

$$\mathcal{G} = \{I \leq S \mid IM = M\}.$$

Lema 2.7.2. *Fie M un R-modul G-graduat, $S = \mathrm{End}_R(M)$, $E = \mathrm{END}_R(M)$ şi J_S idealul inelului S, format din acele endomorfisme care factorizează printr-un submodul finit generat al lui M. Punem $J = E \cap J_S$ şi considerăm un subinel S' al lui S care conţine E. Atunci:*

(a) J este un ideal idempotent G-graduat al inelului E.

(b) $S'J = E$.

(c) $S' \otimes_E M \cong M$.

Demonstraţie. (a) Fie $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{g_i} \in J$ cu $\alpha_{g_i} \in E$ şi fie M' un submodul finit generat al lui M astfel încât $\operatorname{im} \alpha \subseteq M'$. Înlocuind generatorii lui lui M' cu componentele omogene ale lor, putem presupune că M' este un submodul G-graduat al lui M. Fie $m \in M$ un element omogen. Atunci $\alpha_{g_i}(m) \in M$ este de asemenea omogen şi, deoarece $\alpha(m) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{g_i}(m) \in M'$, rezultă $\operatorname{im} \alpha_{g_i} \subseteq M'$, ceea ce înseamnă, $\alpha_{g_i} \in J$, $1 \leq i \leq n$. Ceea ce a rămas se demonstrează ca şi [34, Theorem 2.1] şi [29, Theorem 1.3], dar lucrând cu elemente omogene şi cu homomorfisme care păstrează graduarea.

(b) Fie $\alpha \in J$ şi $\beta \in S'$. Obţinem diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"] & & M \arrow[r, "\beta"'] & M \\ & M' \arrow[ur, "q"'] & & \end{tikzcd}$$

cu M' un submodul finit generat G-graduat al lui M. Deoarece M' este finit generat, $\beta q \in \mathrm{Hom}_R(M', M) = \mathrm{HOM}_R(M', M)$ aşadar $\beta\alpha = \beta q \alpha' \in \mathrm{HOM}_R(M, M) = E$.

(c) Folosim (b) şi obţinem $S' \otimes_E M = S' \otimes_E JM = S'J \otimes_E M = E \otimes_E M \cong M$. $\square$

Aşa ca în Observaţia 2.6.11, idealul bilateral idempotent G-graduat J determină o topologie Gabriel G-graduată rigidă pe inelul E prin

$$\mathcal{G}^{1\backslash G} = \{I \in \mathcal{L}^{1\backslash G}(R) \mid J \leq I\}$$

şi una $H\backslash G$-graduată prin $\mathcal{G}^{H\backslash G} = \{I \in \mathcal{L}^{H\backslash G}(R) \mid J \subseteq I\}$, pentru orice subgrup $H \leq G$. Vom nota cu Gr-$(H\backslash G, E, \mathcal{G}^{H\backslash G})$ categoria cât a categoriei Gr-$(H\backslash G, E)$ modulo subcategoria localizantă corespunzătoare topologiei $\mathcal{G}^{H\backslash G}$.

Lema 2.7.3. *Fie G un grup şi H un subgrup al său. Dacă M este un R-modul G-graduat Σ-quasiproiectiv, $S = \mathrm{End}_R(M)$, $E = \mathrm{END}_R(M)$, J_S este idealul lui S format din acele endomorfisme care factorizează printr-un submodul finit generat al lui M, $J = E \cap J_S$, iar $\mathcal{G}^{H\backslash G}$ este topologia Gabriel pe R, $H\backslash G$-graduată şi rigidă determinată de J ca mai sus, atunci*

$$\mathcal{G}_H^{H\backslash G} = \left\{I \in \mathcal{L}^{H\backslash G}(R) \mid IM = M\right\}.$$

Demonstraţie. Mai întâi să arătăm că $JM = M$. Fie $m \in M$. Din faptul că $J_S M = M$, obţinem un endomorfism $\alpha : M \to M$ care factorizează printr-un submodul finit generat M' al lui M, cu proprietatea că $m \in \operatorname{im}\alpha$. Ca şi în demonstraţia Lemei 2.7.2, putem considera că M' este un R-modul finit generat G-graduat, înlocuind eventual generatorii lui cu componentele lor omogene. Dacă

$$M \xrightarrow{\alpha'} M' \xrightarrow{q} M$$

este factorizarea endomorfismului α, atunci $\alpha' \in \mathrm{Hom}_R(M, M') = \mathrm{HOM}_R(M, M')$. Aplicând functorul exact la stânga $\mathrm{HOM}_R(M, -)$ şirului exact $0 \to M' \to M$ rezultă un şir exact $0 \to \mathrm{HOM}_R(M, M') \to \mathrm{HOM}_R(M, M)$, deci $\alpha \in \mathrm{HOM}_R(M, M) = \mathrm{END}_R(M)$. Este clar că $\alpha \in J_S$, de unde $\alpha \in J$.

