

## Sinteza lucrărilor

efectuate în cadrul grantului PN2CD-ID-489 (contract 302/01.10.2007)

### Clase de torsiune și de cotorsiune

Activitățile din cadrul grantului s-au desfășurat conform planului stabilit în proiectul inițial. Ele s-au concretizat până acum în 8 lucrări științifice trimise spre publicare. De asemenea s-au stabilit bazele pentru alte 4 proiecte de lucrări științifice ce vor fi elaborate în perioada următoare. S-au efectuat vizite de cercetare la Universitatea Charles din Praga, Universitatea Berkeley SUA, Universitatea din Montreal, Universitatea din Paderborn și la Institutul Renyi din Budapesta (de Matematică) al Academiei Ungare. S-a îmbunătățit baza de cercetare, achiziționându-se tehnică de calcul și materiale pentru bibliotecă.

### Ia. Lucrări științifice finalizate

Descriem în cele ce urmează conținutul lucrărilor științifice elaborate care au fost finalizate și trimise spre publicare sau care vor fi trimise până la sfârșitul anului 2008.

1. **S. Breaz**, *Finitistic  $n$ -quasi-tilting modules*, acceptată de Communications in Algebra.

În această lucrare studiem un tip de module  $Q$  ce pot fi caracterizate prin existența unei dualități induse de functori covarianți  $\text{Hom}(-, Q)$ , numite module finitistic  $n$ -self-cotilting. Un astfel de modul  $Q$  poate fi caracterizat folosind condiții ce sunt duale celor ce apar în caracterizări ale modulelor star: orice modul  $M$  care are o rezoluție la dreapta cu  $n$  termeni izomorfi cu puteri finite ale lui  $Q$  (i.e.  $M$  este  $n$ -finit  $Q$ -coprezentat) are și o rezoluție cu  $(n + 1)$  termeni izomorfi cu puteri finite ale lui  $Q$  și functorul  $\text{Hom}_R(-, Q)$  pastrează exactitatea tuturor monomorfismelor cu codomeniul o putere finită a lui  $Q$  ale căror conuclee sunt  $n$ -finit  $Q$ -coprezentate. S-a arătat că în general nu există legături între aceste module și alte module care pot fi caracterizate prin existența unor dualități (modulele  $w$ - $\Pi_f$ -quasi-injective, modulele costar modules, sau cele  $f$ -cotilting).

S-au studiat de asemenea și proprietăți de închidere ale claselor implicate în dualitățile studiate. În finalul lucrării sunt prezentate legături cu teoria cotilting în cazul algebrelor finit dimensionale peste corpuri comutative.

2. U. Albrecht, **S. Breaz**, W. Wickless, *Self-small abelian groups*, Bulletin of the Australian Mathematical Society.

Lucrarea are două obiective: găsirea de noi caracterizări pentru grupurile auto-mici de rang finit și determinarea de invarianți care pot fi atașați acestor grupuri. Clasa grupurilor auto-mici conține două tipuri importante de grupuri: grupurile fără torsiune de rang finit și grupurile cu câaturi divizibile. Grupurile cu câaturi divizibile au fost caracterizate de Fomin și Wickless în 1998 ca fiind acele grupuri ce pot fi scufundate în produse de module  $p$ -adice finit generate care îndeplinesc o condiție de proiecție. Folosind această idee, s-a reușit să se demonstreze ca un grup abelian de rang fără torsiune finit este auto-mic dacă și numai dacă el este extinderea unui grup fără torsiune  $S$ -divizibil ( $S \subseteq \mathbb{P}$  e fixată) printr-un grup care poate fi scufundat într-un produs de module  $p$ -adice finit generate,  $p \in S$ , care îndeplinește aceeași condiție de proiecție ca cea descoperită de Fomin și Wickless.

Pentru al doilea obiectiv, s-a plecat de la observația că grupurile fără torsiune de rang 1 și cele cu câaturi divizibile de rang fără torsiune pot fi caracterizate prin invarianți. Întrebarea naturală ce apare este dacă pot fi caracterizate cu invarianți și grupurile auto-mici de rang fără torsiune 1 cu ajutorul unor invarianți. Răspunsul este pozitiv și este prezentat în cele ce urmează.

Fie  $T = \bigoplus_{p \in S} Z(p^{k_p})_{a_p}$ , unde  $S$  o mulțime infinită de numere prime,  $0 < k_p < \infty$  pentru orice  $p$ , și  $a_p$  generatori pentru grupurile ciclice corespunzătoare. Definim  $\tau = \text{type}T$ , tipul furnizat de caracteristica  $(\chi_p)$ , unde  $\chi_p = k_p$  dacă  $p \in S$  și  $\chi_p = 0$  dacă  $p \notin S$ .

