

Raport științific final

privind implementarea proiectului
PN-III-P4-ID-PCE-2020-0454 (contract 75/2021)

Contribuții la teoria silting

(A) Obiective prevăzute

Obiectivele acestui proiect s-au axat pe două direcții generale:

- (I) Contribuții la teoria silting,
- (II) Clase și obiecte speciale (în diverse contexte/categorii).

Acestor obiective generale li s-au asociat direcții de cercetare concrete, a căror teme de cercetare sunt următoarele:

- (I)(A) Structuri asociate categoriilor Grothendieck care au legături cu complexe (co)silting:
 - clase (co)generate de obiecte (co)silting;
 - structuri asociate categoriilor Grothendieck care au legături cu complexe (co)silting;
 - aplicații ale rezultatelor generale; cazul algebrelor grupale.
- (I)(B) Transferul proprietăților cosilting cu ajutorul functorilor:
 - proprietăți de tipul ascend-descend pentru complexe cotilting și cosilting;
 - transferul proprietăților (co)silting cu ajutorul functorilor.
- (II)(A) Clase definibile și obiecte pur-injective în categorii triangulate:
 - Contribuții la teorii de aproximare. Clase definibile și obiecte pur-injective;
 - Inele și aplicații. Proprietăți de scindare.
- (II)(B) Obiecte pur-injective în categorii triangulate și categorii Grothendieck:
 - obiecte pur-injective și produse directe;
 - aproximări și identități în diverse categorii.

Activitățile desfășurate pentru realizarea acestor obiective sunt în concordanță cu cele prevăzute în propunerea de proiect. În principal, ele au fost de următoarele tipuri: seminarii de informare și/sau cercetare, activități de cercetare independente, vizite de cercetare, participări la manifestări științifice etc.

(B) Rezultatele obținute

Principalele rezultate obținute sunt incluse în lucrări științifice aflate în diverse stadii de elaborare sau evaluare. Prezentăm în continuare o descriere a acestora, menționând și lucrarea în care sunt incluse.

Lucrări științifice finalizate și trimise spre publicare:

1. Simion Breaz: *A characterization of (co)silting objects*,
<https://arxiv.org/abs/2303.06843>

În această lucrare abordăm o temă care se încadrează în direcțiile (IA), (IB) și (IIB). Demonstrăm că o caracterizare a obiectelor silting în categorii triangulate care sunt bine generate este, de fapt, valabilă pentru cazul general al categoriilor triangulate cu sume directe. Demonstrația folosită poate fi dualizată, obținând astfel o caracterizare duală a obiectelor cosilting în categorii triangulate cu produse: un obiect U dintr-o categorie triangulată cu produse este cosilting dacă și numai dacă

- (C1) $U \in {}^{\perp > 0}U$,
- (C2) ${}^{\perp > 0}U$ este închisă la produse directe,
- (C3) ${}^{\perp z}U = 0$,

unde ${}^{\perp > 0}U = \{X \mid \text{Hom}(X, U[i]) = 0 \text{ pentru toate numerele întregi } i > 0\}$, iar ${}^{\perp z}U = \{X \mid \text{Hom}(X, U[i]) = 0 \text{ pentru toate numerele întregi } i\}$. O astfel de caracterizare era cunoscută doar în ipoteza suplimentară că obiectul considerat este pur-injectiv. Aceste rezultate sunt aplicate pentru cazul obiectelor (co)silting (co)intermediare, adică atunci când cu ajutorul t-structurilor induse reușim să replicăm cazul obiectelor (co)silting date de complexe mărginite de module proiective (respectiv, injective).

2. Simion Breaz, George Ciprian Modoi: *Derived equivalences induced by good silting complexes*, va apărea în *Functor Categories, Model Theory, Algebraic Analysis and Constructive Methods*, editor Alexander Martsinkovsky, book series Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.

Subiectul lucrării este în legătură cu temele (IA) și (IB) și se referă la echivalențe induse de complexe silting în categorii derivate asociate categoriilor de dg-module peste dg-algebre. În prima parte sunt considerate echivalențe induse de dg-module care sunt compacte. Este demonstrat că dacă U este un dg- B - A -bimodul care este compact peste B atunci functorul derivat al functorului covariant Hom indus de U ca A -modul este deplin fidel. Dacă U este compact și ca A -modul, atunci el induce o echivalență de categorii derivate. Unele rezultate pot fi extinse și la cazul în care obiectul cu care lucrăm nu este compact: obiecte silting bune

peste dg-algebre coconective. În această situație se obțin echivalențe la nivel de categorii de module asemănătoare cu cele din cazul clasic al modulelor tilting.

3. Andrei Marcus, Virgilius-Aurelian Minuță: *An exact sequence for the graded Picent*, va apărea în Journal of Group Theory.

Această lucrare are în vedere teme asociate obiectivelor (IA) și (IIB). Fie G un grup finit, k un inel comutativ, și A un produs încrucișat dintre k -algebra B și G . Notăm prin $\mathrm{hU}(A)$ grupul unităților omogene ale lui A . Pentru orice $g \in G$, alegem $u_g \in \mathrm{hU}(A) \cap A_g$.

În cele ce urmează vom considera centralizatorul $C_A(B)$ în A al 1-componentei B . Știm că $C_A(B)$ este o G -algebră G -graduată. Fie

$$G[B] := \{g \in G \mid A_g \simeq B \text{ ca și } (B, B)\text{-bimodule}\}$$

grupul de inerție al lui B ca și (B, B) -bimodul. Este bine cunoscut faptul că $G[B]$ este un subgrup normal al lui G , și că

$$\mathcal{C} := C_A(B)_{G[B]} = \bigoplus_{h \in G[B]} C_A(B)_h$$

este o subalgebră tare $G[B]$ -graduată și G -acționată a lui $C_A(B)$. Notăm $H := G[B]$, $\mathcal{Z} := \mathcal{C}_1 = Z(B)$ și $Z = U(\mathcal{Z})$.