Fie acum $I \in \mathcal{L}^{H\backslash G}(E)$. Este evident că dacă I îl conţine pe J atunci $IM = M$. Reciproc presupunem că $IM = M$. Fie M' un R-modul finit generat G-graduat, generat de mulţimea $\{m_1 \dots, m_k\}$. Cum $MI = M$, găsim un homomorfism $H\backslash G$-graduat $\beta : M^t \to M$ satisfăcând proprietăţile $x_i \in \operatorname{im}\beta$, $1 \leq i \leq k$ şi $\beta q_j \in I$ pentru orice $j \in \{1, \dots, t\}$, unde $q_j : M \to M^t$ sunt injecţiile canonice. Există atunci un submodul $H\backslash G$-graduat N, cu injecţia canonică $\iota : N \to M$, astfel încât $\beta(N) = M'$. Considerăm acum $\alpha \in \mathrm{HOM}_{H\backslash G, R}(M, M')$. Atunci din Σ-quasiproiectivitatea lui M deducem existenţa unui homomorfism $\rho : M \to N$ astfel încât $\alpha = \beta\iota\rho$. Notând cu $p_j : M^t \to M$ proiecţiile canonice observăm că $\alpha = \sum_{j=1}^{t} \beta q_j p_j \iota\rho$, de unde rezultă $\alpha \in I$, ţinând cont că $\beta q_j \in I$ şi I este ideal. $\square$

Teorema 2.7.4. *Fie G un grup şi H un subgrup al său. Dacă M este un R-modul G-graduat Σ-quasiproiectiv, $S = \mathrm{End}_R(M)$, $E = \mathrm{END}_R(M)$, J_S este idealul lui S format din acele endomorfisme care factorizează printr-un submodul finit generat al lui M, $J = E \cap J_S$, iar $\mathcal{G}^{H\backslash G}$ este topologia Gabriel pe R, $H\backslash G$-graduată şi rigidă determinată de J, atunci functorul $\mathrm{HOM}_{H\backslash G, R}(M, -) : \text{Gr-}(H\backslash G, R) \to \text{Gr-}(H\backslash G, E)$ se restricţionează la următoarele echivalenţe de categorii:*

(a) $\mathrm{Pres}^{H\backslash G}[M] \to \text{Gr-}(H\backslash G, E, \mathcal{G}^{H\backslash G})$ *cu inversa* $- \otimes_E M$.

(b) $\mathrm{GF}^{H\backslash G}[M] \to \text{Gr-}(H\backslash G, E, \mathcal{G}^{H\backslash G})$ *cu inversa* $(- \otimes_E M)/\mathbf{t}_{H\backslash G}(- \otimes_E M)$.

(c) $\mathcal{C}^{H\backslash G}[M] \to \text{Gr-}(H\backslash G, E, \mathcal{G}^{H\backslash G})$ *cu inversa* $\mathbf{a}^{H\backslash G}(- \otimes_E M)$.

Demonstraţie. Fie $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{1\backslash G}_{H\backslash G} : \text{Gr-}R \to \text{Gr-}(H\backslash G, R)$. După cum am văzut în Propoziţia 2.3.3, categroria $\text{Gr-}(H\backslash G, E)$ este echivalentă cu $\text{Mod-}\mathcal{Y}$, unde $\mathcal{Y}$ are ca obiecte elementele mulţimii $H\backslash G$, iar $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}}(Hg_1, Hg_2) \cong E_{g_2^{-1}Hg_1}$. Functorul $\mathbf{f} : \mathcal{Y} \to \boldsymbol{\sigma}^{H\backslash G}[M]$, $\mathbf{f}(Hg) = \mathbf{U}(M(g))$ este atunci deplin fidel deoarece $\mathrm{Hom}_{H\backslash G, R}(\mathbf{U}(M(g_1)), \mathbf{U}(M(g_2)) \cong E_{g_2^{-1}Hg_1}$. Acest functor induce perechea de functori adjuncţi $(\mathrm{HOM}_{H\backslash G, R}(M, -), - \otimes_E M)$, care este punctată la dreapta. Mai obsevăm că $\operatorname{im}(I \otimes_E M \to M) = IM$ pentru orice ideal $G\backslash E$-graduat I al lui E. Cum $\mathbf{U}(M(g))$ este proiectiv în $\boldsymbol{\sigma}^{H\backslash G}[M]$, pentru orice $g \in G$, se aplică

Teorema 2.1.3, ţinându-se cont de faptul că $\mathcal{G}^{H\backslash G}$ este tocmai topologia Gabriel definită acolo, aşa cum se deduce din Lema 2.7.3. $\square$

Corolarul 2.7.5. *Fie $K \leq H$ două subgrupuri ale unui grup G, şi M un R-modul, G-graduat, Σ-quasiproiectiv. Fie $\mathcal{G}^{K\backslash G}$ şi $\mathcal{G}^{H\backslash G}$ topologiile Gabriel $K\backslash G$, respectiv $H\backslash G$, graduatăte determinate de J, aşa ca în Teorema 2.7.4. Notăm cu acelaşi simbol $\mathbf{U}$ ambii functori care "uită" graduarea $\text{Gr-}(K\backslash G, R) \to \text{Gr-}(H\backslash G, R)$ şi $(\text{Gr-}(K\backslash G, E) \to \text{Gr-}(H\backslash G, E)$ şi la fel procedăm cu adjuncţii lor la dreapta $\mathbf{F}$. Atunci obţinem următoarele diagrame comutative de categorii şi functori:*

