

Raportare științifică

privind implementarea proiectului
PN-III-P4-ID-PCE-2020-0454 (contract 75/2021)

Contribuții la teoria silting

în anul 2022

(A) Descrierea științifică

S-au continuat activitățile de cercetare ale structurilor algebrice legate de teoria silting. De asemenea s-au investigat legături cu alte tipuri de obiecte matematice.

Teme de cercetare abordate au respectat planul stabilit în proiectul propus. Aceasta sunt:

- (I)(A) Structuri asociate categoriilor Grothendieck care au legături cu complexe (co)silting.
- (I)(B) Transferul proprietăților cosilting cu ajutorul functorilor.
- (II)(A) Clase definabile și obiecte pur-injective în categorii triangulate.

Rezultatele obținute au fost incluse în lucrări aflate în diverse stadii de elaborare. În continuare, descriem aceste rezultate, menționând și lucrarea în care sunt incluse.

Lucrări finalizate și trimise spre publicare:

1. Simion Breaz, Michal Hrbek, George Ciprian Modoi: *Silting, cosilting, and extensions of commutative ring*, <https://arxiv.org/abs/2204.01374>

Această lucrare înglobează activități de cercetare legate de toate cele trei teme menționate anterior: (I)(A), (I)(B) și (II)(B). Are ca obiectiv principal studiul comportamentului complexelor silting mărginite atunci când se aplică functori induși de morfisme de inele (covarianți de extindere a scalarilor/ inducție, respectiv contravarianți de extindere a scalarilor/ coinducție), în special în cazul în care inelele sunt comutative.

Mai precis, considerăm un morfism $\lambda : R \rightarrow S$ de inele (comutative) rings, și transferurile determinate de functorii derivați induși între categoriile derivate $\mathbf{D}(R)$ or $\mathbf{D}(S)$: $-\otimes_R^{\mathbf{L}} S : \mathbf{D}(R) \rightarrow \mathbf{D}(S)$ și $\mathbf{RHom}_R(S, -) : \mathbf{D}(R) \rightarrow \mathbf{D}(S)$. De asemenea, consideră și transferul topologic al complexelor cosilting de tip cofinit care poate fi realizat folosind aplicația $\lambda^* : \text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(R)$ indusă de λ între spectrele Zariski ale celor două inele.

Demonstrăm ca proprietatea silting este păstrată de functorul $-\otimes_R^{\mathbf{L}} S$ și că $\mathbf{RHom}_R(S, -)$ păstrează proprietatea obiectelor de a fi pur-injective și cosilting. Mai mult, acești functori păstrează tipurile (co)finite ale obiectelor (co)silting considerate. În cazul obiectelor (co)silting de tip (co)finit putem aplica și transferul topologic menționat anterior pentru că λ^* este continuă relativ la topologiile Hochster. Demonstrăm că aceste tranferuri coincid (până la o echivalență) cu transferrile realizate folosind functorii derivați. Dacă λ este fidel plat, atunci λ^* este și închisă, iar aceasta ne permite să identificăm complexe (co)silting de tip (co)finit din $\mathbf{D}(S)$ care pot fi obținute, până la o echivalență, folosind functorii derivați.

Pe de altă parte, ca în cazul modulelor n -tilting, nu este clar dacă functorii derivați de extindere a scalarilor induși de morfisme fidel plate reflectă proprietățile de silting sau cosilting pentru complexe mărginite de lungime cel puțin 3. În ultima parte a lucrării studiem acest fenomen. Demonstrăm că fenomenul descris anterior este întâlnit în majoritatea cazurilor interesante: este valabil pentru complexe cosilting care sunt duale ale unor complexe de proiective, iar pentru cazul silting este valabil pentru morfisme care dau localizări Zariski și pentru toate morfismele care au ca domenii inele noeteriene inele cu dimensiunea pur globală finită și, în particular, inele de cardinal \aleph_n , cu n un număr natural strict pozitiv. Ca un corolar, demonstrăm că și proprietatea n -tilting a modulelor se comportă la fel. Pentru aceasta folosim o lemă care are ca ipoteza faptul că obiectele pur-injective generează categoria derivată. Rămâne ca problemă deschisă întrebarea dacă ipoteza acestei leme este valabilă pentru toate inelele comutative.