Notăm prin $\mathrm{Pic}_k(B)$ grupul Picard al lui B relativ la k . Reamintim că $\mathrm{Picent}(B)$ este mulțimea claselor de izomorfism $[P]$ de (B, B) -bimodule inversabile P care satisfac $zp = pz$ pentru orice $p \in P$ și $z \in \mathcal{Z}$ (vom spune că P este un bimodul peste \mathcal{Z}). Atunci $\mathrm{Picent}(B)$ este un subgrup al lui $\mathrm{Pic}_k(B)$.

Definim grupurile $\mathrm{Pic}_k^{\mathrm{gr}}(A)$ și $\mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A)$ într-o manieră similară. Fie $\mathrm{Pic}_k^{\mathrm{gr}}(A)$ grupul claselor de izomorfism $[\tilde{P}]$ de (A, A) -bimodule inversabile G -graduate \tilde{P} peste k ; și fie $\mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A)$ subgrupul lui $\mathrm{Pic}_k^{\mathrm{gr}}(A)$, care conține clasele de izomorfism $[\tilde{P}]$ de (A, A) -bimodule G -graduate \tilde{P} care verifică următoarele condiții:

- (1) $\tilde{P} \otimes_A \tilde{P}^* \simeq A$ și $\tilde{P}^* \otimes_A \tilde{P} \simeq A$ ca și (A, A) -bimodule G -graduate, unde \tilde{P}^* este A -dualul lui \tilde{P} .
- (2) $\tilde{p}_g c = {}^g c \tilde{p}_g$ pentru orice $g \in G$, $c \in \mathcal{C}$, $\tilde{p}_g \in \tilde{P}_g$.

Astfel de bimodule sunt numite (A, A) -bimodule G -graduate peste \mathcal{C} și ele formează o categorie pe care o notăm cu $A\text{-Gr}/\mathcal{C}\text{-}A$.

Notăm $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{gr}}(A) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}_k(A) \mid \alpha(A_g) = A_g \text{ pentru orice } g \in G, \alpha(c) = c \text{ pentru orice } c \in \mathcal{C}\}$. Fie \tilde{P} un (A, A) -bimodul G -graduat peste \mathcal{C} . Pentru $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{gr}}(A)$, definim un nou (A, A) -bimodul G -graduat ${}_{\alpha}\tilde{P}_{\beta}$ peste \mathcal{C} , unde ${}_{\alpha}\tilde{P}_{\beta} = \tilde{P}$ ca și k -module, iar operația de înmuțire este dată de

$$a \cdot \tilde{p} \cdot a' = \alpha(a) \tilde{p} \beta(a').$$

Pentru $u \in U(A)$, notăm $\iota_u : A \rightarrow A$, $\iota_u(a) = uau^{-1}$. Considerăm $\text{Inn}_1(A) = \{\iota_u \mid u \in U(A)\}$. Folosind aceste notații se demonstrează că:

1) Există un șir exact de grupuri

$$1 \longrightarrow \text{Inn}_1(A) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}^{\text{gr}}(A) \xrightarrow{\varphi} \text{Picent}^{\text{gr}}(A),$$

unde $\varphi(\alpha) = [{}_1A_\alpha]$.

2) Dacă $[\tilde{P}], [\tilde{Q}] \in \text{Picent}^{\text{gr}}(A)$, atunci $\tilde{P} \simeq \tilde{Q}$ ca și (A, \mathcal{C}) -bimodule G -graduate peste \mathcal{C} dacă și numai dacă există $\alpha \in \text{Aut}_{\mathcal{C}}^{\text{gr}}(A)$ astfel încât $\tilde{Q} \simeq {}_1\tilde{P}_\alpha$ ca și (A, A) -bimodule G -graduate peste \mathcal{C} . În particular,

$$\text{Im } \varphi = \{[\tilde{P}] \in \text{Picent}^{\text{gr}}(A) \mid \tilde{P} \simeq A \text{ ca } (A, \mathcal{C})\text{-bimodule } G\text{-graduate peste } \mathcal{C}\}.$$

Introducem grupul $\text{Pic}_{\mathcal{C}}(B)$ al claselor de izomorfism de (B, B) -bimodule inversabile P care satisfac $cp = pc$, pentru orice $c \in \mathcal{C}$ și $p \in P$. Notăm prin $\text{Aut}_{kG}^{\text{gr}}(\mathcal{C})$ mulțimea tuturor automorfismelor k -lineare ale lui \mathcal{C} care păstrează graduările și sunt totodată și morfisme de G -algebre.

În rezultatele principale ale lucrării prezentăm o versiune Picent al șirului exact al lui Beattie-del Río:

$$1 \longrightarrow \text{H}^1(G/H, Z) \xrightarrow{\Phi} \text{Picent}^{\text{gr}}(A) \xrightarrow{\Psi} \text{Picent}(B)^{G/H} \xrightarrow{\Theta} \text{H}^2(G/H, Z).$$

cu ajutorul căruia construim o diagramă comutativă, cu rânduri și coloane exacte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \text{H}^1(G/H, Z) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Picent}^{\text{gr}}(A) & \xrightarrow{\Psi} & \text{Picent}(B)^{G/H} \xrightarrow{\Theta} \text{H}^2(G/H, Z) \\
 & & \downarrow \text{Inf} & & \downarrow \subseteq & & \downarrow \subseteq \\
 1 & \longrightarrow & \text{H}^1(G, Z) & \xrightarrow{\Phi_k} & \text{Pic}_k^{\text{gr}}(A) & \xrightarrow{\Psi_k} & \text{Pic}_k(B)^G \xrightarrow{\Theta_k} \text{H}^2(G, Z) \\
 & & \downarrow \text{Res} & & \downarrow \tilde{\sigma} & & \downarrow \sigma \\
 1 & \longrightarrow & \text{H}^1(H, Z)^{G/H} & \xrightarrow{\phi} & \text{Aut}_{kG}^{\text{gr}}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\psi} & \text{Aut}_k(\mathcal{Z})^G.
 \end{array}$$