$$\text{(a)}\quad \begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathrm{Pres}^{K\backslash G}[M] \arrow[r, shift left, "\mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,-)"] \arrow[d, shift left, "\mathbf{U}"] & \text{Gr-}(K\backslash G, E, \mathcal{G}^{K\backslash G}) \arrow[l, shift left, "M\otimes_E -"] \arrow[d, shift left, "\overline{\mathbf{U}}"] \\ \mathrm{Pres}^{H\backslash G}[M] \arrow[r, shift left, "\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M,-)"] \arrow[u, shift left, "\mathbf{F}"] & \text{Gr-}(H\backslash G, E, \mathcal{G}^{H\backslash G}) \arrow[l, shift left, "M\otimes_E -"] \arrow[u, shift left, "\overline{\mathbf{F}}"] \end{tikzcd}$$

$$\text{(b)}\quad \begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathcal{C}^{K\backslash G}[M] \arrow[r, shift left, "\mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,-)"] \arrow[d, shift left, "\overline{\mathbf{U}}"] & \text{Gr-}(K\backslash G, E, \mathcal{G}^{K\backslash G}) \arrow[l, shift left, "\mathbf{a}^{K\backslash G}(-\otimes_E M)"] \arrow[d, shift left, "\overline{\mathbf{U}}"] \\ \mathcal{C}^{H\backslash G}[M] \arrow[r, shift left, "\mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M,-)"] \arrow[u, shift left, "\overline{\mathbf{F}}"] & \text{Gr-}(H\backslash G, E, \mathcal{G}^{H\backslash G}) \arrow[l, shift left, "\mathbf{a}^{H\backslash G}(-\otimes_E M)"] \arrow[u, shift left, "\overline{\mathbf{F}}"] \end{tikzcd}$$

Demonstraţie. (a) Fie $N \in \mathrm{Pres}^{K\backslash G}[M]$. Obţinem un şir scurt exact în $\text{Gr-}(H\backslash G, E)$

$$0 \to \mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,N) \to \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M,N) \to C \to 0,$$

unde $C = \mathrm{coker}(\mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,N) \to \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M,N))$. Tensorizând cu M, şi având în vedere că, în accord cu Teorema 2.7.4

$$\mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,N) \otimes_E M \cong N \cong \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M,N) \otimes_E M,$$

rezultă $C \otimes_E M = 0$, aşadar C aparţine clasei de torsiune asociată cu $\mathcal{G}^{H\backslash G}$, în conformitate cu Lema 1.6.4. În consecinţă, avem izomorfismul

$$\overline{\mathbf{U}}(\mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,N)) \cong \mathrm{HOM}_{H\backslash G,R}(M, \mathbf{U}(N))$$

în $\text{Gr-}(H\backslash G, E, \mathcal{G}^{H\backslash G})$.

Deoarece liniile sunt echivalenţe, $\mathbf{F}$ este adjunctul la dreapta al lui $\mathbf{U}$ şi $\overline{\mathbf{F}}$ adjunctul la dreapta al lui $\overline{\mathbf{U}}$, este de acum clar că diagrama comută.

(b) Fie $B \in \mathrm{Gr}\text{-}(H\backslash G, E, \mathcal{G}^{H\backslash G})$. Conform celor demonstrate la (a), avem isomorfismul $\overline{\mathbf{U}}(B) \otimes_E M \cong \mathbf{U}(B \otimes_E M)$, deoarce $B \otimes_E M \in \mathrm{Pres}^{K\backslash G}[M]$ şi $\overline{\mathbf{U}}(B) \otimes_E M \in \mathrm{Pres}^{H\backslash G}[M]$. Pe de altă parte, Propoziţia 2.6.6 implică

$$(\overline{\mathbf{U}}\mathbf{a}^{K\backslash G})(B \otimes_E M) \cong (\mathbf{a}^{H\backslash G}\mathbf{U})(B \otimes_E M) \cong \mathbf{a}^{H\backslash G}(\mathbf{U}(B) \otimes_E M),$$

de unde rezultă comutativitatea şi a acestei diagrame. $\square$

Teorema 2.7.6. *Fie G un grup, M este un R-modul G-graduat Σ-quasiproiectiv, $S = \mathrm{End}_R(M)$, $E = \mathrm{END}_R(M)$. Dacă J_S este idealul lui S format din acele endomorfisme care factorizează printr-un submodul finit generat al lui M,*

$$\mathcal{G} = \{I \in \mathcal{L}(S) \mid J_S \subseteq I\}$$

este topologia Grabriel pe S determinată de acest ideal, iar prin $\boldsymbol{\varphi}^*$ şi $\boldsymbol{\varphi}_*$ am notat functorii de restricţie, respectiv extindere a scalarior induse de incluziunea $\varphi : E \to S$ atunci:

(a) S este izomorf cu inelul câturilor lui E relativ la topologia $\mathcal{G}^{G\backslash G}$, unde $\mathcal{G}^{G\backslash G}$ este definită ca şi în Teorema 2.7.4.