Dacă  $T$  este un astfel de grup, considerăm  $T \leq \widehat{T} = \prod_{p \in S} Z(p^{k_p})_{a_p}$  și  $a = (a_p) \in \widehat{T}$ . Fie  $X$  un grup cu  $Z_{-S} \leq X \leq Q$ , unde  $Z_{-S}$  este subinelul lui  $Q$ , generat de  $Z$  și  $\{1/p : p \in S\}$ . Definim  $A(T, X)$  ca fiind imaginea inversa a subgrupului  $X(a + T) \leq \widehat{T}/T$  fața de surjecția canonică  $\widehat{T} \rightarrow \widehat{T}/T$ .

**Teorema 1.** *Fie  $A$  un grup auto-mic de rang fără torsiune 1. Atunci  $A$  este izomorf în categoria Walk cu un grup  $A'$ , unde  $A'$  fără torsiune sau  $A' \cong A(T, X)$  pentru anumite grupuri  $T$  și  $X$ .*

Fie  $\mathcal{S}_1$  mulțimea claselor de grupuri auto-mici de rang fără torsiune 1 modulo Walk-izomorfisme și  $\mathcal{T}$  mulțimea perechilor  $(\tau, \sigma)$ , unde  $\tau$  este un tip pentru care toate componentele caracteristicilor ce îl reprezintă sunt finite și  $\sigma$  este un tip  $p$ -divizibil pentru aproape toate numerele prime  $p$  pentru care o caracteristică (oarecare, dar fixată) a lui  $\tau$  este infinită.

Dacă  $[A] \in \mathcal{S}_1$ , punem  $\tau_A = \text{type}T(A)$  și  $\sigma_A = \text{type}[A/T(A)]$ .

**Corolarul 2.** *Aplicația  $[A] \rightarrow (\tau_A, \sigma_A)$  este o bijecție între mulțimea  $\mathcal{S}_1$  și mulțimea  $\mathcal{T}$ .*

**3. S. Breaz, Commutativity conditions using normal subgroup lattices,** trimisă la Archiv der Mathematik.

Este bine cunoscut faptul că în general nu putem spune dacă un grup este abelian folosind laticia subgrupurilor sale normale. În această lucrare demonstrăm ca acest fapt este totuși posibil în anumite situații: Un grup

$G$  este abelian dacă (i) el este nilpotent și laticia subgrupurilor sale normale este izomorfă cu laticia subgrupurilor unui grup abelian sau (ii) există un grup abelian  $B$ , care nu este de torsiune, astfel încât laticia subgrupurilor normale ale lui  $B \times G$  este izomorfă cu laticia subgrupurilor unui grup abelian. S-a mai arătat că (i) nu este valabilă pentru grupuri solubile. Folosind (ii), s-a demonstrat că un grup abelian  $A$  poate fi determinat (până la un izomorfism) în clasa tuturor grupurilor de laticia subgrupurilor normale ale unui grup. Mai precis, dacă  $A$  este un grup abelian și  $G$  este un grup astfel încât  $\mathbb{Z} \times A$  și  $\mathbb{Z} \times G$  au laticile subgrupurilor normale izomorfe, atunci  $A$  și  $G$  sunt izomorfe.

4. **S. Breaz**, *Warfield dualities induced by self-small mixed groups*, trimisă la Journal of Group Theory.

Această lucrare este parte a studiului descris în obiectivele “Obiecte mici în subcategorii” și “Echivalențe și dualități între subcategorii”. Sunt studiate dualități de tip Warfield, induse de functorii contravariați adjuncți

$$W(-) = \text{Hom}(-, A) : Ab \rightarrow Ab : \text{Hom}(-, A) = W(-)$$

împreună cu transformările naturale  $\nu : 1_{Ab} \rightarrow W^2$  pentru cazul când  $A$  este un grup auto-mic de rang fără torsiune 1. Un grup  $C$  este  $A$ - $W$ -reflexiv dacă  $\nu_C$  (respectiv  $\delta_C$ ) este un izomorfism. Rezultatele principale ale lucrării sunt următoarele

**Teorema 3.** *Fie  $A$  un grup auto-mic de rang fără torsiune 1. Un grup de torsiune și finit- $A$ -cogenerat  $T$  este  $A$ - $W$ -reflexiv dacă și numai dacă  $T_p = 0$  pentru toate numerele prime  $p$  cu  $T_p(A)$  grup non-ciclic.*