Tg

Mai mult, există un morfism de grupuri $\theta : H^1(H, Z)^{G/H} \rightarrow \text{Pic}_{\mathbb{Z}}^{\text{gr}}(A_H)^{G/H}$, care face următoarea diagramă comutativă.

$$\begin{array}{ccc} & & H^1(H, Z)^{G/H} \\ & \swarrow \theta & \downarrow \text{Tg} \\ \text{Pic}_{\mathbb{Z}}^{\text{gr}}(A_H)^{G/H} & \xrightarrow{\Theta} & H^2(G/H, Z). \end{array}$$

În final, demonstrăm că există izomorfisme bune în situații de tip fluture: Fie \hat{G} un alt grup finit și fie \hat{A} un produs încrucișat \hat{G} -graduat cu 1-componenta B . Presupunem că funcțiile $\varepsilon : \text{hU}(A) \rightarrow \text{Aut}_k(B)$ și $\hat{\varepsilon} : \text{hU}(\hat{A}) \rightarrow \text{Aut}_k(B)$, induse de conjugare, satisfac relația $\text{Im } \varepsilon = \text{Im } \hat{\varepsilon}$. Notăm $\hat{H} = \hat{G}[\hat{B}]$. Atunci $G/H \simeq \hat{G}/\hat{H}$, și, în plus, avem un izomorfism $\alpha : \text{Picent}^{\text{gr}}(A) \rightarrow \text{Picent}^{\text{gr}}(\hat{A})$, care face următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H^1(G/H, Z) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Picent}^{\text{gr}}(A) & \xrightarrow{\Psi} & \text{Picent}(B)^{G/H} & \xrightarrow{\Theta} & H^2(G/H, Z) \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \downarrow \simeq \\ 1 & \longrightarrow & H^1(\hat{G}/\hat{H}, Z) & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & \text{Picent}^{\text{gr}}(\hat{A}) & \xrightarrow{\hat{\Psi}} & \text{Picent}(B)^{\hat{G}/\hat{H}} & \xrightarrow{\hat{\Theta}} & H^2(\hat{G}/\hat{H}, Z). \end{array}$$

4. I. Simion, D. Testerman: *On minimal epimorphic subgroups in simple algebraic groups of rank 2*, acceptat de Journal of Pure and Applied Algebra, <https://arxiv.org/abs/2303.17440>

În cadrul activităților asociate obiectivelor (IA) și (IIA), am considerat și epimorfismele din diverse categorii algebrice. De exemplu, categoria grupurilor algebrice liniare admite epimorfisme nesurjective. Fie $\phi : H \rightarrow G$ un omomorfism de grupuri algebrice liniare definite peste un corp algebric închis. Morfismul ϕ este un epimorfism dacă admite simplificare la dreapta, i.e. dacă $\psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi$ implică $\psi_1 = \psi_2$ pentru oricare două omomorfisme ψ_1, ψ_2 . Un subgrup $H \subseteq G$ se numește *subgrup epimorfic* dacă incluziunea în G este un epimorfism. Dacă ϕ este un epimorfism nesurjectiv atunci $\phi(H)$ este un subgrup epimorfic propriu a lui G .

Studiul subgrupurilor epimorfice ale grupurilor algebrice liniare a fost inițiat de Bien și Borel în [C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 315, No. 6, 649-653 (1992), Zbl 0767.20017, MR1183796; C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 315, No. 13, 1341-1346 (1992), Zbl 0780.20028, MR1198999] unde au stabilit rezultate de caracterizare a acestor subgrupurilor. Rezultatele lor sunt o continuare a rezultatelor lui Bergman din manuscrisul nepublicat ‘Epimorphisms of Lie algebras’, care tratează epimorfisme nesurjective pentru algebre de tip Lie, și extind lista categoriilor pentru care Reid a analizat diferența dintre epimorfisme și surjectivitate [Invent. Math. 9, 295-307 (1970), Zbl 0191.13503, MR0260829]. Reiese din rezultatele obținute de Bien și Borel că subgrupurile epimorfice minimale sunt solubile și că cele maximale proprii sunt subgrupuri parabolice. În prezent, o clasificare a tuturor subgrupurilor epimorfice nu pare fezabilă.

Această lucrare studiază grupuri simple de rang 2. Rezultatul principal arată că pentru grupuri algebrice simple de rang 2, definite peste corpuri algebric închise de caracteristică $p > 0$, dimensiunea minimă a subgrupurilor epimorfice închise este 3.

5. Simion Breaz, Tomasz Brzezinski, Bernard Rybolowicz, Paolo Saracco: *Heaps of modules: Categorical aspects*,
<https://arxiv.org/abs/2311.01979>

Tema de cercetare abordată se încadrează în direcțiile (IA) și (IB) și continuă cercetările inițiate în lucrarea [8] din această listă.

Subiectul principal este studiul categoriei heap-urilor de module peste un truss și investigarea unor construcții categoriale. Acest studiu se bazează adeseori pe interpretări ale categoriilor de heap-uri cu ajutorul unor categorii de module punctate, respectiv a categoriilor de module afine peste inelele asociate truss-urilor inițiale.