(b) Există o diagramă comutativă de categorii şi functori

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pres}^{G\backslash G}[M] \arrow[r, shift left, "\mathrm{Hom}_R(M,-)"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Mod}\text{-}(E, \mathcal{G}^{G\backslash G}) \arrow[l, shift left, "-\otimes_E M"] \arrow[d, shift left, "\overline{\boldsymbol{\varphi}^*}"] \\
\mathrm{Pres}[M] \arrow[r, shift left, "\mathrm{Hom}_R(M,-)"] & \mathrm{Mod}\text{-}(S, \mathcal{G}), \arrow[l, shift left, "-\otimes_S M"] \arrow[u, shift left, "\overline{\boldsymbol{\varphi}_*}"]
\end{tikzcd}$$

unde $\overline{\boldsymbol{\varphi}^*} = \mathbf{b}\boldsymbol{\varphi}^*\mathbf{j}^{G\backslash G}$ şi $\overline{\boldsymbol{\varphi}_*} = \mathbf{b}^{G\backslash G}\boldsymbol{\varphi}_*\mathbf{j}$, $(\mathbf{b}, \mathbf{j})$ şi $(\mathbf{b}^{G\backslash G}, \mathbf{j}^{G\backslash G})$ fiind perechile de adjuncţi ataşate localizărilor categoriilor Mod-S *respectiv* Mod-E*.*

Demonstraţie. (a) Privind S ca un obiect al categoriei Mod-E, găsim un şir scurt exact de E-module

$$0 \to E \xrightarrow{\varphi} S \to \operatorname{coker} \varphi \to 0,$$

care induce un şir de asemenea exact

$$E \otimes_E M \to S \otimes_E M \to \operatorname{coker} \varphi \otimes_E M \to 0$$

în Mod- R. Conform Lemei 2.7.2, avem $E \otimes_E M \cong M \cong S \otimes_E M$, deci $\operatorname{coker} \varphi \otimes_E M = 0$, de unde $\operatorname{coker} \varphi$ aparţine clasei de torsiune asociată cu $\mathcal{G}^{G\backslash G}$. Mai mult, $S = \operatorname{Hom}_R(M, M)$ este $\mathcal{G}^{G\backslash G}$-închis conform condiţiei (ii) din Teorema 1.6.5 (b), aşadar [4, Lemma 2.6] implică afirmaţia noastră.

(b) Faptul că cea de-a două linie este o echivalenţă rezultă din Teorema 1.7.4 care reia [28, Theorem 1.3]. Pentru orice $N \in \operatorname{Pres}[M]$, avem izomorfismele naturale

$$\phi_N : \operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}_R(M, N) \otimes_E S, \quad \phi_N(f) = f \otimes 1$$
$$\psi_N : \operatorname{Hom}_R(M, N) \otimes_E S \to \operatorname{Hom}_R(M, N), \quad \psi_N(f \otimes \alpha) = f\alpha.$$

O verificare simplă ne arată că $\psi_N \phi_N = 1_{\operatorname{Hom}_R(M,N)}$, de unde ϕ_N este un monomorfism. Mai mult, $\operatorname{coker} \phi_N$ aparţine clasei de torsiune asociate topologiei $\mathcal{G}$. Într-adevăr, argumentul folosit în Corolarul 2.7.5 pentru a arăta ca $C \otimes M = 0$ funcţionează şi aici, deci $\operatorname{coker} \phi_N \otimes_S M = 0$, ceea ce implică, conform Lemei 1.6.4, că $\operatorname{coker} \phi_N \in \mathcal{G}$. În concluzie ϕ_N este un izomorfism în Mod-$(S, \mathcal{G})$.

Observăm de asemenea că $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ este $\mathcal{G}$-închis, aşadar el este izomorf în categoria Mod-$(S, \mathcal{G})$ cu modulul său de câturi. Din definiţia functorului $\overline{\boldsymbol{\varphi}_*}$ rezultă

$$\overline{\boldsymbol{\varphi}_*}(\operatorname{Hom}_R(M, N)) \cong \operatorname{Hom}_R(M, N)$$

aşa deci diagrama este comutativă. $\square$

Exemplul 2.7.7. Acum şi în cele ce urmează păstrăm în continuare notaţiile şi ipotezele asumate în acest paragraf, şi anume, M este un R-modul G-graduat Σ-quasiproiectiv, $S = \operatorname{End}_R(M)$, $E = \operatorname{END}_R(M)$, J_S este idealul lui S format din acele endomorfisme care factorizează printr-un submodul finit generat al lui M, iar $J = E \cap J_S$. Remarcăm atunci că M este finit generat dacă şi numai dacă $J = E$, caz în care este valabilă şi egalitatea $E = S$, situaţie care a fost discutată în [44, Theorem 3.12]. În particular, dacă M este un progenerator al categoriei Mod- R, atunci obţinem o echivalenţă Morita graduată între R şi S.

Exemplul 2.7.8. Presupunem că M este un obiect simplu al categoriei Gr- R. Atunci $E = S$ şi M este un generator proiectiv pentru $\boldsymbol{\sigma}[M]$, aşadar $\boldsymbol{\sigma}[M]$ este echivalentă cu Mod- E. Acesta este principalul rezultat al lucrării [19], aşa numita "Teoremă Clifford directă".

Acest rezultat a fost generalizat în [36, Corollary 2.11] considerându-se un obiect M care este numai semisimplu în Gr- R, dar lucrând cu S în locul lui E.

