Parţial Algebră – Rândul 1

1. a) Să se definiească noţiunile şi să se dea câte un exemplu din fiecare: mulţime factor, element minimal, homomorfism de grupuri.
b) Fie $f : G \to H$ un homomorfism de grupuri. Să se arate că $\mathrm{Ker}(f)$ este subgrup în G.
c) Fie A o mulţime şi G un grup. Să se arate că dacă $\alpha : G \times A \to A$ este o funcţie cu proprietăţile $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$ şi $\alpha(1, x) = x$ pentru orice $g, h \in G$ şi orice $x \in A$ atunci $\phi : G \to S(A)$, $\phi(g)(x) = \alpha(g, x)$ este un homomorfism de grupuri ($S(A)$ este grupul simetric al mulţimii A).
2. Se consideră funcţiile: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2 \\ 3x - 2, & x < 2 \end{cases} \text{ şi } g(x) = x^2 - 6x + 5.$$

a) Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea acestor funcţii.
b) Dacă există să se determine inversele acestor funcţii.
c) Dacă sunt definite să se calculeze compunerile $f \circ g$ şi $g \circ f$.
d) Să se găsească două functţii h_1, h_2 asftfel încât $g \circ h_1$ şi $g \circ h_2$ să fie definite, $g \circ h_1 = g \circ h_2$, dar $h_1 \neq h_2$.
3. a) Arătaţi că relaţia $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \equiv)$ este o echivalenţă, unde $x \equiv y$ ddacă $[x] = [y]$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$. Determinaţi o bijecţie $\mathbb{R}/_{\equiv} \to \mathbb{Z}$.

b) Arătaţi că $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \vdots)$ este o relaţie de ordine, unde $n \vdots m$ ddacă există $q \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = mq$, şi că $f : (\mathbb{N}, \vdots) \to (\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$, $f(n) = n\mathbb{Z}$ este o funcţie crescătoare, unde $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ este mulţimea submulţimilor lui $\mathbb{Z}$.
4. a) Arătaţi că $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ este un subgrup în $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$.
b) Găsiţi un izomorfism de grupuri $f : \mathbb{C}^* \to G$, cu G de la a).
c) Arătaţi că într-un grup (oarecare) $(G, \cdot)$ este valabilă $\mathrm{ord}(xy) = \mathrm{ord}(yx)$, $\forall x, y \in G$.