De exemplu, este demonstrat că există un izomorfism între categoria heap-urilor de module peste un truss fixat T și categoria modulelor afine peste inelul $R(T)$, asociat printr-o proprietate de universalitate lui T . Acest izomorfism permite descrierea unor construcții categoriale în categoria heap-urilor. Menționăm că în cazul limitelor, acestea coincid cu cele calculate în categoria T -modulelor punctate, dar pentru colimite este necesară o analiză mai detaliată. De exemplu, pentru calculul coproduselor este necesar să adăugăm copii ale extinderilor Dorroh ale inelului $R(T)$.

Studiem, de asemenea, două variante de a considera șiruri exacte în categoria heap-urilor: șiruri exacte care provin din structura de categorie abeliană a categoriei modulelor punctate peste T , respectiv șiruri exacte în sensul lui Barr. O caracterizare a șirurilor Barr-exacte folosind șirurile care provin din structura exactă a categoriei modulelor punctate peste T este prezentată în ultima parte a lucrării.

6. Simion Breaz, Michal Hrbek, George Ciprian Modoi: *Silting, cosilting, and extensions of commutative rings*,
<https://arxiv.org/abs/2204.01374>

Această lucrare înglobează activități de cercetare legate de toate cele trei teme menționate anterior: (I)(A), (I)(B) și (II)(B). Are ca obiectiv principal studiul comportamentului complexelor silting mărginite atunci când se aplică functori induși de morfisme de inele (covarianți de extindere a scalarilor/ inducție, respectiv contravarianți de extindere a scalarilor/ coinducție), în special în cazul în care inelele sunt comutative.

Mai precis, considerăm un morfism $\lambda : R \rightarrow S$ de inele (comutative) rings, și transferurile determinate de functorii derivați induși între categoriile derivate $\mathbf{D}(R)$ or $\mathbf{D}(S)$: $-\otimes_R^{\mathbf{L}} S : \mathbf{D}(R) \rightarrow$

$\mathbf{D}(S)$ și $\mathbf{RHom}_R(S, -) : \mathbf{D}(R) \rightarrow \mathbf{D}(S)$. De asemenea, consideră și transferul topologic al complexelor cosilting de tip cofinit care poate fi realizat folosind aplicația $\lambda^* : \text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(R)$ indusă de λ între spectrele Zariski ale celor două inele.

Demonstrăm ca proprietatea silting este păstrată de functorul $-\otimes_R^{\mathbf{L}} S$ și că $\mathbf{RHom}_R(S, -)$ păstrează proprietatea obiectelor de a fi pur-injective și cosilting. Mai mult, acești functori păstrează tipurile (co)finite ale obiectelor (co)silting considerate. În cazul obiectelor (co)silting de tip (co)finite putem aplica și transferul topologic menționat anterior pentru că λ^* este continuă relativ la topologiile Hochster. Demonstrăm că aceste tranferuri coincid (până la o echivalență) cu transferrile realizate folosind functorii derivați. Dacă λ este fidel plat, atunci λ^* este și închisă, iar aceasta ne permite să identificăm complexe (co)silting de tip (co)finite din $\mathbf{D}(S)$ care pot fi obținute, până la o echivalență, folosind functorii derivați.

Pe de altă parte, ca în cazul modulelor n -tilting, nu este clar dacă functorii derivați de extindere a scalarilor induși de morfisme fidel plate reflectă proprietățile de silting sau cosilting pentru complexe mărginite de lungime cel puțin 3. În ultima parte a lucrării demonstrăm că fenomenul descris anterior este întâlnit în majoritatea cazurilor interesante: este valabil pentru complexe cosilting care sunt duale ale unor complexe de proiective, iar pentru silting este valabil pentru morfisme care dau localizări Zariski și pentru toate morfismele care au ca domenii inele noeteriene inele cu dimensiunea pur globală finită și, în particular, inele de cardinal \aleph_n , cu n un număr natural strict pozitiv. Ca un corolar, se deduce că și proprietatea n -tilting a modulelor se comportă la fel. Pentru aceasta folosim o lemă care are ca ipoteza faptul că obiectele pur-injective generează categoria derivată. Rămâne ca problemă deschisă întrebarea dacă ipoteza acestei leme este valabilă pentru toate inelele comutative.

De asemenea, folosim și demonstrăm un rezultat care poate avea o valoare independentă: o caracterizare a complexelor silting mărginite în care condiția standard de închidere a clasei $T^{\perp > 0}$ la sume directe este înlocuită de condiția $\text{Add}(T) \subseteq T^{\perp > 0}$. Acest rezultat generalizează o caracterizare similară demonstrată pentru module n -tilting de Positselski și Šťovíček.

7. Simion Breaz, Andrei Marcus, George Ciprian Modoi: *Support τ -tilting modules and semibricks over group graded algebras*, J. Algebra 637 (2024), 90–111.

<https://arxiv.org/abs/2209.02992>

Activitățile de cercetare asociate acestei lucrări sunt în legătură cu temele (I)(A) și (I)(B). Considerăm o k -algebră A de dimensiune finită care este tare G -gradată (peste grupul finit G) și notăm 1-componenta sa cu B (k este un corp comutativ). În această situație functorii de inducție $\text{Ind}_B^A = A \otimes_B -$ și de restricție a scalarilor Res_B^A formează o pereche Frobenius (sunt biadjuncți). În plus, Ind_B^A este separabil. Dacă $\text{char}(k)$ nu divide ordinul lui G , atunci și Res_B^A este separabil. Studiem cum sunt transferate perechile τ -tilting de acești functori. Ne bazăm pe următoare informație importantă: dacă B este self-injective, atunci Ind_B^A comută cu

acoperirile proiective: duc prezentările proiective minimale în proezentări proiective minimale. Acest rezultat extinde ceea ce a demonstrat E. C. Dade pentru Res_B^A .