Exemplul 2.7.9. Un inel graduat de un grup $R = \bigoplus_{g\in G}$ se numeşte *tare graduat* dacă $R_g R_{g'} = R_{gg'}$ pentru orice două elemente $g, g' \in G$. Presupunem că inelul E este tare graduat. Atunci J_1 este un un ideal bilateral G-invariant al inelului E_1. Afirmăm că el este şi idempotent. Într-adevăr, orice element al lui J_1 se scrie ca o sumă de forma $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\beta_i$ pentru anumite elemente $\alpha_i, \beta_i \in J$. Desigur, putem presupune fără a restrânge generalitatea, că α_i, β_i sunt omogene. Alegem $i \in \{1\dots, k\}$ şi fie g gradul lui α_i, adică $\alpha_i \in E_g$. Vom avea atunci $\beta_i \in E_{g^{-1}}$. Deoarece $E_{g^{-1}}E_g = E_1$, vom găsi endomorfismele $\epsilon'_j \in E_{g^{-1}}$ şi $\epsilon_j \in E_g$, $1 \leq j \leq t$ astfel încât $\sum_{j=1}^{t} \epsilon'_j\epsilon_j = 1$. Rezultă atunci $\alpha_i\epsilon'_j, \epsilon_j\beta_i \in E_1$, iar cum $\alpha_i\beta_i = \sum_{j=1}^{t}(\alpha_i\epsilon'_j)(\beta_i\epsilon_j)$ afirmaţia noastră este imediată.

În mod ananlog, pentru orice subgrup H al lui G, $E_H = \bigoplus_{h\in H} E_h$ este un subinel al lui E, iar idealul J_H al acestui subinel este idempotent. Functorii $-\otimes_{E_H} E$ şi $(-)_H$ dau echivalenţe mutual inverse între categoriile Gr-$(H\backslash G, E)$ şi Mod- E_H, deci vom avea un izomorfism natural $B \cong B_H \otimes_{E_H} E$, pentru orice modul $H\backslash G$-graduat B, o afirmaţie similară fiind valabilă pentru module la stânga. În particular, observăm că

$$B \otimes_E M \cong B_H \otimes_{E_H} M.$$

Mai mult, homomorfismul natural de E-module $H\backslash G$-graduate $B \to \mathrm{HOM}_{H\backslash G,E}(J, B)$ provine, prin intermediul functorului $-\otimes_{E_H} E$, dintr-un unic homomorfism de E_H-module $B_H \to \mathrm{Hom}_{E_H}(J_H, B_H)$. Din aceste consideraţii deducem că mulţimea

$$\mathcal{G}_H = \{I \in \mathcal{L}(E_H) \mid J_H \subseteq I\} = \{I \in \mathcal{L}(E_H) \mid IM = M\}$$

este o topologie Gabriel pe E_H şi avem o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pres}^{H\backslash G}[M] \arrow[r, shift left, "\mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,-)"] \arrow[d, equal] & \text{Gr-}(H\backslash G, E, \mathcal{G}^{H\backslash G}) \arrow[l, shift left, "-\otimes_E M"] \arrow[d, shift left, "(-)_H"] \\
\mathrm{Pres}^{H\backslash G}[M] \arrow[r, shift left, "\mathrm{Hom}_{H\backslash G,R}(M,-)"] & \text{Mod-}(E_H, \mathcal{G}_H) \arrow[l, shift left, "-\otimes_{E_H} M"] \arrow[u, shift left, "-\otimes_{E_H} E"]
\end{tikzcd}$$

toate săgeţile fiind echivalenţe de categorii.

Dacă R este la rândul lui tare graduat, atunci obţinem de asemenea diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pres}^{H\backslash G}[M] \arrow[r, shift left, "\mathrm{HOM}_{K\backslash G,R}(M,-)"] \arrow[d, shift left, "(-)_H"] & \mathrm{Gr}\text{-}(H\backslash G, E, \mathcal{G}^{H\backslash G}) \arrow[l, shift left, "-\otimes_E M"] \arrow[d, shift left, "(-)_H"] \\
\mathrm{Pres}[M_H] \arrow[u, shift left, "-\otimes_{R_H} R"] \arrow[r, shift left, "\mathrm{Hom}_{R_H}(M_H,-)"] & \mathrm{Mod}\text{-}(E_H, \mathcal{G}_H). \arrow[l, shift left, "-\otimes_{E_H} M_H"] \arrow[u, shift left, "-\otimes_{E_H} E"]
\end{tikzcd}$$

Afirmaţii asemănătoare sunt valabile dacă înlocuim Pres cu $\mathcal{C}$ sau GF.

Observaţia 2.7.10. Rezultatele noastre generalizează pe cele obţinute în [4, Theorems 4.8, 4.12 şi 4.15], unde se lucrează în cazul în care M este generatorul canonic $\bigoplus_{g\in G} R(g)$ al categoriei Gr- R. De fapt acolo sunt luate în considerare numai relaţiile dintre categoriile Mod- R, Gr- R, Mod- E şi Gr- E, cu precizarea că se lucrează cu module stâgi şi nu cu module drepte ce şi aici. Într-adevăr, pentru a argumenta aceasta este suficient să observăm că idealul J de mai sus coincide cu idealul $\tau(U)$ introdus în [4, p. 141].

Observaţia 2.7.11. Teorema 2.7.4 şi Corolarul 2.7.5, ar putea fi de asemenea comparate cu rezultatele din [54, Sections 2 and 3], dar nu nu se poate spune că le generalizează şi pe acestea. Problema este că, în cazul particular în care $M = \bigoplus_{g\in G} R(g)$, inelul E poate fi identificat în mod canonic cu un inel de matrici infinite cu elemente din R şi conţine un subinel G-graduat $R\{G\}$, care coincide cu E exact atunci când grupul G este finit. Acest inel încă reţine informaţia esenţială despre E şi se pot obţine echivalenţe similare celor din Teorema 2.7.6. Această abordare a fost generalizată într-o direcţie diferită în [1].

