Il instruisit les Rois, il éclaira les Sages,
Plus sage qu'eux, il sut douter"

i-ar fi părut prea palide şi lipsite de entuziasmul ce se cuvine a fi prestat operei grandioase a acestui demn rival al lui Newton.

BIBLIOGRAFIE

1. D. MANGERON, Opera ştiinţifică a Şcolii Galileiene. Cu ocazia tricentenarului de la moartea lui Evangelista Torricelli (1608—1647) şi Bonaventura Cavalieri (1598? — 1647). Revista ştiinţifică, Iaşi, XXXIII, 1, 1947, pp. 3—11.
2. — , Matematica în cadrul Istoriei gîndirii ştiinţifice şi a Culturii. Revista ştiinţifică, Iaşi, XXXII, 1, 1946, pp. 3—10.
3. — , Opera ştiinţifică a lui Gustav Magnus Mittag-Leffler, (16. III. 1846—7. VII. 1927). Revista Matematică din Timişoara, XXVI, 3—4, 1946, pp. 3—8.
4. — , Opera Matematică a lui Gheorghe Bratu. Anuarul Institutului politehnic din Iaşi, 1937—1942, Tip. Terek, Iaşi, 6 pagini.
5. — , Gaspard Monge şi Şcoala politehnică din Paris, Revista ştiinţifică, Iaşi, XXXII, 2, 1946, 4 pagini.
6. — , Opera matematică a lui Colin Maclaurin, Revista ştiinţifică, Iaşi, XXXII, 3, 1946, 4 pagini.
7. — , Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716). Cu ocazia tricentenarului de la naşterea sa. Revista şriinţifică, Iaşi, XXXII, 2—3, 1946, pp. 3—10.
8. V. I. LENIN, Caiete filozofice, Ed. Politică, Buc., 1957, p.
9. M. PICONE, Galileo Galilei. Discorso pronunciato alla Commemorazione solenne promossa dall'Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1964, 10 pagini.
10. , Programma di celebrazioni Galileiani. Informazione Scientifica, Roma, 1964, ,nr. 1.
11. F. ENGELS, Dialectica naturii, Ed. politică, Buc., 1956, p.
12. D. MANGERON şi colab., Dezvoltarea ştiinţelor tehnice în Moldova. Centenarul Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi, vol. II, 1960, 16 pagini.
13. J. E. HOFFMANN, Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik, während des Aufenthaltes in Paris (1672—1676). Mümchen, 1949.
14. I. NEWTON, Principiile matematice ale Filozofiei naturale, trad. şi adn. de V. Marian, Ed. Tehn., Buc., 1956.
15. A. MYLLER, ISAAC NEWTON, Natura, 16, 1927, pp. 1—6.

ASUPRA POLINOAMELOR LUI S. N. BERNSTEIN. SPECTRUL OPERATORULUI.

GR. CĂLUGĂREANU

S. N. Bernstein a introdus polinoamele de interpolare

$$B_n[f;\ x] = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$

care sînt mult folosite în teoria aproximării unei funcţii continue pe un interval finit şi închis.

Se pune problema de a găsi acele funcţii $f(x)$ pentru care avem

$$B_n[f;\ x] = f(x).$$

Deoarece B_n este totdeauna un polinom, se vede că şi $f(x)$ trebuie să fie un polinom.

Mai precis vom căuta acele polinoame care sînt elemente fixe ale operatorului B_n, dînd loc egalităţii

$$B_n[P(x);\ x] = P(x).$$

Vom demonstra în cele ce urmează următoarea

Teoremă. Polinomul B e r n s t e i n al unui polinom, coincide cu acesta, atunci şi numai atunci cînd gradul polinomului este unu (efectiv sau nu).

Această teoremă s-ar putea enunţa şi altfel: singurele polinoame fixe ale operatorului liniar şi pozitiv B e r n s t e i n sînt cele de grad unu (efectiv sau nu).

