

Sinteza lucrărilor

efectuate în cadrul grantului PN2CD-ID-489 (contract 302/01.10.2007)

Clase de torsiune și de cotorsiune

Activitățile din cadrul grantului s-au desfășurat conform planului stabilit în proiectul inițial. Ele s-au concretizat în anul 2009 în 4 lucrări științifice acceptate de reviste indexate ISI, 1 acceptat de o revistă indexată BDI, 1 acceptat într-un volum ce va fi indexat BDI (Mathematical Reviews) și un volum de tip proceedings ce va fi indexat BDI (Mathematical Reviews). De asemenea s-au stabilit bazele pentru alte 4 proiecte de lucrări științifice ce vor fi elaborate în perioada următoare. S-au efectuat vizite de cercetare la Universitatea Charles din Praga, Universitatea din Paderborn și la Universitatea din Napoli. S-a îmbunătățit baza de cercetare, achiziționându-se materiale pentru bibliotecă.

Ia. Lucrări științifice acceptate de reviste indexate ISI

Descriem în cele ce urmează conținutul lucrărilor științifice elaborate care au fost acceptate pe parcursul anului 2009, până la data elaborării acestui raport.

1. U. Albrecht, **S. Breaz**, W. Wickless, *Self-small abelian groups*, acceptată de *Bulletin of the Australian Mathematical Society*.

Lucrarea are două obiective: găsirea de noi caracterizări pentru grupurile auto-mici de rang finit și determinarea de invarianți care pot fi atașați acestor grupuri. Clasa grupurilor auto-mici conține două tipuri importante de grupuri: grupurile fără torsiune de rang finit și grupurile cu câțuri divizibile. Grupurile cu câțuri divizibile au fost caracterizate de Fomin și Wickless în 1998 ca fiind acele grupuri ce pot fi scufundate în produse de module p -adice finit generate care îndeplinesc o condiție de proiecție. Folosind această idee, s-a reușit să se demonstreze că un grup abelian de rang fără torsiune finit este auto-mic dacă și numai dacă el este extinderea unui grup fără torsiune S -divizibil ($S \subseteq \mathbb{P}$ e fixată) printr-un grup care poate fi scufundat într-un produs de module p -adice finit generate, $p \in S$, care îndeplinește aceeași condiție de proiecție ca cea descoperită de Fomin și Wickless.

Pentru al doilea obiectiv, s-a plecat de la observația că grupurile fără torsiune de rang 1 și cele cu câțuri divizibile de rang fără torsiune pot fi caracterizate prin invarianți. Întrebarea naturală ce apare este dacă pot fi caracterizate cu invarianți și grupurile auto-mici de rang fără torsiune 1 cu ajutorul unor invarianți. Răspunsul este pozitiv și este prezentat în cele ce urmează.

Fie $T = \bigoplus_{p \in S} Z(p^{k_p})_{a_p}$, unde S o mulțime infinită de numere prime, $0 < k_p < \infty$ pentru orice p , și a_p generatori pentru grupurile ciclice corespunzătoare. Definim $\tau = \text{type}T$, tipul furnizat de caracteristica (χ_p) , unde $\chi_p = k_p$ dacă $p \in S$ și $\chi_p = 0$ dacă $p \notin S$.

Dacă T este un astfel de grup, considerăm $T \leq \widehat{T} = \prod_{p \in S} Z(p^{k_p})_{a_p}$ și $a = (a_p) \in \widehat{T}$. Fie X un grup cu $Z_{-S} \leq X \leq Q$, unde Z_{-S} este subinelul lui Q , generat de Z și $\{1/p : p \in S\}$. Definim $A(T, X)$ ca fiind imaginea inversa a subgrupului $X(a + T) \leq \widehat{T}/T$ fața de surjecția canonică $\widehat{T} \rightarrow \widehat{T}/T$.

Teorema 1. *Fie A un grup auto-mic de rang fără torsiune 1. Atunci A este izomorf în categoria Walk cu un grup A' , unde A' fără torsiune sau $A' \cong A(T, X)$ pentru anumite grupuri T și X .*

Fie \mathcal{S}_1 mulțimea claselor de grupuri auto-mici de rang fără torsiune 1 modulo Walk-izomorfisme și \mathcal{T} mulțimea perechilor (τ, σ) , unde τ este un tip pentru care toate componentele caracteristicilor ce îl reprezintă sunt finite și σ este un tip p -divizibil pentru aproape toate numerele prime p pentru care o caracteristică (oarecare, dar fixată) a lui τ este infinită.

Dacă $[A] \in \mathcal{S}_1$, punem $\tau_A = \text{type}T(A)$ și $\sigma_A = \text{type}[A/T(A)]$.

Corolarul 2. *Aplicația $[A] \rightarrow (\tau_A, \sigma_A)$ este o bijecție între mulțimea \mathcal{S}_1 și mulțimea \mathcal{T} .*

2. **S. Breaz**, *Commutativity conditions using normal subgroup lattices*, acceptată de *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Universita di Padova*.