Exemplul 2.7.12. Următoarea situaţie interesantă a fost discutată în [3]. Fie J un ideal bilateral într-un inel E, cu proprietatea că E-modulul stâng J este *pur*, ceea ce înseamnă că functorul $-\otimes_E M$ este exact relativ la şirul scurt exact de E-module stângi

$$0 \to J \to E \to E/J \to 0,$$

sau echivalent E/J este plat ca E-modul drept. Rezultă imediat că J este un ideal idempotent. În Mod- E considerăm subcategoriile

$$\mathcal{J} = \{B \in \mathrm{Mod}\text{-}E \mid BJ = B\}, \qquad \mathcal{K} = \{B \in \mathrm{Mod}\text{-}E \mid BJ = 0\}$$

şi functorii

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J} \arrow[r, shift left, "\mathbf{j}"] & \mathrm{Mod}\text{-}E \arrow[l, shift left, "\mathbf{b}"] \arrow[r, shift left, "\boldsymbol{\varphi}_*"] & \mathrm{Mod}\text{-}E/J \arrow[l, shift left, "\boldsymbol{\varphi}^*"]
\end{tikzcd}$$

unde $\boldsymbol{\varphi}_*(B) = B \otimes_E E/J \cong B/BJ$, $\boldsymbol{\varphi}^*$ este restricţia scalarilor, $\mathbf{j}(B) = \mathrm{Hom}_E(J, B)$ şi $\mathbf{b}(B) = B \otimes_A J \cong BJ$. Avem atunci:

(a) $\mathcal{J}$ este o subcategorie localizantă, iar $\mathcal{K}$ este o clasă TTF.

(b) $\boldsymbol{\varphi}^*$ şi $\boldsymbol{\varphi}_*$ induc echivalenţe $\text{Mod-}\,E/\mathcal{J} \simeq \text{Mod-}\,A/J \simeq \mathcal{K} = \mathrm{Ker}\,\mathbf{b}$.

(c) $\mathbf{b}$ este adjunctul la dreapta al functorului incluziune $\mathcal{J} \to \text{Mod-}\,E$ şi adjunctul la stânga al functorului $\mathbf{j}$.

(d) Transformarea naturală $\mathbf{bj} \to \mathbf{1}_{\mathcal{J}}$ esteun izomorfism, aşadar $\mathbf{b}$ şi $\mathbf{j}$ induc o echivalenţă între $\text{Mod-}\,E/\mathcal{K}$ şi $\mathcal{J}$.

Ca şi caz particular, fie $J = \sum_{\lambda\in\Lambda} Ep_\lambda$ unde $\{p_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ este o mulţime nevidă de idempotenţi ortogonali ai inelului E. Atunci J este un ideal pur. Presupunem, în plus, că J este un ideal bilateral, sau echivalent, $\sum_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda E \subseteq J$. (De notat că dacă, în această ultimă relaţie avem chiar egalitate, atunci J este un inel cu suficienţi idempotenţi.) Atunci $\mathcal{J}$ este izomorfă cu categoria $\text{Mod-}\,J$ a J-modulelor unitale.

Revenind la cazul nostru unde M este un R-modul graduat Σ-quasiproiectiv, $S = \mathrm{End}_R(M)$, $E = \mathrm{END}_R(M)$, J_S este idealul bilateral al lui S format din endomorfismele care factorizează printr-un submodul finit generat al lui M, iar $J = E \cap J_S$, presupunem că idealul J este pur. Stim atunci că, pentru $H \leq G$, subcategoria localizantă corespunzătoare topologiei $H\backslash G$-graduate $\mathcal{G}^{H\backslash G}$ este

$$\mathcal{K}^{H\backslash G} = \{B \in \text{Gr-}(H\backslash G, E) \mid BJ = 0\}.$$

Notăm de asemenea

$$\mathcal{J}^{H\backslash G} = \{B \in \text{Gr-}(H\backslash G, E) \mid BJ = B\}.$$

Folosind o versiune graduată a rezultatului [3, Theorem 1.6], deducem că $\mathcal{J}^{H\backslash G}$ este o subcategorie localizantă a categoriei $\text{Gr-}(H\backslash G, E)$ Gr- şi că avem echivalenţele de categorii

$$\text{Gr-}(H\backslash G, E)/\mathcal{J}^{H\backslash G} \simeq \text{Gr-}(H\backslash G, E/J) \simeq \mathcal{K}^{H\backslash G}$$

şi

$$\text{Gr-}(H\backslash G, E, \mathcal{G}^{H\backslash G}) \simeq \text{Gr-}(H\backslash G, E)/\mathcal{K}^{H\backslash G} \simeq \mathcal{J}^{H\backslash G}.$$

Dacă avem în plus şi o egalitate de forma $J = \sum_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda E$, unde $\{p_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ este o mulţime nevidă de idempotenţi ortogonali din E_1, atunci $\mathcal{J}^{H\backslash G}$ este echivalentă cu categoria Gr-$(H\backslash G, J)$ a J-modulelor unitale $H\backslash G$-graduate.

