

Raportare științifică

privind implementarea proiectului
PN-III-P4-ID-PCE-2020-0454 (contract 75/2021)

Contribuții la teoria silting

(A) Rezumatul etapei

Activitățile din cadrul grantului s-au desfășurat conform planului stabilit în proiectul inițial, corespunzător obiectivelor principale ale proiectului și pașilor intermediari stabiliți. Temele abordate în acest an au fost:

(I)(A) Clase (co)generate de obiecte (co)silting.

(I)(B) Proprietățile silting/cosilting păstrate/reflectate de functors.

(II)(A) Obiecte pur-injective și produse directe.

Activitățile de cercetare au fost realizate în echipă, în cadrul unor seminarii de informare și cercetare, sau individual. Seminariile de cercetare s-au realizat pe platforma MS Teams pusă la dispoziție de Universitatea Babeş-Bolyai. Pentru aceasta a fost realizat un canal dedicat în cadrul echipei asociate colectivului de Algebră din facultate. La aceste seminarii au avut acces membrii echipei, dar și alți colegi sau studenți care sunt interesați de fenomene care au legătură cu tipurile de obiecte matematice studiate de noi. În aceeași platformă a fost creat o echipa separată pentru discuții individuale.

Seminarii de informare/cercetare

În cadrul seminarului de cercetare au fost prezentate și studiate rezultate din literatura de specialitate legate de următoarele teme:

(a) **Obiecte silting asociate algebrelor grupale.** Pentru aceasta s-a început cu analizarea lucrării [R. Koshio, Y. Kozakai: On support τ -tilting modules over blocks covering cyclic blocks, J. Algebra 580 (2021), 84–103], unde sunt studiate complexe 2-silting compacte (i.e. module τ -tilting) peste algebre grupale. În acest context s-au reluat și rezultatele de bază ale teoriei τ -tilting publicate în lucrările [T. Adachi, O. Iyama, and I. Reiten,

τ -tilting theory, *Compos. Math.* 150 (2014), 415–452] și [T. Aihara and O. Iyama, Silting mutation in triangulated categories, *J. Lond. Math. Soc.* (2) 85 (2012), no. 3, 633–668]. De asemenea, au fost prezentate rezultate legate de o direcție nouă în studiul echivalențelor asociate algebrelor grupale, echivalențe butterfly. În acest scop au fost prezentate rezultate publicate în [A. Marcus, Andrei; V.-A. Minuță, Character triples and equivalences over a group graded G -algebra. *J. Algebra* 565 (2021), 98–127].

(b) **Transferul complexelor tilting cu ajutorul functorului de extindere a scalarilor.** Pornind de la rezultatele publicate în [R. Koshio, Y. Kozakai: On support τ -tilting modules over blocks covering cyclic blocks, *J. Algebra* 580 (2021), 84–103], s-a constatat că pentru un bun transfer al proprietăților τ -tilting este necesar să fie impusă o condiție de invarianță relativ la anumite subgrupuri inertiiale. Această condiție apare în mod natural și în studiul complexelor tilting, de ex. în [A. Marcus: Tilting complexes for group graded algebras, *J. Group Theory* 6 (2003), 175–193]. Astfel s-a trecut la studiul transferului de proprietăți tilting/silting în contextul G -categoriilor. Pentru aceasta s-a studiat în cadrul seminarului lucrarea [C. Amiot, T. Brüstle: Derived equivalences between skew-gentle algebras using orbifolds, arXiv:1912.04367]. Astfel de condiții de invarianță apar în mod natural și într-un context mai formal în lucrarea [J.-i. Miyachi. Extensions of rings and tilting complexes, *J. of Pure and Appl. Alg.* 105 (1995) 183-194]. Și acestea au fost prezentate în cadrul seminarului.

(c) **Obiecte (co)silting în categorii triangulate.** În cadrul seminarului au fost prezentate și rezultate legate de proprietățile obiectelor (co)silting în contextul mai general alategoriilor triangulate. Pentru aceasta s-au folosit lucrările [L. Angeleri-Hügel, Silting objects. *Bull. Lond. Math. Soc.* 51 (2019), 658–690], [L. Angeleri Hügel, F. Marks, J. Vitória, Torsion pairs in silting theory. *Pac. J. Math.* 291 (2017), 257–278] și [C. Psaroudakis and J. Vitória, Realisation functors in tilting theory, *Math. Z.* 288 (2018), 965–1028]. Scopul acestor prezentări a fost acela de a identifica structurile asociate unor obiecte/clase (co)silting care pot fi mai ușor transferate cu ajutorul functorilor. De exemplu, s-a studiat modalitățile prin care noțiunea (co)silting este asociată t -structurilor (TTF-triplelor) în categorii triangulate.