Este bine cunoscut faptul că în general nu putem spune dacă un grup este abelian folosind laticia subgrupurilor sale normale. În această lucrare demonstrăm ca acest fapt este totuși posibil în anumite situații: Un grup G este abelian dacă (i) el este nilpotent și laticia subgrupurilor sale normale este izomorfă cu laticia subgrupurilor unui grup abelian sau (ii) există un grup abelian B , care nu este de torsiune, astfel încât laticia subgrupurilor normale ale lui $B \times G$ este izomorfă cu laticia subgrupurilor unui grup abelian. S-a mai arătat că (i) nu este valabilă pentru grupuri solubile. Folosind (ii), s-a demonstrat că un grup abelian A poate fi determinat (până la un izomorfism) în clasa tuturor grupurilor de laticia subgrupurilor normale ale unui grup. Mai precis, dacă A este un grup abelian și G este un grup astfel încât $\mathbb{Z} \times A$ și $\mathbb{Z} \times G$ au laticile subgrupurilor normale izomorfe, atunci A și G sunt izomorfe.

3. **G. C. Modoi**, *On generating projective classes in triangulated categories*, acceptată la *Communications in Algebra*.

O clasa proiectivă într-o categorie triangulată este o pereche formată dintr-o clasă de obiecte și o clasă de morfisme care formează un ideal, cu proprietatea că ele sunt ortogonale una pe cealaltă. Spunem ca o clasă proiectivă într-o categorie triangulată cu coproduse arbitrare este perfectă

atunci când idealul considerat este închis la coproduse (de morfisme). În lucrare sunt studiate clasele proiective perfecte precum și așa numitele turnuri fantomatic și celular asociate acestei clase proiective și unui obiect oarecare. Dându-se o clasă proiectivă perfectă care generează categoria triangulată considerată, se arată că orice obiect este izomorf cu colimita omotopică a turnului celular asociat acestui obiect. Folosind acest rezultat, precum și o teoremă de reprezentabilitate demonstrată de Neeman, asemănătoare teoremei Freyd referitoare la functori adjuncți deducem în continuare o demonstrație a teoremei de reprezentabilitate a lui Brown într-o versiune care le generalizează pe cele existente până acum.

4. U. Albrecht, **S. Breaz**, *Quasi-isomorphisms and groups of quasi-homomorphisms*, acceptată de *Journal of Algebra and its Applications*.

În această lucrare cercetăm ce proprietăți ale grupurilor auto-mici de rang fără torsiune finit G pot fi determinate de clasa grupurilor de morfisme $\text{Hom}(G, C)$, unde C parcurge o clasă de grupuri abeliene dată, \mathcal{C} . Se demonstrează că G este determinat până la un quasi-izomorfism dacă \mathcal{C} este clasa tuturor grupurilor auto-mici C cu $r_0(C) \leq r_0(G)$. Se arată și că în general G nu este determinat până la un izomorfism. Sunt demonstrate și alte rezultate legate de acest subiect folosindu-se și clase de anihilatori.

Ib. Lucrări științifice acceptate de reviste și volume ce vor fi indexate de *Mathematical Reviews*

5. **S. Breaz, F. Pop**, *Dualities induced by adjoint contravariant functors*, acceptată de *Studia Universitatis Babeș-Bolyai University, series Mathematica*.

Sunt generalizate rezultate obținute de S. Breaz în lucrarea *Finitistic n -quasi-tilting modules*, folosind de data aceasta functori contravarianți adjuncți între categorii aditive cât mai generale, cu scopul de a transmite rezultatele către categorii de module graduate sau de comodule.

6. **S. Breaz, G.C. Modoi, F. Pop**, *Natural equivalences and dualities*, în volumul *Proceedings of the International Conference on Modules and Representation Theory, "Babeș-Bolyai" University Cluj, 2008*; S. Breaz, S. Crivei, A. Marcus (editori), ed. Presa Universitară, Cluj-Napoca, 2009, pp. 25–40.

Sunt prezentate rezultate și principii de bază legate de echivalențe și dualități ce se pot stabili între diverse subcategorii de module.

7. **S. Breaz**, S. Crivei, A. Marcus (editori) *Proceedings of the International Conference on Modules and Representation Theory, "Babeș-Bolyai" University Cluj, 2008*; ed. Presa Universitară, Cluj-Napoca, 2009, pp. 25–40.

Ic. Lucrări științifice aflate în stadiu avansat de elaborare

Proiectele descrise în continuare se afla în diverse stadii de elaborare. Estimăm ca ele vor fi finalizate pe parcursul anului 2010.

8. **S. Breaz**, *Warfield dualities induced by self-small mixed groups*, trimisă la *Journal of Group Theory*.