Folosind aceste rezultate, demonstrăm că dacă M este un B -modul s - τ -tilting, atunci $\text{Ind}_B^A M$ este de asemenea s - τ -tilting dacă și numai dacă M este G -invariant și că un rezultat similar are loc pentru Res_B^A . De asemenea sunt prezentate legături cu alte obiecte/structuri care sunt corelate cu modulele s - τ -tilting (semibrick-uri, clase de torsiune functorial finite). Aceste rezultate generalizează și explică fenomenele prezentate de Koshio and Kozakai pentru reprezentări ale grupurilor finite.

8. Simion Breaz, Tomasz Brzeziński, Bernard Rybolowicz, Paolo Saracco: *Heaps of modules and affine spaces*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923–).
<https://doi.org/10.1007/s10231-023-01369-0> (2023)

Această lucrare înglobează activități de cercetare legate de $(I)(A)$. Scopul ei este de a realiza un studiu detaliat a unor structuri asociate categoriilor de module care permit extinderea unor teoreme de tip Baer-Kaplansky, care identifică obiectele cu ajutorul endomorfismelor lor, de la clase particulare de grupuri abeliene (grupuri de torsiune) la rezultate care sunt valabile pentru toate modulele. Aceste structuri, numite *heaps of modules* admite de asemenea interpretări geometrice, putând fi caracterizate ca spații afine asociate categoriilor de module.

Pentru aceasta, considerăm o extindere a noțiunii de inel, truss, în care operația aditivă este înlocuită cu o operație ternară care verifică axiomele lui Mal'cev de asociativitate și idempotență. Sunt descrise diverse structuri peste aceste generalizări ale inelelor (T -grupuri, T -module, heap-uri de T -module) și legăturile dintre ele. Rezultatul principal descrie o echivalentă în categoria heap-urilor de T -module și categoria spațiilor afine peste T .

În finalul lucrării sunt prezentate exemple de structuri din diverse domenii care pot fi organizate ca heap-uri de module: structuri algebrice asociate soluțiilor ecuațiilor de tip Yang-Baxter, structuri cu caracter geometric (connections) și contrații în categorii de omotopie asociate categoriilor de module (în particular, morfisme de scindare).

9. Simion Breaz, Cristian Rafliu: *Decompositions of matrices by using commutators*, Linear Algebra and its Applications, 662 (2023), 39–48;
<https://arxiv.org/abs/2209.03195>

Această lucrare înglobează activități de cercetare legate de $(I)(A)$. Folosim pentru studii inelelor de endomorfisme al modulelor libere de rang infinit două proprietăți ale acestora: orice element dintr-un astfel de inel este un comutator și faptul că un astfel de inel este izomorf cu oricare dintre inelele de matrici pătratice cu coeficienți în inelul respectiv.

În acest articol studiem descompuneri ale matricilor de tip 3×3 cu coeficienți într-un inel oarecare care au urma un comutator. Demonstrăm că pentru orice trei polinoame scindabile

de grad 3 cu rădăcini în centrul inelului, aceste matrici pot fi scrise ca sume de 3 matrici care sunt anulate de câte un polinom dintre cele alese initial.

Aceste descompuneri sunt apoi folosite pentru obținerea de informații despre inelele de endomorfisme ale modulelor libere de rang infinit, dar și pentru studiul operatorilor marginiți asociați spațiilor Hilbert complexe. Se demonstrează și că inelele simple care sunt obținute prin factorizarea inelelor de endomorfisme ale spațiilor vectoriale infinit dimensionale prin indealele maximale corespunzătoare pot fi descompuse, folosind operațiile ternare asociate adunării (heap-uri), folosind trei truss-uri care induc structurile “brace” definite de Rump pentru construcția de soluții ale ecuațiilor Yang-Baxter pentru mulțimi.

10. Cs. Szántó, I. Szöllösi: *On some Ringel-Hall polynomials associated to tame indecomposable modules*, Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 228 (2024), article number 107555, available online 7 November 2023, 40 pages, <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2023.107555>.

Această lucrare înglobează activități de cercetare legate de toate cele trei teme menționate anterior: (I)(A) și (I)(B). Fie k un corp finit având q elemente și Q o tolă aciclică, blândă (adică de tip $\tilde{A}_m, \tilde{D}_m, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$). Considerăm algebra de drumuri kQ și categoria modulelor drepte, finit dimensionale $\text{Mod-}kQ$. Algebra rațională Ringel-Hall $\mathcal{H}(kQ)$ asociată algebrei kQ are baza rațională formată din clasele de izomorfisme $[M]$ din $\text{Mod-}kQ$ și produsul definit prin $[N_1][N_2] = \sum_{[M]} F_{N_1 N_2}^M [M]$. Constantele de structură $F_{N_1 N_2}^M = |\{U \subseteq M \mid U \cong N_2, M/U \cong N_1\}|$ se numesc numere Ringel-Hall.

Generalizând algebrele Hall clasice, algebrele Ringel-Hall au fost introduse de Ringel pentru familia largă a inelelor finite, incluzând în particular algebrele de drumuri peste corpuri finite. Algebrele Ringel-Hall au permis studiul grupurilor cuantice prin intermediul teoriei reprezentării de algebre finite dimensionale și joacă un rol important în teoria algebrelor cluster. Mai mult, ele sunt esențiale și în descrierea structurii categoriei de module, deci în acest fel pot fi legate și de teoria tilting și silting.

Un rezultat al lui Hubery ne arată că numerele Ringel-Hall sunt de fapt polinoame raționale în q lucrând cu așa numite clase de decompoziție. Dacă ne limităm la polinoamele Ringel-Hall asociate unor module indecompozabile în diferite cazuri blânde, nu avem prea multe informații despre ele. În articolul prezentat mai jos la nr. 12 autorii au determinat toate polinoamele Ringel-Hall asociate modulelor indecompozabile în cazul blând \tilde{D}_4 .