**Teorema 4.** *Fie  $A$  un grup auto-mic de rang fără torsiune 1 și  $U$  mulțimea minimală de numere prime astfel încât  $A(U)$  are forma standard. Dacă  $C$  este un grup finit- $A$ -cogenerat care nu este grup de torsiune, următoarele afirmații sunt echivalente:*

- a)  $C$  este  $A$ - $W$ -reflexiv;
- b) i)  $S(A) \subseteq D(A)$   
ii)  $T_p(C) = 0$  for all  $p \in U$ , and  
iii)  $C$  este  $A(U)$ - $W$ -reflexiv.

**Teorema 5.** *Fie  $A$  un grup standard, auto-mic de rang fără torsiune 1. Dacă  $C$  este un grup auto-mic de rang fără torsiune  $n > 0$ , atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

- a)  $C$  este  $A$ - $W$ -reflexiv;
- b) i)  $T_p(C) = T_p(A)^n$  pentru aproape toate numerele prime  $p \in S(A)$ ;  
ii) Dacă  $T_p(A) \cong \mathbb{Z}(p^{k_p})$ , atunci  $p^{k_p}T_p(C) = 0$ ;  
iii)  $\bar{C}$  este  $\bar{A}$ - $W$ -reflexiv.

**Teorema 6.** *Fie  $A$  un grup auto-mic de rang fără torsiune 1. Dacă  $T$  este un grup de torsiune, finit- $A$ -cogenerat, atunci  $T$  este  $A$ - $\Delta$ -reflexiv.*

Studiul conține de asemenea rezultate legate de structura grupurilor  $A$ -cogenerate, unde  $A$  este un grup auto-mic de rang fără torsiune finit.

5. **S. Breaz, C. Modoi**, *A reformulation of Brown Representability Theorem*, acceptată de *Mathematica (Cluj)*

Se cunoaște că dacă o categorie triangulată cu coproduse mici verifică Teorema de Reprezentabilitate a lui Brown, atunci functorii cu domeniul în această categorie care păstrează coprodusele triangulate au adjuncți la dreapta. We wonder about the converse. În lucrarea de față prezentăm o interpretare a Teoremei de Reprezentabilitate a lui Brown care sugerează enunțul de mai sus.

6. **G. C. Modoi**, *Localizations and colocalizations induced by a pair of adjoint functors*, trimisa la *Glasgow Math. Journal*

Lucrarea pleacă de la o pereche de functori adjuncți între două categorii arbitrare, și stabilește condiții necesare și suficiente ca acești functori să inducă echivalente mutual inverse între două subcategorii ale celor inițiale.

Sunt discutate și diferite aplicații ale rezultatelor formale. Prima, este dedusă existența aproximărilor celulare în categorii satisfacând condiții rezonabile. A doua, sunt generalizate în context non-aditiv așa numitele star-obiecte. Cea de-a treia aplicație se referă la generalizarea teoriei Morita pentru categorii derivate a categoriilor de module peste inele asociative oarecare.

7. **G. C. Modoi**, *On generating projective classes in triangulated categories*, trimisa la *Comm. Algebra*

În lucrare este exploatată interconexiunea dintre o categorie triangulată  $T$  cu coproduse oarecare și așa numita ei abelianizare, mai precis categoria functorilor contravarianti finit prezentați de la  $T$  la grupuri abeliene. Unei clase proiective în  $T$  îi corespunde o subcategorie reflectivă (i.e. al cărei functor incluziune are un adjuncț la dreapta) a acestei categorii de functori. Dacă clasa proiectivă generează categoria  $T$ , se arată că orice obiect este colimita homotopică a unui șir de obiecte având dimensiunea proiectivă (relativă la clasa proiectivă dată) finită. Deoarece colimita homotopică presupune considerarea unor coproduse numărabile, este explicat astfel la nivel conceptual, de ce închiderea la astfel de coproduse joacă un rol esențial în demonstrația mai multor rezultate remarcabile, de exemplu teorema de reprezentabilitate a lui Brown. De notat ar fi și că, pe parcursul expunerii rezultatelor, sunt corectate două erori aparținând unor autori importanți și care apar în articole deja publicate în jurnale cu impact puternic.

8. **S. Breaz, C. Pelea, I. Purdea**, *Products of hypergroupoids associated to binary relations*, trimisă la *Carpathian Mathematical Journal*.