De asemenea, folosim și demonstrăm un rezultat care poate avea o valoare independentă: o caracterizare a complexelor silting mărginite $\hat{}$ în care condiția standard de închidere a clasei $T^{\perp > 0}$ la sume directe este în locuită de condiția $\text{Add}(T) \subseteq T^{\perp > 0}$. Acest rezultat generalizează o caracterizare similară demonstrată pentru module n -tilting de Positselski și Šťovíček.

2. Simion Breaz, Andrei Marcus, George Ciprian Modoi: *Support τ -tilting modules and semibricks over group graded algebras*, <https://arxiv.org/abs/2209.02992>

Această lucrare înglobează activități de cercetare legate de temele: (I)(A) și (I)(B). Considerăm o k -algebră A de dimensiune finită care este tare G -gradată (peste grupul finit G) și notăm 1-componenta sa cu B (k este un corp comutativ). În această situație functorii de inducție $\text{Ind}_B^A = A \otimes_B -$ și de restricție a scalarilor Res_B^A formează o pereche Frobenius (sunt biadjuncți). În plus, Ind_B^A este separabil. Dacă $\text{char}(k)$ nu divide ordinul lui G , atunci și Res_B^A este separabil. Studiem cum sunt transferate perechile τ -tilting de acești functori. Ne bazăm pe următoare informație importantă: dacă B este self-injective, atunci Ind_B^A commută cu acoperirile proiective: duce prezentările proiective minimale în proezentări proiective minimale. Acest rezultat extinde ceea ce a demonstrat E. C. Dade pentru Res_B^A .

Folosind aceste rezultate, demonstrăm că dacă M este un B -modul s - τ -tilting, atunci $\text{Ind}_B^A M$ este de asemenea s - τ -tilting dacă și numai dacă M este G -invariant și că un rezultat similar are loc pentru Res_B^A . De asemenea sunt prezentate legături cu alte obiecte/structuri care sunt corelate cu modulele s - τ -tilting (semibrick-uri, clase de torsiune functorial finite). Aceste rezultate generalizează și explică fenomenele prezentate de Koshio and Kozakai pentru reprezentări ale grupurilor finite.

3. Simion Breaz, Tomasz Brzeziński, Bernard Rybolowicz, Paolo Saracco: *Heaps of modules and affine spaces*, <https://arxiv.org/abs/2203.07268>

Această lucrare înglobează activități de cercetare legate de (I)(A). Scopul ei este de a realiza un studiu detaliat a unor structuri asociate categoriilor de module care permit extinderea unor teoreme de tip Baer-Kaplansky, care identifică obiectele cu ajutorul endomorfismelor lor, de la clase particulare de grupuri abeliene (grupuri de torsiune) la rezultate care sunt valabile pentru toate modulele. Aceste structuri, numite *heaps of modules* admite de asemenea interpretări geometrice, putând fi caracterizate ca spații afine asociate categoriilor de module.

Pentru aceasta, considerăm o extindere a noțiunii de inel, truss, în care operația aditivă este înlocuită cu o operație ternară care verifică axiomele lui Mal'cev de asociativitate și idempotență. Sunt descrise diverse structuri

peste aceste generalizări ale inelelor (T -grupuri, T -module, heap-uri de T -module) și legăturile dintre ele. Rezultatul principal descrie o echivalență în categoria heap-urilor de T -module și categoria spațiilor afine peste T .

În finalul lucrării sunt prezentate exemple de structuri din diverse domenii care pot fi organizate ca heap-uri de module: structuri algebrice asociate soluțiilor ecuațiilor de tip Yang-Baxter, structuri cu caracter geometric (connections) și contrații în categorii de omotopie asociate categoriilor de module (în particular, morfisme de scindare).

4. Simion Breaz, Cristian Rafiliu: *Decompositions of matrices by using commutators*, <https://arxiv.org/abs/2209.03195>

Această lucrare înglobează activități de cercetare legate de (I)(A). Folosim pentru studiul inelelor de endomorfisme al modulelor libere de rang infinit două proprietăți ale acestora: orice element dintr-un astfel de inel este un comutator și faptul că un astfel de inel este izomorf cu oricare dintre inelele de matrici pătrate cu coeficienți în inelul respectiv.

