

SEMINARUL 8
Lema substituției

1. În \mathbb{R} -spațiul vectorial \mathbb{R}^4 considerăm sistemul de vectori $\mathbf{a} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$, unde

$$v_1 = (1, 2, -1, 2), v_2 = (1, 2, 1, 4), v_3 = (2, 3, 0, -1), v_4 = (1, 3, -1, 0).$$

Arătați că \mathbf{a} este o bază a lui \mathbb{R}^4 peste \mathbb{R} și determinați coordonatele lui $v = (2, 3, 2, 10)$ în aceasta bază.

2. În \mathbb{Z}_5 - spațiul vectorial \mathbb{Z}_5^3 se consideră vectorii $v_1 = (\widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{1})$, $v_2 = (\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{4})$, $v_3 = (\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{1})$, $v = (\widehat{4}, \widehat{2}, \widehat{1})$

Arătați că v_1, v_2, v_3 formează o bază și calculați coordonatele lui v în această bază

3. Arătați că matricile $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ formează o bază \mathbb{R} - spațiului vectorial $M_2(\mathbb{R})$.

Determinați coordonatele matricii $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ în această bază.

4. În \mathbb{R} -spațiul vectorial \mathbb{R}^4 se consideră vectorii

(a) $(0, 1, 3, 2), (1, 0, 5, 1), (-1, 0, 1, 1), (3, -1, -3, -4), (2, 0, 1, -1);$

(b) $(1, 2, 3, 0), (0, 1, -1, 1), (3, 7, 8, 1), (1, 3, 2, 1);$

(c) $(1, 2, -1, 2), (2, 3, 0, -1), (2, 4, 0, 6), (1, 2, 1, 4), (3, 6, -1, -1), (1, 3, -1, 0).$

Determinați care dintre acești vectori formează o bază a subspațiului generat de ei, și eventualele relații de dependență .

5. Considerăm aplicația \mathbb{R} liniară $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$f(x, y, z, t, w) = (y - z + 3t + 2w, x - t, 3x + 5y + z - 3t + w, 2x + y + z - 4t - w).$$

Determinați $\text{Ker } f$.

6. Considerăm aplicația \mathbb{R} liniară $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z - t, -2x + y - z, y - 2z + 3t).$$

Determinați $\text{Ker } f$.

7. Considerăm aplicațiile \mathbb{R} liniare

(a) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x, y, z, t) = (x + 2y + z - t, x + 2y - z + t, x + 2y, z - t).$

(b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + 2y, y + z, x - 2z).$

Determinați câte o bază pt $\text{Im } f$ și $\text{Ker } f$.

8. Fie sistemul $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$.

(a) Determinați o bază a subspațiului $S \subseteq \mathbb{R}^3$ al soluțiilor sistemului și determinați dimensiunea \mathbb{R}^3/S .

(b) Definiți $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ astfel încât $S = \text{Ker } f$ și să se verifice

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } f + \dim_{\mathbb{R}} \text{Im } f = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3.$$