Suficienţa acestei teoreme este cunoscută şi rezultă uşor astfel

$$B_n[ax + b; x] = \sum_{i=0}^{n} \left(a\frac{i}{n} + b\right) C_n^i x^i (1 - x)^{n-i}$$

dar avem formulele

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i (1 - x)^{n-i} = 1, \qquad \sum_{i=0}^{n} i C_n^i x^i (1 - x)^{n-i} = nx \tag{1}$$

deci

$$B_n[ax + b; x] = \frac{a}{n} \cdot nx + b \cdot 1 = ax + b.$$

Pentru a demonstra *necesitatea* acestei teoreme este destul să arătăm că polinomul

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \qquad (m \leqslant n)$$

coincide cu polinomul $B_n[P(x); x]$, numai cînd $a_i = 0$, $i = 2, 3, \ldots$

Observăm că problema s-ar rezolva uşor dacă am reuşi să găsim formule de tipul (1) pînă la

$$\sum_{i=0}^{n} i^m C_n^i x^i (1 - x)^{n-i}.$$

Vom demonstra totuşi necesitatea fără a găsi efectiv valorile acestor expresii, în felul următor: formulele de tipul (1) se găsesc pornind de la formula binomului lui N e w t o n:

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} = (p + q)^n. \tag{2}$$

Egalitatea (2) se derivează în raport cu p şi se înmulţeşte cu p, operaţie care repetată de m ori dă succesiv

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} i C_n^i p^i q^{n-i} = np(p + q)^{n-1} P_1 \\ &\sum_{i=0}^{n} i^2 C_n^i p^1 q^{n-i} = np(p + q)^{n-2} P_2 \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sum_{i=0}^{n} i^m C_n^i p^i q^{n-i} = np(p + q)^{n-m} P_m \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Se observă că expresiile P_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ sînt polinoame omogene în raport cu p şi q de grad $i - 1$. Avem de exemplu: $P_1 = 1$, $P_2 = np + q$, $P_3 = n^2p^2 + (3n - 1)pq + q^2$.

Lemă. Polinoamele P_i sînt expresii de forma

$P_i = (np)^{i-1} + qQ_i$, unde Q_i sînt tot expresii omogene în p şi q, polinoame de grad $i - 2$.

Pentru a demonstra aceasta e suficient să arătăm că, căutînd P_i sub forma

$$P_i = A_1^i p^{i-1} + A_2^i p^{i-2} q + \ldots + A_i^i q^{i-1}. \tag{4}$$

avem coeficienţii $A_1^i = n^{i-1}$, $\quad i = 1, 2, 3, \ldots$

Studiind mai amănunțit procesul care dă formulele (3) găsim relația de recurență:

$$P_i = (n - i + 2) P_{i-1} + q\, P_{i-1} + p\,(p + q)\, P'_{i-1}. \tag{4'}$$

Înlocuind P_i și P_{i-1} sub forma (4) și identificînd coeficienții lui p^{i-1} avem

$$A_1^i = (n - i + 2)\, A_1^{i-1} + (i - 2)\, A_1^{i-1} = n A_1^{i-1}.$$

Ținînd seama că $P_1 = 1$ rezultă imediat că $A_1^i = n^{i-1}$ și lema e demonstrată.

Observație. Făcînd în (4) $p = 1$, $q = -1$ avem

$$S_i = P_i(1,\ -1) = A_1^i - E_i$$

unde $E_i = A_2^i - A_3^i + \ldots + (-1)^i A_i^i = n^{i-1} - (n-1)(n-2)\ldots$ $\ldots (n - i + 1) > 0$, căci din (4') avem $S_i = (n - i + 1)\, S_{i-1}$ de unde $S_i = (n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)$, $i - 1$ paranteze. Deci $E_i = n^{i-1} -$ $- (n-1)(n-2)\ldots(n-i+1) > 0, \quad i = 2, 3, \ldots, m.$

Înlocuind p cu x și q cu $1 - x$, avem formulele:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} i C_n^i x^i (1 - x)^{n-i} = nxP_1 = nx \\
&\sum_{i=0}^{n} i^2 C_n^i x^i (1 - x)^{n-i} = nxP_2 = nx[nx + (1 - x)\, Q_2] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\sum_{i=0}^{n} i^m C_n^i x^i (1 - x)^{n-i} = nxP_m = nx[(nx)^{m-1} + (1 - x)\, Q_m]
\end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

unde polinoamele $Q_i\,(i = 2,\ 3,\ \ldots,\ m)$ sînt omogene în x și $1 - x$ și de gradul $i - 2$.