Această lucrare este parte a studiului descris în obiectivele “Obiecte mici în subcategorii” și “Echivalențe și dualități între subcategorii”. Sunt studiate dualități de tip Warfield, induse de functorii contravariați adjuncți

$$(-)^* = \text{Hom}(-, A) : \text{Ab} \rightarrow \text{Ab} : \text{Hom}(-, A) = (-)^*$$

împreună cu transformările naturale $\nu : 1_{\text{Ab}} \rightarrow (-)^{**}$ pentru cazul când A este un grup auto-mic de rang fără torsiune 1. Un grup C este A -reflexiv dacă ν_C (respectiv δ_C) este un izomorfism. Rezultatele principale ale lucrării sunt următoarele

Teorema 3. *Fie A un grup auto-mic de rang fără torsiune 1. Un grup de torsiune și finit- A -cogenerat T este A -reflexiv dacă și numai dacă $T_p = 0$ pentru toate numerele prime p cu $T_p(A)$ grup non-ciclic.*

Teorema 4. *Fie A un grup auto-mic de rang fără torsiune 1 și U mulțimea minimală de numere prime astfel încât $A(U)$ are forma standard. Dacă C este un grup finit- A -cogenerat care nu este grup de torsiune, următoarele afirmații sunt echivalente:*

- a) C este A -reflexiv;
- b) i) $S(A) \subseteq D(A)$
ii) $T_p(C) = 0$ for all $p \in U$, and
iii) C este $A(U)$ -reflexiv.

Teorema 5. *Fie A un grup standard, auto-mic de rang fără torsiune 1. Dacă C este un grup auto-mic de rang fără torsiune $n > 0$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

- a) C este A -reflexiv;
- b) i) $T_p(C) = T_p(A)^n$ pentru aproape toate numerele prime $p \in S(A)$;
ii) Dacă $T_p(A) \cong \mathbb{Z}(p^{k_p})$, atunci $p^{k_p}T_p(C) = 0$;
iii) \overline{C} este \overline{A} -reflexiv.

Studiul conține de asemenea rezultate legate de structura grupurilor A -cogenerate, unde A este un grup auto-mic de rang fără torsiune finit.

9. U. Albrecht, **S. Breaz**, *A Note on Mixed A -reflexive groups*.

Continuăm studiul inițiat în lucrarea [8] din această sinteza pentru cazul general al grupurilor mixte de rang fără torsiune 1. Am arătat că există situații când studiul cazului general poate fi redus la cazul grupurilor auto-mici.

10. **S. Breaz**, J. Trlifaj, *Modules determined by their annihilator classes*.

Unul dintre obiectivele acestei lucrări este de a clasifica modulele de lungime finită care sunt caracterizate de lungimea lor și de teoria de torsiune cogenerată de ele. Este considerată și problema modulelor determinate de lungimea lor și de teoriile de cotorsiune generate de aceste module.

11. **S. Breaz, C. Conțiu**, *Groups which are determined by subgroup lattices*.

Sunt studiate situații în care anumite clase de grupuri sunt determinate până la izomorfisme de izomorfisme între laticile de subgrupuri (normale) atașate lor.

II. Diseminarea rezultatelor; Vizite de cercetare

Unele activități de cercetare, dar și diseminarea rezultatelor (în scopul sporirii vizibilității cercetării) s-au realizat prin vizite de cercetare și participări la seminarii de cercetare organizate de cercetatori din universitățile Charles Praga (J. Trlifaj, J. Zemlicka), Universitatea din Paderborn (H. Krause), Università degli Studi di Napoli (F. de Giovanni).

Rezultatele obținute au fost prezentate în comunicările *Modules determined by their annihilator classes* (invited talk; S. Breaz) și *Brown representability via projective classes* (G.C. Modoi) la Some trends in Algebra '09, Universitatea Charles, Praga și *Commutativity conditions using subgroup lattices* (invited section talk; S. Breaz) la ICTAMI'09.

De asemenea, în cadrul simpozionului "Algebra Symposium" organizat de catedra de Algebră din Universitatea Babeș-Bolyai, au fost susținute următoarele comunicări în care s-au prezentat rezultate obținute în cadrul grantului: *Modules determined by their annihilator classes* (S. Breaz), *Natural equivalences and dualities* (F. Pop) și *Subgroup lattices of Abelian Groups* (C. Conțiu).

De asemenea, rezultatele obținute au fost prezentate în cadrul catedrei de Algebră și au fost discutate în cadrul seminariilor de cercetare și/sau prezentare desfășurate în cadrul grantului.

III. Contribuții la îmbunătățirea infrastructurii

Pe parcursul anului 2008 s-a completat și s-a îmbunătățit baza materială a catedrei de Algebră prin achiziționarea de obiecte de inventar și consumabile.

Cluj-Napoca
14.09.2009

Conf. Dr. Simion Breaz