

SEMINARUL 7
Baze. Lema substituției

1. Fie $v_1 = (1, -2, 0)$, $v_2 = (2, 1, 1)$, $v_3 = (0, \alpha, 1)$ vectori din \mathbb{R} -spațiul vectorial \mathbb{R}^3 . Folosind lema schimbului să se discute în funcție de $\alpha \in \mathbb{R}$ dacă sistemul $v = (v_1, v_2, v_3)$ este o bază a lui \mathbb{R}^3 .
2. Arătați că $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{\mathbf{a} + \mathbf{b}\sqrt{2} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Q}\}$ este un \mathbb{Q}^* -spațiu vectorial și determinați o bază și dimensiunea acestui spațiu.
3. Fie p un număr prim și $M = \{\mathbf{a} + \mathbf{b}\sqrt[3]{p} + \mathbf{c}\sqrt[3]{p^2}\}$. Arătați că M este un \mathbb{Q} -spațiu vectorial și determinați o bază.
4. Determinați câte o bază și dimensiunea spațiilor vectoriale ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ și ${}_C\mathbb{C}$.
5. Fie spațiul vectorial real $P_n = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad} f \leq n\}$. Arătați că:
 - a) $B = \{1, X, X^2, X^4\}$ este o bază.
 - b) $B' = \{1, \frac{X-a}{1!}, \frac{(X-a)^2}{2!}, \frac{(X-a)^4}{4!}\}$, $a \in \mathbb{R}$ este o bază.
Aplicație: dezvoltăți polinomul $f = -4 + 3X - 5X^2 + 2X^3$ după $X - 2$.
6. În \mathbb{R} -spațiul vectorial \mathbb{R}^4 se consideră subspațiile:

$$U = \langle (2, 0, 1, -1), (0, 1, 3, 2), (-1, 0, 1, 1), (1, 1, 5, 2) \rangle$$

$$S = \langle (1, 0, 2, 0), (2, 1, -, 1, 2), (-1, -1, 3, -2) \rangle$$

Determinați dimensiunile spațiilor U , S , $U + S$, $U \cap S$ și câte o bază.

7. Fie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (x + 2y, y + z, x - 2z)$. Arătați că $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ și determinați o bază și dimensiunea subspațiilor $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$.