Contribuția principală de aici constă în determinarea tuturor polinoamelor Ringel-Hall blânde, asociate modulelor indecompozabile, cu defectul din mulțimea $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. În comparație cu cazul \tilde{D}_4 , aceasta este o sarcină mult mai grea, necesitând introducerea unor instrumente noi, generice. Este surprinzător că, la fel ca în cazul \tilde{D}_4 , și în cazul general vom avea în esență numai trei familii de polinoame Ringel-Hall (cu un singur membru pentru fiecare grad polinomial).

Prima familie corespunde indecompozabilelor neregulare, iar a doua le descrie pe cele care implică indecompozabile regulate, neomogene. A doua familie este foarte strâns legată de prima, deci aceste două familii sunt în esență aceleași, implicând obiecte indecompozabile de tip discret (preinjective, preprojective și regulate neomogene). A treia familie corespunde cazurilor continue (când unul dintre indecompozabile este regulat omogen).

11. Simion Breaz: *On a theorem of Stelzer for some classes of mixed groups.* Mediterr. J. Math. 19, No. 4, Paper No. 159, 14 p. (2022).

Tematica abordată este asociată direcției (IIB) și se concentrează pe identificarea de clase grupuri abeliene mixte care au proprietatea ca dacă un grup din această clasă are proprietatea de simplificare din sume directe, atunci inelul endomorfismelor acestui grup în categoria Walk are proprietatea de ridicare a unităților modulo multiplii întregi. În felul acesta, se obține o extindere a unei teoreme demonstrate de Stelzer pentru grupuri fără torsiune de rang finit.

Mai mult, pentru situații particulare, putem folosi această extindere ca să caracterizăm proprietatea de simplificare cu ajutorul domeniului stabil al (Walk-)inelului de endomorfisme. De exemplu, în Teorema 4.6, demonstrăm că un grup auto-mic tare indecompozabil și de rang fără torsiune cel mult 4 are proprietatea de simplificare dacă și numai dacă el are forma $B \oplus H$, unde B este un grup finit și H este un grup al cărui inel de endomorfisme în categoria Walk are pe 1 în domeniul său stabil.

12. Cs. Szántó, I. Szöllösi: *Ringel-Hall polynomials associated to a quiver of type \tilde{D}_4 ,* Period Math Hung, published online 19 September 2023, 25 pages, <https://doi.org/10.1007/s10998-023-00549-y>.

Lucrarea este legată de temele (IA) și (IIB). Fie k un corp finit având q elemente și Q o tolă blândă de tip \tilde{D}_4 . Considerăm algebra de drumuri kQ și categoria modulelor drepte, finit dimensionale $\text{Mod-}kQ$. Algebra rațională Ringel-Hall $\mathcal{H}(kQ)$ asociată algebrei kQ are baza rațională formată din clasele de izomorfisme $[M]$ din $\text{Mod-}kQ$ și produsul definit prin $[N_1][N_2] = \sum_{[M]} F_{N_1 N_2}^M [M]$. Constantele de structură $F_{N_1 N_2}^M = |\{U \subseteq M \mid U \cong N_2, M/U \cong N_1\}|$ se numesc numere Ringel-Hall.

Generalizând algebrele Hall clasice, algebrele Ringel-Hall au fost introduse de Ringel pentru familia largă a inelelor finite, incluzând în particular algebrele de drumuri peste corpuri finite. Algebrele Ringel-Hall au permis studiul grupurilor cuantice prin intermediul teoriei reprezentării de algebre finite dimensionale și joacă un rol important în teoria algebrelor cluster. Mai mult, ele sunt esențiale și în descrierea structurii categoriei de module, deci în acest fel pot fi legate și de teoria tilting și silting.

Un rezultat al lui Hubery ne arată că numerele Ringel-Hall sunt de fapt polinoame raționale în q lucrând cu așa numite clase de decompoziție. Dacă ne limităm la polinoamele Ringel-Hall

asociate unor module indecompozabile în diferite cazuri blânde, nu avem prea multe informații despre ele. În articol autorii determină toate polinoamele Ringel-Hall asociate modulelor indecompozabile în cazul blând \tilde{D}_4 .

13. S. Breaz, Y. Zhou: *When is every non central-unit a sum of two nilpotents?* apărută în Algebra and coding theory, editor A. Leroy, Contemp. Math. 785 (2023), 47–55.

Legat de direcția (IIB), în această lucrare studiem inelele care au proprietatea că toate elementele lor care nu sunt centrale și inversabile sunt sume de două elemente nilpotente. Rezultatul principal spune că un astfel de inel este sau simplu sau comutativ, local cu radicalul Jacobson nil. Este descris un exemplu de inel simplu necomutativ care are proprietatea. Mai mult, este demonstrat că putem considera aceasta construcție minimală, pentru că dacă adăgăm ipoteza ca inelul este Goldie la dreapta, atunci se obține că el este de fapt un corp comutativ.

14. Cs. Szántó, I. Szöllösi: *Combinatorial methods in the representation theory of finite dimensional tame algebras*, monografie 2023.

În investigațiile legate de diverse categorii Grothendieck, am analizat, ca o componentă a tematicilor (IA) și (IIB), categoria reprezentărilor de tolbe blânde (afine, euclidiene) peste un corp finit. Aceasta coincide de fapt cu categoria modulelor finit dimensionale peste algebra de drumuri kQ , unde Q este o tolă de tip \tilde{A}_m ($m \geq 1$), \tilde{D}_m ($m \geq 4$), $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ și k este corp finit. Atunci kQ este un inel finitar, adică grupul de extensii de module este finit. Scopul nostru este să numărăm anumite monomorfisme, epimorfisme, automorfisme și extensii în principal pentru module indecompozabile. Pentru aceasta vom avea nevoie de multe instrumente, inducția Schofield bazată pe perechi excepționale ortogonale fiind foarte importantă.