În lucrarea de față este studiată închiderea la produse a unor clase de multialgebre binare care provin din anumite sisteme relationale. Este demonstrat că un produs direct de multialgebre binare care provin din relații binare

provine la rândul său dintr-o relație binară dacă și numai dacă una din multialgebre este constantă. Totuși categoria multialgebrelor binare care provin din relații binare are produse. De asemenea este studiat produsul (în această categorie) a multialgebrelor asociative.

### **Ib. Lucrări științifice aflate în stadiu avansat de elaborare**

Proiectele descrise în continuare se afla în diverse stadii de elaborare. Estimăm ca ele vor fi finalizate pe parcursul anului 2009.

9. U. Albrecht, **S. Breaz**, *Quasi-isomorphisms and groups of quasi-homomorphisms*.

În această lucrare cercetăm ce proprietăți ale grupurilor auto-mici de rang fără torsiune finit  $G$  pot fi determinate de clasa grupurilor de morfisme  $\text{Hom}(G, C)$ , unde  $C$  parcurge o clasă de grupuri abeliene dată,  $\mathcal{C}$ . Se demonstrează că  $G$  este determinat până la un quasi-izomorfism dacă  $\mathcal{C}$  este clasa tuturor grupurilor auto-mici  $C$  cu  $r_0(C) \leq r_0(G)$ . Se arată și că în general  $G$  nu este determinat până la un izomorfism. Sunt demonstrate și alte rezultate legate de acest subiect folosindu-se și clase de anihilatori.

10. U. Albrecht, **S. Breaz**, *A Note on Mixed  $A$ -reflexive groups*.

Continuăm studiul inițiat în lucrarea [3] din această sinteză pentru cazul general al grupurilor mixte de rang fără torsiune 1. Am arătat că există situații când studiul cazului general poate fi redus la cazul grupurilor auto-mici.

11. **S. Breaz**, *Modules determined by their annihilator classes*

Obiectivul acestei lucrări este de a clasifica modulele de lungime finită care sunt caracterizate de lungimea lor și de teoria de torsiune cogenerată de ele. Este considerată și problema modulelor determinate de lungimea lor și de teoriile de cotorsiune generate de aceste module.

12. **S. Breaz**, **F. Pop**, *Dualities induced by adjoint contravariant functors*

Se vor generaliza rezultatele obținute în lucrarea [1], folosind de data aceasta functori contravarianți adjuncți între categorii aditive cât mai generale, cu scopul de a transmite rezultatele către categorii de module graduate sau de comodule.

### **II. Vizite de cercetare**

Diseminarea rezultatelor, efectuate în scopul sporirii vizibilității cercetării, s-a realizat vizite de cercetare la cercetători din universitățile Karlin Praga (J. Zemlicka), Universitatea din Montreal (K. Benabdallah), Universitatea din Paderborn (H. Krause), Institutul Renyi a Academiei Ungare (L. Marki) și la workshop-urile organizate de Universitatea din Berkeley, respectiv cea din Wuppertal.

Simion Breaz a susținut comunicarea de o oră cu titlul *Commutativity conditions using normal subgroup lattices* la seminarul de algebra organizat

la Institutul Renyi, prezentând rezultatele obținute în [3]. De asemenea a discutat cu prof. dr. Laszlo Marki despre teme de cercetare în domeniul categoriilor semi-abeliene.

Lect. Dr. George Ciprian Miodi a efectuat un stagiul de cercetare la Universitatea din Paderborn, Germania, unde a stabilit contacte științifice cu cercetătorii de acolo, ideosebi cu Prof. Henning Krause, un reputat specialist în algebra omologica și teoria reprezentărilor algebrelor artiniene, cu preocupări strans legate de unele dintre temele pe care le-am propus spre cercetare în acest grant, anume clase de torsiune și cotorsiune, categorii triangulate, conjectura telescop. În timpul acestui stagiul, Lect. Dr. George Ciprian Miodi a prezentat rezultatele obținute până acum în cadrul unui seminar de cercetare intitulat: *A reformulation of Brown representability theorem and some consequences*.

De asemenea, rezultatele obținute au fost prezentate în cadrul catedrei de Algebră și au fost discutate în cadrul seminariilor de cercetare și/sau prezentare desfășurate în cadrul grantului.

### **III. Contribuții la îmbunătățirea infrastructurii**

Pe parcursul anului 2008 s-a completat și s-a îmbunătățit baza materială a catedrei de Algebră prin achiziționarea de obiecte de inventar și consumabile.

Cluj-Napoca  
24.10.2008

Conf. Dr. Simion Breaz