Activități de cercetare

(a) **Obiecte silting și cosilting asociate categoriilor Grothendieck și categoriilor triangulate.** Cercetările legate de acest subiect a început studiul categoriilor cu identificarea rezultatelor fundamentale din teoriile silting asociate unor categorii Grothendieck, respectiv unor categorii triangulate. Un obiectiv al cercetărilor este acela de a identifica un spațiu comun în care aceste rezultate pot fi enunțate. În acest scop ne-am oprit la categoriile extriangulate introduse în [H. Nakaoka, Y. Palu, Extriangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures. Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. 60 (2019) no. 2, 117–193]. Pentru că în studiul obiectelor (co)silting sunt adeseori folosite condiții de finitudine (de ex. TTF-teorii compact generate sau condiții de legate de puritate) am început studierea unor astfel de condiții în categorii extriangulate. Pentru aceasta a fost nevoie să definim “compactitatea” în așa fel încât să fie modelate atât categoriile Grothendieck local finit prezentate cât și categoriile triangulate compact generate.

(b) **Transferul proprietăților (co)silting cu ajutorul functorilor. Proprietăți ascend-denscend.** Am studiat situații în care dacă avem o pereche de functori adjunși $\varphi^* : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : \varphi_*$ între categorii triangulate bine generate și T este un obiect silting în \mathcal{C} , atunci $\varphi^*(T)$ este de asemenea silting. În particular, am obținut o caracterizare care ne spune că dacă T este silting, atunci $\varphi^*(T)$ este silting dacă și numai dacă $\mathcal{C}(T, \varphi_*\varphi^*(T)[i]) = 0$ pentru toți $i > 0$. În această situație am descris și felul în care functorii φ_* și φ^* mută clasele din TTF triplele asociate lui T , respectiv $\varphi^*(T)$. Acest rezultat este aplicat perechilor de functori Frobenius (i.e. în situația când functorii φ^* și φ_* sunt adjunși bilateral) ca să deducem că T și $\varphi^*(T)$ sunt ambii silting dacă și numai dacă $\varphi_*\varphi^*(T) \in \text{Add}(T)$. Acest rezultat demonstrează ca restrângerea la ipotezele G -invariant în studiul transferului de obiecte silting/tilting asociate algebrelor grupale este naturală. Mai mult, rezultatele sunt aplicate și pentru functorii de extindere/restricție a scalarilor asociați morfismelor de inele comutative. Am demonstrat că dacă $\varphi : R \rightarrow S$ este un morfism între inele comutative, atunci oricare a fi T un obiect silting în categoria derivată $\mathbf{D}(R)$ asociată lui R , obiectul indus $\varphi^*(T)$ din categoria derivată $\mathbf{D}(S)$ a lui S este silting, unde φ^* este functorul derivat asociat extinderii scalarilor. Mai mult, dacă φ este fidel plat,

atunci φ^* induce o corespondență injectivă între clasele de echivalență ale complexelor silting din $\mathbf{D}(R)$ și clasele similare din $\mathbf{D}(S)$.

(c) **Contribuții la teoria aproximării: inele și aplicații.** Această direcție de cercetare a fost folosită pentru obținerea de informații preliminare asupra metodelor pe care intenționăm să le aplicăm și despre contextele în care dorim să lucrăm. De asemenea, ea este folosită ca direcție alternativă de cercetare, așa cum este descrisă în propunerea de proiect. Astfel, s-au studiat pentru anumite categorii de grupuri abeliane mixte (care îndeplinesc niste condiții de finitudine) proprietăți de simplificare ale sumelor directe. Am demonstrat că pentru anumite clase (în particular pentru grupurile auto-mici de rang fără torsiune cel mult 4) proprietatea de simplificare în sume directe a unui astfel de grup poate fi caracterizată folosind inelul de (quasi-)endomorfisme asociat grupului. O altă direcție a fost studiul elementelor nilpotente într-un inel. În acest context am demonstrat că dacă toate elementele care nu sunt centrale și inversabile ale unui inel sunt sume de două elemente nilpotente, atunci inelul este comutativ sau simplu. Cazul comutativ a fost de asemenea caracterizat: este vorba de inelele locale cu radicalul Jacobson nilpotent. Tot în acest context al studiului aproximărilor în categorii de module, am început studiul unor clase de structuri algebrice numite “heaps of modules”. Acestea reprezintă module peste niste structuri asemănătoare inelelor, numite “trusses”, în care operația aditivă este înlocuită cu o operație ternară care îndeplinește anumite condiții introduse de Mal’cev. S-a constatat că o pre-velopă/pre-acoperire induce astfel de structuri și am considerat că merită să le investigăm mai amănunțit. Este de menționat că astfel de structuri apar în mod natural și în alte domenii ale matematicii (de ex. în teoriile care studiază soluții ale ecuațiilor de tip Yang-Baxter).