Dacă mai ştim şi că E este tare graduat, atunci Gr-$(H\backslash G, E, \mathcal{G}^{H\backslash G})$ este echivalentă cu categoria Mod-J_H. De remarcat că toate ipotezele considerate în acest Exemplu sunt satisfăcute dacă $M = \bigoplus_{g\in G} R(g)$ este generatorul canonic al categoriei Gr-R.

Bibliografie

[1] G. Abrams, C. Menini, *Categorical equivalences and realization theorems*, J. Pure Appl. Algebra, **113** (1996), 107–120.

[2] U. Albrecht, *Abelian groups A such that the Category of A-solvable groups is preabelian*, Contemp. Math., **87** (1989), 117–131.

[3] T. Albu, *Pure ideals, quotient categories and infinite group graded rings*, Comm. Algebra, **15** (1990), 839–862.

[4] T. Albu, C. Năstăsescu, *Infinite group-graded rings, rings of endomorphisms, and localization*, J. Pure Appl. Algebra, **59** (1989), 125–150.

[5] F. Anderson, K. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Graduate Texts in Math., **13**, Springer–Verlag, 1973.

[6] P.M. Anh, L. Márki, *Morita equivalence for rings without identity*, Tsukuba J. Math., **11** (1987), 1–16.

[7] D. Arnold, C. Murley, *Abelian groups A, such that* $\mathrm{Hom}(A, -)$ *preserves direct sums of copies of A*, Pacific J. Math., **56** (1975), no. 1, 7–20.

[8] M. Auslander, I. Reiten, *Stable equivalences of dualizing R-varieties*, Adv. Math, **12** (1974), 306–366.

[9] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Éléments de mathématique, Les structure fondamentales de l'analise, Livre III, Hermann & Co, Paris, 1940.

[10] S. Breaz, **C. Modoi**, *On a quotient category*, Studia Universitaria "Babes-Bolyai", **XLVII** (2002), no. 2, 17-29.

[11] S. Breaz, **C. Modoi**, *Abelian groups such that the class of adstatic modules is closed under submodules*, Mathematica(Cluj), **43(66)** (2001), no. 2, 145–149.

[12] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[13] F. Castaño Iglesias, J. Gómez Torrecillas, R. Wisbauer, *Adjoint functors and equivalences*, preprint disponibil la adresa de Internet

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~wisbauer/`.

[14] G. Călugăreanu, *Introducere în teoria grupurilor abeliene*, Editura Expert, 1994.

[15] G. Călugăreanu, S. Breaz, **C. Modoi**, C. Pelea, D. Vălcan, *Exercise Book in Abelian Group Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[16] R. Colby, K.R. Fuller, *Costar modules*, J. Algebra, **242** (2001), 146–159.

[17] R. Colpi, *Tilting in Grothendieck categories*, Forum Math., **11** (1999), 735–759.

[18] R. Colpi, C. Menini, *On the structure of $*$-modules*, J. Algebra, **158** (1993), 400–419.

[19] E.C. Dade, *Clifford theory for group graded rings*, J. Reine Angew. Math., **369** (1986), 40–86.

[20] E.C. Dade, *Group-Graded Rings and Modules*, Math. Z., **174** (1980), 241–262.

[21] A. Facchini, *Module Theory*, Birkhäuser Verlag, 1998.

[22] T.G. Faticoni, *Categories of Modules over Endomorphism Rings*, Mem. Amer. Math. Soc., **103** (1993).

[23] T.G. Faticoni, *Modules over Endomorphism Rings as Homotopy Classes*, în *Abelian Groups and Modules*, Kluwer Academic Publishers, 1995, 163–183.

[24] L. Fuchs, *Infinite abelian groups*, vol. 1 şi 2, Cambridge Univ. Press, 1970 şi 1973.

[25] K.R. Fuller, *Density and equivalence*, J. Algebra, **29** (1974), 528–550.

[26] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France, **90** (1962), 323–448.

[27] P. Gabriel, M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Ergebnisse der Math., **35**, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[28] J.L. García Hernández, J.L. Gómez Pardo, *On endomorphism rings of quasiprojective modules*, Math. Z., **196** (1987), 87–108.

[29] J.L. García Hernández, J.L. Gómez Pardo, *Self-injective and PF-endomorphism rings*, Israel J. Math., **58** (1987), 324–350.

[30] J.L. García, L. Marin, *An extension of a theorem on endomorphism rings and equivalences*, J. Algebra, **181** (1996), 962–966.

[31] J.L. García, M. Saorín, *Endomorphism rings and category equivalences*, J. Algebra, **127** (1989), 182–205.

[32] G.A. Garkusha, *Grothendieck categories*, St. Petersburg Math. J., **13** (2002), no. 2, 149–200.

[33] R. Gentle, *T.T.F. Theories in abelian categories*, Comm. Algebra, **16** (1988), 877–908.

[34] J.L. Gómez Pardo, J. Martínez Hernández, *Coherence of endomorphism rings*, Arch. Math., **48** (1987), 40–52.

[35] J.L. Gómez Pardo, G. Militaru, C. Năstasescu, *When is* $\mathrm{HOM}_R(M,-)$ *equal to* $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ *in the category R-gr?*, Comm. Algebra, **22** (1994), 3171–3181.

[36] J.L. Gómez Pardo, C. Năstăsescu, *Relative projectivity, graded Clifford theory and applications*, J. Algebra, **141** (1991), 484–504.