În acest articol studiem descompuneri ale matricilor de tip 3×3 cu coeficienți într-un inel oarecare care au urma un comutator. Demonstrăm că pentru orice trei polinoame scindabile de grad 3 cu rădăcini în centrul inelului, aceste matrici pot fi scrise ca sume de 3 matrici care sunt anulate de câte un polinom dintre cele alese initial.

Aceste descompuneri sunt apoi folosite pentru obținerea de informații despre inelele de endomorfisme ale modulelor libere de rang infinit, dar și pentru studiul operatorilor marginiți asociați spațiilor Hilbert complexe. Se demonstrează și că inelele simple care sunt obținute prin factorizarea inelelor de endomorfisme ale spațiilor vectoriale infinite dimensionale prin idealele maximale corespunzătoare pot fi descompuse, folosind operațiile ternare asociate adunării (heap-uri), folosind trei truss-uri care induc structurile “brace” definite de Rump pentru construcția de soluții ale ecuațiilor Yang-Baxter pentru mulțimi.

5. Cs. Szántó, I. Szöllösi, *On some Ringel-Hall polynomials associated to tame indecomposable modules*.

Această lucrare înglobează activități de cercetare legate de toate cele trei teme menționate anterior: (I)(A) și (I)(B). Fie k un corp finit având q elemente și Q o tolbă aciclică, blândă (adică de tip $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$). Considerăm algebra de drumuri kQ și categoria modulelor drepte, finite dimensionale $\text{Mod-}kQ$. Algebra rațională Ringel-Hall $\mathcal{H}(kQ)$ asociată algebrei kQ

are baza rațională formată din clasele de izomorfisme $[M]$ din $\text{Mod-}kQ$ și produsul definit prin $[N_1][N_2] = \sum_{[M]} F_{N_1 N_2}^M [M]$. Constantele de structură $F_{N_1 N_2}^M = |\{U \subseteq M \mid U \cong N_2, M/U \cong N_1\}|$ se numesc numere Ringel-Hall.

Generalizând algebrele Hall clasice, algebrele Ringel-Hall au fost introduse de Ringel pentru familia largă a inelelor finite, incluzând în particular algebrele de drumuri peste corpuri finite. Algebrele Ringel-Hall au permis studiul grupurilor cuantice prin intermediul teoriei reprezentării de algebre finite dimensionale și joacă un rol important în teoria algebrelor cluster. Mai mult ele sunt esențiale în descrierea structurii categoriei de module, deci în acest fel ele pot fi legate și de teoria tilting și silting.

Un rezultat al lui Hubery ne arată că numerele Ringel-Hall sunt de fapt polinoame raționale în q lucrând cu așa numite clase de decompoziție. Dacă ne limităm la polinoamele Ringel-Hall asociate unor module indecompozabile în diferite cazuri blânde, nu avem prea multe informații despre ele. Într-un articol raportat anul trecut, autorii au determinat toate polinoamele Ringel-Hall asociate modulelor indecompozabile în cazul blând \tilde{D}_4 .

În această lucrare determinăm toate polinoamele Ringel-Hall blânde, asociate modulelor indecompozabile cu defect din mulțimea $\{-2, -1, \dots, 2\}$. În comparație cu cazul \tilde{D}_4 , aceasta este o sarcină mult mai grea, necesitând introducerea unor instrumente noi, generice. Este surprinzător că, la fel ca în cazul \tilde{D}_4 , și în cazul general, vom avea în esență numai trei familii de polinoame Ringel-Hall (cu un singur membru pentru fiecare grad polinomial). Prima familie corespunde indecompozabilelor ne-regulare, neomogene. A doua familie este foarte strâns legată de prima, deci aceste două familii sunt în esență aceleași, implicând indecompozabile de tip discret (preinjective, preprojective și regulate neomogene). A treia familie corespunde cazurilor continue (când unul dintre indecompozabile este regular omogen).

(B) Sumar al rezultatelor

În anul 2022 au fost finalizate 5 lucrări care sunt trimise spre publicare. Acestea sunt lucrările descrise în secțiunea precedentă a raportului. Astfel, s-au îndeplinit indicatorii de rezultat asumați (3 lucrări trimise spre publicare.)