Cunoașterea numărului de extensii ne conduce la algebrele Ringel-Hall, cu un spectru larg de aplicații. Mai exact, coeficienții de structură ai algebrei Ringel-Hall asociate lui kQ (denumite numere Ringel-Hall) numără (până la automorfisme) extensiile cu termeni mijlocii fixați. În cazul algebrelor Ringel-Hall corespunzătoare tolbelor Dynkin și tolbelor blânde știm (datorită lui Ringel, Hubery, respectiv Deng și Ruan) că numerele Ringel-Hall sunt polinoame în numărul de elemente ale corpului de bază. Aceste polinoame sunt polinoamele Ringel-Hall. Dacă ne uităm la polinoamele Ringel-Hall asociate modulelor indecompozabile, cele peste tolbe Dynkin sunt cunoscute (fiind obținute de Ringel) având gradul de până la 5. Nu avem însă prea multe informații despre polinoamele Ringel-Hall în cazurile blânde.

Monografia prezintă progresele realizate de autori în ultimii ani în ceea ce privește polinoamele Ringel-Hall și diversele aplicații ale acestora. Este folosit un spectru larg de instrumente și tehnici combinatorice, computaționale și teoretice legate de teoria reprezentării de algebre.

Aceste informații despre polinoamele Ringel-Hall sunt aplicate pe de o parte în teoria măsurii Gabriel-Roiter. Măsura Gabriel-Roiter a fost introdusă de Gabriel pentru a da o interpretare

combinatorică pentru schema de inducție folosită de Roiter în a demonstra prima conjectură Brauer-Thrall. Ringel a folosit-o ca instrument de bază pentru teoria reprezentării algebrelor artiniene.

De asemenea, prin intermediul numerelor Ringel-Hall, determinăm cardinalul Grassmannienelor peste tolba Kronecker, un rezultat de mare importanță în teoria clusterelor.

(C) Diseminarea rezultatelor a fost realizată și prin următoarele prezentări la conferințe internaționale sau seminarii de cercetare organizate în universități din străinătate:

- (1) S. Breaz: The 10-th Congress of Romanian Mathematicians, 30.06-05.07 2023, Pitesti, Romania. Talk: Change of scalars and bounded silting complexes.
- (2) S. Breaz: Trends in Representation Theory and Related Topics, 12-16 Septembrie 2023, Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca, Romania, <https://math.ubbcluj.ro/trtrt2023> Talk: On a characterization of (co)silting objects.
- (3) Cs. Szántó: Summer school, Quiver Representations, Quiver Varieties and Combinatorics (BIP Blended Intensive Program), 22-26 Mai 2023, Universitatea Bologna, Italia, <https://eventi.unibo.it/bip-quiver/summer-school>. Talk: Ringel-Hall polynomials associated to tame quivers.
- (4) Cs. Szántó: Trends in Representation Theory and Related Topics, 12-16 Septembrie 2023, Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca, Romania, <https://math.ubbcluj.ro/trtrt2023>. Talk: Ringel-Hall polynomials associated to tame quivers.
- (5) A. Marcus: 17th International Conference on Applied Mathematics and Computer Science, 11 – 13 Iulie 2023, Universitatea Tehnica Cluj-Napoca. Talk: Support tau-tilting modules and semibricks over group graded algebras.
- (6) G. C. Modoi: The 10-th Congress of Romanian Mathematicians, 30.06-05.07 2023, Pitesti, Romania. Talk: Migration of silting-like properties via adjoint pairs.
- (7) I.-I. Simion: The Tenth Congress of Romanian Mathematicians, June 30-July 5, 2023, Pitesti, Romania; Talk: On the product expansion of normal subsets in simple groups.
- (8) V.-A. Minuță: The Tenth Congress of Romanian Mathematicians, 30 June- 5 July 2023, Pitești, Romania, Talk: An exact sequence for the graded Picent group
- (9) V.-A. Minuță: 17th International Conference on Applied Mathematics and Computer Science, 11-13 July 2023, Cluj-Napoca, Romania, Talk: An exact sequence for the graded Picent group
- (10) I.-I. Simion: Trends in Representation Theory and Related Topics, September 12-16, 2023, Cluj-Napoca, Romania; Talk: Epimorphic subgroups in simple algebraic groups.
- (11) V.-A. Minuță: Trends in Representation Theory and Related Topics, 12-16 September 2023, Cluj-Napoca, Romania, Talk: Relations between module triples, and derived equivalences for wreath products

- (12) Simion Breaz: Malga Seminar Padova-Verona, Universita di Verona 24 mai 2022. Talk: Silting complexes and extensions of commutative rings.
- (13) Simion Breaz: Functor Categories, Model Theory, and Constructive Category Theory, Universidad de Almeria, 11-15.07.2022. Talk: Change of scalars functors and silting complexes.
- (14) Simion Breaz: Algebra Seminar, Charles University, Prague 10-12 octombrie 2022. Talk: The Baer-Kaplansky Theorem and Heaps of Modules.
- (15) Simion Breaz: Hopf algebras, monoidal categories and related topics IMAR, Bucuresti, 27-29.07.2022. Talk: Heaps of Modules
- (16) George Ciprian Modoi: Functor Categories, Model Theory, and Constructive Category Theory, Universidad de Almeria, 11-15.07.2022. Talk: Not necessarily compact approximability via silting theory.
- (17) Tudor Micu: Young Researchers' Conference on Non-Archimedean and Tropical Geometry, Universität Regensburg, 1-5 August 2022. Talk: The Structure of Special Fibers through Valuations.
- (18) Cs. Szántó: Algebra Seminar, Renyi Institute, Budapest, 7 martie 2022. Talk: Ringel-Hall polynomials associated to a quiver of type \tilde{D}_4 .
- (19) Andrei Marcus: Hopf algebras, monoidal categories and related topics IMAR, Bucuresti, 27-29.07.2022. Talk: Tilting complexes over a G -graded G -algebra.
- (20) S. Breaz: Homological Methods in Representation Theory. A conference in honour of Lidia Angeleri Hugel; 03 - 08 October 2021; Fraueninsel (Chiemsee), Abtei Frauenworth, Germany; Talk: Transfer of homological properties along some canonical functors.

