Examen algebră, 22.02.2012

1. a) Definiţi noţiunile şi daţi câte un exemplu din fiecare: compunerea a două funcţii, grup, subspaţiu a unui spaţiu vectorial.

b) Enunţaţi proprietatea de universalitate a bazei unui spaţiu vectorial.

c) Fie V un K-spaţiu vectorial şi $S, T \leq_K V$. Arătaţi că suma $S+T$ este directă ddacă orice vector din $S+T$ se scrie în mod unic ca o sumă dintre un vector din S şi unul din T.

2. a) Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară, $\{x_1, \ldots, x_k\}$ o bază în $\mathrm{Ker} f$ care se completează pană la o bază $\{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ în V. Arătaţi că $\{f(x_{k+1}), \ldots, f(x_n)\}$ este o bază în $\mathrm{Im} f$.

b) Discutaţi şi rezolvaţi sistemul utilizând Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \alpha \\ 3x_1 - 5x_3 - 2x_4 = 5 - \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

3. Se dă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prin $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 4x_2 - 2x_3, -6x_1 + 10x_2 - 4x_3, -9x_1 + 12x_2 - 4x_3)$. Arătaţi că $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Verificaţi dacă f este diagonalizabil şi dacă da, diagonalizaţi f (determinaţi baza şi forma diagonală).

Examen algebră, 22.02.2012

1. a) Definiţi noţiunile şi daţi câte un exemplu din fiecare: compunerea a două funcţii, grup, subspaţiu a unui spaţiu vectorial.

b) Enunţaţi proprietatea de universalitate a bazei unui spaţiu vectorial.

c) Fie V un K-spaţiu vectorial şi $S, T \leq_K V$. Arătaţi că suma $S+T$ este directă ddacă orice vector din $S+T$ se scrie în mod unic ca o sumă dintre un vector din S şi unul din T.

2. a) Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară, $\{x_1, \ldots, x_k\}$ o bază în $\mathrm{Ker} f$ care se completează pană la o bază $\{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ în V. Arătaţi că $\{f(x_{k+1}), \ldots, f(x_n)\}$ este o bază în $\mathrm{Im} f$.

b) Discutaţi şi rezolvaţi sistemul utilizând Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \alpha \\ 3x_1 - 5x_3 - 2x_4 = 5 - \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

3. Se dă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prin $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 4x_2 - 2x_3, -6x_1 + 10x_2 - 4x_3, -9x_1 + 12x_2 - 4x_3)$. Arătaţi că $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Verificaţi dacă f este diagonalizabil şi dacă da, diagonalizaţi f (determinaţi baza şi forma diagonală).

Examen algebră, 22.02.2012

1. a) Definiţi noţiunile şi daţi câte un exemplu din fiecare: compunerea a două funcţii, grup, subspaţiu a unui spaţiu vectorial.

b) Enunţaţi proprietatea de universalitate a bazei unui spaţiu vectorial.

c) Fie V un K-spaţiu vectorial şi $S, T \leq_K V$. Arătaţi că suma $S+T$ este directă ddacă orice vector din $S+T$ se scrie în mod unic ca o sumă dintre un vector din S şi unul din T.

2. a) Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară, $\{x_1, \ldots, x_k\}$ o bază în Ker$f$ care se completează pană la o bază $\{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ în V. Arătaţi că $\{f(x_{k+1}), \ldots, f(x_n)\}$ este o bază în Imf.

b) Discutaţi şi rezolvaţi sistemul utilizând Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \alpha \\ 3x_1 - 5x_3 - 2x_4 = 5 - \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

3. Se dă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prin $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 4x_2 - 2x_3, -6x_1 + 10x_2 - 4x_3, -9x_1 + 12x_2 - 4x_3)$. Arătaţi că $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Verificaţi dacă f este diagonalizabil şi dacă da, diagonalizaţi f (determinaţi baza şi forma diagonală).

Examen algebră, 22.02.2012

1. a) Definiţi noţiunile şi daţi câte un exemplu din fiecare: compunerea a două funcţii, grup, subspaţiu a unui spaţiu vectorial.

b) Enunţaţi proprietatea de universalitate a bazei unui spaţiu vectorial.

c) Fie V un K-spaţiu vectorial şi $S, T \leq_K V$. Arătaţi că suma $S+T$ este directă ddacă orice vector din $S+T$ se scrie în mod unic ca o sumă dintre un vector din S şi unul din T.

2. a) Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară, $\{x_1, \ldots, x_k\}$ o bază în Ker$f$ care se completează pană la o bază $\{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ în V. Arătaţi că $\{f(x_{k+1}), \ldots, f(x_n)\}$ este o bază în Imf.

b) Discutaţi şi rezolvaţi sistemul utilizând Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \alpha \\ 3x_1 - 5x_3 - 2x_4 = 5 - \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

3. Se dă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prin $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 4x_2 - 2x_3, -6x_1 + 10x_2 - 4x_3, -9x_1 + 12x_2 - 4x_3)$. Arătaţi că $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Verificaţi dacă f este diagonalizabil şi dacă da, diagonalizaţi f (determinaţi baza şi forma diagonală).