Următoarele lucrări, elaborate în anul 2021, au fost acceptate spre publicare. Ele au fost revizuite și pregătite pentru publicare conform comentariilor referenților.

1. Simion Breaz: On a theorem of Stelzer for some classes of mixed groups. *Mediterr. J. Math.* 19, No. 4, Paper No. 159, 14 p. (2022).
2. S. Breaz, Y. Zhou: When is every non central-unit a sum of two nilpotents? va apărea în *Contemporary Math.*

Diseminarea rezultatelor a fost realizată și prin următoarele prezentări la conferințe internaționale sau seminarii de cercetare organizate în universități din străinătate:

1. Simion Breaz: Malga Seminar Padova-Verona, Universita di Verona 24 mai 2022. Talk: Silting complexes and extensions of commutative rings.
2. Simion Breaz: Functor Categories, Model Theory, and Constructive Category Theory, Universidad de Almeria, 11-15.07.2022. Talk: Change of scalars functors and silting complexes.
3. Simion Breaz: Algebra Seminar, Charles University, Prague 10-12 octombrie 2022. Talk: The Baer-Kaplansky Theorem and Heaps of Modules.
4. Simion Breaz: Hopf algebras, monoidal categories and related topics IMAR, Bucuresti, 27-29.07.2022. Talk: Heaps of Modules
5. George Ciprian Modoi: Functor Categories, Model Theory, and Constructive Category Theory, Universidad de Almeria, 11-15.07.2022. Talk: Not necessarily compact approximability via silting theory.
6. Tudor Micu: Young Researchers' Conference on Non-Archimedean and Tropical Geometry, Universität Regensburg, 1-5 August 2022. Talk: The Structure of Special Fibers through Valuations.
7. Csaba Szanto: Algebra Seminar, Renyi Institute, Budapest, 7 martie 2022. Talk: Ringel-Hall polynomials associated to a quiver of type \tilde{D}_4 .
8. Andrei Marcus: Hopf algebras, monoidal categories and related topics IMAR, Bucuresti, 27-29.07.2022. Talk: Tilting complexes over a G -graded G -algebra.

(C) Rezumat

Activitățile din cadrul grantului s-au desfășurat conform planului stabilit în proiectul inițial, corespunzător obiectivelor principale ale proiectului și pașilor intermediari stabiliți. Ele au fost realizate în echipă, în cadrul unor seminarii de informare și cercetare, sau individual. Seminariile de cercetare s-au realizat pe platforma MS Teams pusă la dispoziție de Universitatea Babeș-Bolyai și prin întâlniri față în față. La aceste seminarii au avut acces membrii echipei, dar și alți colegi sau studenți care sunt interesați de fenomene care au legătură cu tipurile de obiecte matematice studiate de noi. Membrii echipei au participat și la conferințe științifice dedicate unor subiecte care sunt strâns legate de subiectele de cercetare abordate în acest proiect.

Teme de cercetare abordate:

- (I)(A) Structuri asociate categoriilor Grothendick care au legături cu complexe (co)silting.
- (I)(B) Transferul proprietăților cosilting cu ajutorul functorilor.
- (II)(A) Clase definabile și obiecte pur-injective în categorii triangulate.

Seminarii de informare/cercetare

În cadrul seminarului de cercetare au fost prezentate și studiate rezultate din literatura de specialitate legate de următoarele teme:

- (1) Module silting, cosilting, τ -tilting.
- (2) Obiecte silting în categorii triangulate.
- (3) Identități în inele și aproximări. Proprietăți de scindare.

De asemenea, membrii grantului au participat în cadrul activităților de informare și la alte conferințe internaționale (on-line sau cu prezență fizică).

S-au obținut următoarele **rezultate**:

- 5 lucrări științifice trimise spre publicare,
- 2 lucrări elaborate în 2021 au fost acceptate spre publicare,
- 6 prezentări în cadrul unor conferințe internaționale,
- 2 prezentări în cadrul unor seminarii de cercetare organizate de colective din alte universități.

Cluj-Napoca,

05.12.2022

prof. dr. Simion-Sorin Breaz