(D) Vizite de informare/cercetare Membrii echipei au efectuat vizite de cercetare sau au participat la conferințe ca audienți. Dintre acestea, menționăm următoarele:

- (1) S. Breaz: Homological Algebra and Representation Theory, 10 –14 July 2023, Karlovasi, Samos, Greece.
- (2) G. C. Modoi: Homological Algebra and Representation Theory, 10 –14 July 2023, Karlovasi, Samos, Greece.
G. C. Modoi: Trends in Representation Theory and Related Topics, 12-16 Septembrie 2023, Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca.
- (3) A. Marcus: The 10-th Congress of Romanian Mathematicians, 30.06-05.07 2023, Pitesti, Romania.
- (4) A. Marcus: Trends in Representation Theory and Related Topics, 12-16 Septembrie 2023, Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca.
- (5) T. Micu: Trends in Representation Theory and Related Topics, 12-16 Septembrie 2023, Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca.

- (6) C. Pelea: Trends in Representation Theory and Related Topics, 12-16 Septembrie 2023, Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca.
- (7) T. Micu: - Summer School on Higher Structures in Algebra and Geometry; 13-18 August 2023; Nordfjordeid, Norway.
- (8) T. Micu: Tau-Tilting Research School; 5-8 September 2023; Köln, Germany.
- (9) T. Micu: Representation Theory and Triangulated Categories; 26-30 September 2022; Paderborn, Germany.
- (10) V.-A. Minuță: Representation Theory and Triangulated Categories; 26-30 September 2022; Paderborn, Germany.
- (11) C.-G. Modoi: Representation Theory and Triangulated Categories; 26-30 September 2022; Paderborn, Germany.
- (12) C.-G. Modoi: Homological Methods in Representation Theory. A conference in honour of Lidia Angeleri Hugel; 03 - 08 October 2021; Fraueninsel (Chiemsee), Abtei Frauenworth, Germany.

(E) Conferințe, prelegeri susținute de invitați în cadrul activităților grantului:

Am organizat conferința *Trends in Representation Theory and Related Topics*, 12-16 Septembrie 2023, Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca, Romania: <https://math.ubbcluj.ro/trtrt2023>.

La această conferință au participat ca invitați următorii cercetători: Ana Agore (Institute of Mathematics of the Romanian Academy), Ana Bălibanu (Louisiana State University), Tomasz Brzeziński (Swansea University), Stefaan Caenepeel (Vrije Universiteit Brussel), Călin Chindriș (University of Missouri), Dan Ciubotaru (University of Oxford), Sorin Dăscălescu (Universitatea din București), Meinolf Geck (Universität Stuttgart), Dolors Herbera (Universitat Autònoma de Barcelona), Michal Hrbek (Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences), Alexander Martsinkovsky (Northeastern University), Gigel Militaru (Universitatea din București), Bernard Rybołowicz (Heriot-Watt University), Manuel Saorín (Universidad de Murcia), Radu Stancu (Université de Picardie), Alberto Tonolo (Università degli Studi di Padova), Jan Trlifaj (Univerzita Karlova v Praze), Jan Žemlička (Univerzita Karlova v Praze).

De asemenea, în cadrul seminariilor asociate grantului au conferențiat următorii cercetători: Tomasz Brzeziński, Kenny De Commer, Attila Maróti, Yuta Kozakai, Emil Horobet, Jonathan Gruber.

(F) Indicatori realizați.

În continuare prezentăm un sumar al realizărilor obținute în cadrul acestui proiect. Conform planului inițial, rezultatele estimative verificabile au fost de opt articole științifice trimise spre publicare.

S-au obținut următoarele **rezultate**:

- 13 lucrări științifice trimise spre publicare; dintre acestea
 - 8 sunt acceptate, și aflate în diverse stadii de producție, de reviste indexate Web of Science,
 - 2 sunt acceptate în volume colective publicate în seriile Contemporary Mathematics, respectiv Springer Proceedings in Mathematics and Statistics;
 - 3 articole sunt trimise spre publicare la reviste indexate Web of Science;
- 20 prezentări în cadrul unor conferințe internaționale sau seminarii de cercetare organizate de colective din alte universități;
- 10 participări la conferințe internaționale;
- o monografie, în curs de publicare;
- 1 conferință internațională organizată în cadrul proiectului.

(G) Impactul estimat.

Estimăm că informațiile noi legate de teoria silting, obținute de-a lungul cercetărilor efectuate pe parcursul desfășurării grantului, vor fi considerate utile de comunitatea științifică din domeniu. Rezultatele obținute se referă la mai multe contexte: teoria generală a obiectelor silting în categorii triangulate, dar și situații particulare (categorii derivate peste inele comutative sau dg-algebre, respectiv teoria τ -tilting pentru generalizări ale algebrelor grupale) care necesită, fiecare în parte, abordări și tehnici speciale. De asemenea, din investigațiile făcute de membrii echipei s-au obținut rezultate importante despre categorii de module peste algebre finit dimensionale (grupale sau de drumuri peste tolbe speciale) sau despre metode de asociere structuri afine categoriilor de module. Acestea au fost bine primite de comunitatea științifică, iar lucrările dedicate lor au fost acceptate spre publicare în reviste de specialitate bine cotate în comunitatea academică.

Cluj-Napoca,
28.11.2023

prof. dr. Simion-Sorin Breaz