[37] M. Harada, *Perfect categories IV*, Osaka J. Math., **10** (1973), 585–596.

[38] I.D. Ion, N. Radu, *Algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.

[39] H. Krause, *A short proof of Auslander Reiten formulae,* preprint disponibil la adresa de Internet `www.mathematik.uni-bielefeld.de/~henning/` .

[40] H. Krause, *The spectrum of a module category*, Habilitationsschrift, Universität Bielefeld, 1998.

[41] M.G. Leeney, *LLI Rings and modules of type LI*, Comm. Algebra, **20** (1992), 943-953.

[42] S. Mac Lane, *Homology*, Springer–Verlag, Berlin, 1963.

[43] S. Mac Lane, *Kategorien*, Begriffssprache und mathematische Theorie, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972. (Traducere în germană a cărţii *Categories. For the Working Mathematician.*)

[44] A. Marcus, *Modules graded by G-sets and Clifford theory*, Mathematica(Cluj), **37(60)** (1995), no 1–2, 131–154.

[45] A. Marcus, **C. Modoi**, *Graded endomorphism rings and equivalences*, Comm. Algebra, 31(7), (2003), 3219–3249.

[46] A. Marcus, **C. Modoi**, *Groups of homomorphism graded by G-sets*, Italian J. of Pure Appl. Math., **8** (2000), 115–126.

[47] C. Menini, A. del Rio, *Morita duality and graded rings*, Comm. Algebra, **19** (1991), 1765–1794.

[48] C. Menini, A. Orsatti *Representable equivalences between categories of modules and applications*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova, **82** (1989), 203–231.

[49] B. Mitchell, *Theory of Categories*, Academic Press, New-York, 1965.

[50] **C. Modoi**, *Equivalences induced by adjoint functors*, Comm. Algebra, **31(5)** (2003), 2327–2355.

[51] **C. Modoi**, *Graded Gabriel topologies*, în *Proceedings of the Algebra Symposium*, "Babeş-Bolyai" University, 2002, 139–148.

[52] **C. Modoi**, *Modules over triangulated categories and localization*, manuscris.

[53] C. Năstăsescu, Ş. Raianu, F. Van Oystaeyen, *Modules graded by G-sets*, Math. Z., **203** (1990), 605–627.

[54] C. Năstăsescu, L. Shaoxue, F. Van Oystaeyen, *Graded modules over G-sets II*, Math. Z., **207** (1991), 341–358.

[55] C. Năstăsescu, F. Van Oystaeyen, *Graded Ring Theory*, North-Holland, 1982.

[56] C. Năstăsescu, F. Van Oystaeyen, *Graded and Filtred Rings and Modules*, Lecture Notes in Math., **758**, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[57] C. Năstăsescu, *Inele. Module. Categorii*, Editura Academiei, Bucureşti, 1976.

[58] C. Năstăsescu, B. Torrecillas, *Relative graded Clifford theory*, J. Pure Appl. Algebra, **83** (1992), 177–196.

[59] G.P. Niedzwecki, J.D. Reid, *Abelian groups projective over their endomorphism rings*, J. Algebra, **159** (1993), 139–149.

[60] D.G. Northcott, *Homological Algebra*, Cambridge Univ. Press, 1960.

[61] T. Okuyama, K. Uno, *On the vertices of modules in the Auslander-Reiten quiver II*, Math. Z., **217** (1994), 121–141.

[62] N. Popescu, *Categorii abeliene*, Editura Academiei, Bucureşti, 1971.

[63] N. Popescu, L. Popescu, *Theory of Categories*, Editura Academiei, Bucureşti, România and Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1979.

[64] N. Popescu, N. Radu, *Teoria categoriilor şi a fasciculelor*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti 1971.

[65] I. Purdea, Gh. Pic, *Tratat de algebră modernă*, vol.1, Editura Academiei, Bucureşti, 1977.

[66] I. Purdea, *Tratat de algebră modernă*, vol.2, Editura Academiei, Bucureşti, 1982.

[67] Al. Radu, *Inele locale*, Editura Academiei, Bucureşti, 1968.

[68] J.D. Reid, *Abelian groups finitely generated over their endomorphism rings*, Lecture Notes in Math., **874**, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981, 41–52.

[69] F. Richman, E. Walker, *Primary groups as modules over their endomorphism rings*, Math. Z., **89** (1965), 77–81.

[70] A. del Río, *Categorical methods in graded ring theory*, Publ. Math., **36** (1993), 489–531.

[71] A. del Río, *Graded rings and equivalences of categories*, Comm. Algebra **19** (1991), 997–1012.

[72] B. Stenström, *Rings of Quotients*, Springer–Verlag, 1975.

[73] F. Ulmer, *A flatness criterion in Grothendieck categories*, Invent. Math., **19** (1973), 331–336.

[74] E. Walker, *Quotient categories and quasi-isomorphisms of abelian groups*, în *Proc. Colloq. Abelian Groups*, Budapest, 1964, 147–162.

[75] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, 1991.

[76] R. Wisbauer, *Static modules and equivalences*, în *Interactions between ring theory and representations of algebras*, Murcia, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **210**, Marcel Dekker, New York, 2000, 423–449.

[77] R. Wisbauer, *Tilting in module categories*, în *Abelian groups, module theory, and topology*, Padua, 1997, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **201**, Marcel Dekker, New York, 1998, 421–444.

Glosar