Să considerăm în sfîrșit

$$B_n[P(x);\, x] = B_n[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m;\, x] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(a_0 + a_1 \frac{i}{n} + \ldots + a_m \frac{i^m}{n^m} \right) C_n^i x^i (1 - x)^{n-i} =$$

$$= a_0 \cdot 1 + \frac{a_1}{n} \cdot nx + \ldots + a_m \cdot \frac{1}{n^m} [(nx)^m + nx(1 - x)\, Q_m] =$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + x(1 - x)\, n^{-1} \left[a_2 Q_2 + a_3 \frac{Q_3}{n} + \ldots + \frac{a_m Q_m}{n^{m-2}} \right].$$

Punînd condiția $B_n[P(x);\ x] = P(x)$ și notînd $\dfrac{a_i}{n^{i-2}} = K_i$ vedem că e suficient să arătăm că are loc identitatea:

$$K_2 Q_2 + K_3 Q_3 + \ldots + K_m Q_m = 0 \tag{5}$$

unde $Q_i = A_2^i x^{i-2} + A_3^i x^{i-3} (1 - x) + \ldots + A_i^i (1 - x)^{i-2} =$

$$= [A_2^i - A_3^i + \ldots + (-1)^i A_i^i]\, x^{i-2} + \ldots = E_i x^{i-2} + \ldots$$

$(i = 2,\ 3,\ \ldots,\ m)$.

Făcînd identificarea cu zero a expresiei (5), să începem cu coeficientul puterii cea mai mare, adică x^{m-2}. Deoarece acesta este $K_m E_m$ și $E_m > 0$ urmează că $K_m = 0$ și ultimul termen din (5) dispare. Făcînd identificarea după x^{m-3} avem analog $K_{m-1} = 0$. Astfel din aproape în aproape avem $K_{m-2} = K_{m-3} = \ldots = K_2 = 0$ și deci $a_2 = a_3 = \ldots =$ $= a_m = 0$ și teorema e demonstrată.

Demonstrînd această teoremă, am găsit o valoare proprie a operatorului Bernstein

$$B_n[f; x] = \lambda f \tag{6}$$

$\lambda = 1$ şi respectiv funcţiile proprii corespunzătoare: polinoamele de gradul întîi.

Se pune problema de a determina spectrul operatorului Bernstein, adică de a găsi toate valorile proprii λ, respectiv funcţiile proprii f pentru care are loc (6).

Deoarece $B_n[f; x]$ este un polinom urmează că funcţiile f, proprii pot fi numai polinoame; deci dacă

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_mx^m$$

căutăm cînd are loc egalitatea

$$B_n[P(x); x] = \lambda \cdot P(x).$$

Revenind la calculele precedente avem

$$(1 - \lambda)\, P(x) + \frac{a_2x(1-x)\,Q_2}{n} + \ldots + \frac{a_mx(1-x)\,Q_m}{n^{m-1}} = 0$$

unde Q_m este un polinom de grad $m - 2$.

$$Q_m = E_mx^{m-2} + \ldots, \qquad E_i = n^{i-1} - (n-1)(n-2)\ldots(n-i+1) > 0$$
$$i = 2, 3, \ldots, m.$$

Avem deci o condiţie necesară

$$n^{m-1}(1-\lambda)\,a_m - a_mE_m = 0 \quad \text{sau} \quad a_m(n^{m-1}(1-\lambda) - E_m) = 0.$$

Pentru $\lambda \geqslant 1$ avem $a_m = a_{m-1} = \ldots = a_2 = 0$ căci $E_m > 0$ şi deci $\lambda > 1$ nu vor fi valori proprii.

Valoarea $\lambda = 1 - \frac{E_m}{n^{m-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$ este proprie, funcţiile proprii corespunzătoare fiind polinoame de grad m, depinzînd omogen de coeficientul a_m.

Deoarece avem $\frac{E_i}{n^{i-1}} = \cancel{1-}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{i-1}{n}\right)$ urmează că avem în general $\frac{E_i}{n^{i-1}} \neq \frac{E_j}{n^{j-1}}$ cînd $i \neq j$ şi deci $\lambda = 1 - \frac{E_i}{n^{i-1}}$ vor fi tot valori proprii ale operatorului Bernstein, funcţiile proprii corespunzătoare fiind polinoame de grad i, $i = 2, 3, \ldots, m$.

Dacă $\lambda \neq 1 - E_i$, $\lambda \neq 1$, $i = 2, 3, \ldots, m$ avem $a_m = a_{m-1} = \ldots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$, caz banal.

Putem deci enunţa următorul

Corolar. Valorile proprii ale operatorului Bernstein, $B_n[f; x]$ (pe n noduri) sînt în număr de n, toate cuprinse în intervalul $(0, 1]$ şi de forma

$$\lambda_m = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right), \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Fiecărei valori proprii îi corespunde o infinitate de polinoame de grad m ca funcţii proprii corespunzătoare.