Studiul preliminar al structurilor/categoriilor pe care pot fi aplicate rezultate generale au cuprins și următoarea situație. Fie k un corp finit având q elemente și Q o tolbă blândă de tip \tilde{D}_4 . Considerăm algebra de drumuri kQ și categoria modulelor drepte, finit dimensionale $\text{-Mod}kQ$. Algebra rațională Ringel-Hall $\mathcal{H}(kQ)$ asociată algebrei kQ are baza rațională formată din clasele de izomorfisme $[M]$ din $\text{-Mod}kQ$ și produsul definit prin $[N_1][N_2] = \sum_{[M]} F_{N_1 N_2}^M [M]$. Constantele de structură $F_{N_1 N_2}^M = |\{U \subseteq M \mid U \cong N_2, M/U \cong N_1\}|$ se numesc numere Ringel-Hall.

Generalizând algebrele Hall clasice, algebrele Ringel-Hall au fost introduse de Ringel pentru familia largă a inelelor finite, incluzând în particular algebrele de drumuri peste corpuri finite. Algebrele Ringel-Hall au permis studiul grupurilor cuantice prin intermediul teoriei reprezentării de algebre finite dimensionale și joacă un rol important în teoria algebrelor cluster. Mai mult ele sunt esențiale în descrierea structurii categoriei de module, deci în acest fel ele pot fi legate și de teoria tilting și silting.

Un rezultat al lui Hubery ne arată că numerele Ringel-Hall sunt de fapt polinoame raționale în q lucrând cu așa numite clase de decompoziție. Dacă ne limităm la polinoamele Ringel-Hall asociate unor module indecompozabile în diferite cazuri blânde, nu avem prea multe informații despre ele. Rezultatele acestor investigații au fost incluse în tr-un articol trimis spre publicare în care se determină toate polinoamele Ringel-Hall asociate modulelor indecompozabile în cazul blând \tilde{D}_4 .

(B) Rezultate

Cercetarea efectuată până acum a fost sintetizată în următoarele lucrări științifice.

(1) Lucrări finalizate și trimise spre publicare

1. S. Breaz: *On a theorem of Stelzer for self-small mixed groups.*
2. S. Breaz, Y. Zhou: *When is every non central-unit a sum of two nilpotents?*
3. Cs. Szanto, I. Szollosi: *Ringel-Hall polynomials associated to a quiver of type \tilde{D}_4*

(2) Lucrări aflate în stadiu avansat de elaborare

1. S. Breaz, C.-G. Modoi: *Migration of silting objects via adjoint pairs*
2. S. Breaz, F. Pop: *On extriangulated categories*
3. S. Breaz, T. Brzeziński, B. Rybolowicz, P. Saracco: *Heaps of modules. First properties and applications*

Participări la conferințe, workshopuri, seminarii de cercetare

1. **S. Breaz:** participare la conferința *Homological Methods in Representation Theory*, A conference in honour of Lidia Angeleri Hugel, October

3 - 8, 2021; Fraueninsel (Chiemsee), Abtei Frauenworth, Germany. Talk: *Transfer of homological properties along some canonical functors*.

2. **G.-C. Modoi:** participare la conferința *Homological Methods in Representation Theory*, A conference in honour of Lidia Angeleri Hugel, October 3 - 8, 2021; Fraueninsel (Chiemsee), Abtei Frauenworth, Germany.

(C) Concluzii

Obiectivele acestei etape au fost îndeplinite

Din punct de vedere organizational, membrii echipei s-au familiarizat cu literatura de specialitate și s-au identificat tehnicile și contextele (pe lângă cele propuse în proiectul inițial au fost identificate și altele recent apărute în literatura de specialitate) care vor fi folosite pentru completarea cercetărilor.

Din punctul de vedere al rezultatelor științifice, au fost obținute informații noi legate de obiectivele stabilite în propunerea de proiect. Acestea vor fi diseminate cu ajutorul lucrărilor trimise deja spre publicare și a celor care care se află acum în stadii avansate de elaborare.

Menționăm că în planul inițial a fost stabilit ca obiectiv măsurabil că în anul 2021 vor fi trimise spre publicare două articole și că acest obiectiv a fost realizat.

Cluj-Napoca

26.11.2021

Prof. Dr. Simion-Sorin Breaz