SEMINARUL 6

Aplicaţii liniare. Dependenţă şi independenţă liniară. Baze

1. Verificaţi dacă următoarele funcţii sunt K- morfisme şi în caz afirmativ determinaţi nucleul şi imaginea:

   a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_1(x,y) = (x-y, 2x+y)$, $K = \mathbb{R}$;

   b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_2(x,y) = (2+x, 2+y)$, $K = \mathbb{R}$;

   c) $f_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_3(x,y,z) = (3xy, z-y)$, $K = \mathbb{R}$;

   d) $f_4\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_4(z) = \bar{z}$, $K = \mathbb{C}$;

   e) $f_5\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_5(z_1,z_2) = z_1z_2$, $K = \mathbb{C}$;

   f) $f_6\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f_6(A) = detA$, $K = \mathbb{R}$;

   g) $f_7\colon \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$, $f_7(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{R}$;

   h) $f_8\colon \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$, $f_8(f) = f(z_0)$, $K = \mathbb{C}$, unde $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat;

2. Fie $f_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_3(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$,

   a) Arătaţi că $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$.

   b) Determinaţi $\operatorname{Ker} f$ şi $\operatorname{Im} f$.

3. Fie $f_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_3(x,y,z) = (x+2y, y+z, x-2z)$,

   a) Arătaţi că $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ şi determinaţi $\operatorname{Ker} f$ şi $\operatorname{Im} f$.

   b) Arătaţi că $(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in \operatorname{Ker} f$ şi $(3,1,1) \in \operatorname{Im} f$.

4. Determinaţi $\mathbb{R}$-subspaţile lui $\mathbb{R}^3$ generate de următoarele mulţimi:

   a) $\{(1,0,0)\}$

   b) $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

   c) $\{(0,1,-1),(1,0,2)\}$

   d) $\{(2,2,0),(0,1,0),(1,0,0)\}$

   e) $\{(0,1,-1),(1,0,2),(1,3,-1)\}$

   f) $\{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$

5. a) Considerăm sistemul de vectori $a = [v_1, v_2, v_3]$ din $\mathbb{R}^3$, unde

   $$v_1 = (1,2,-1),\ v_2 = (3,2,4),\ v_3 = (-1,2,-6).$$

   Arătaţi că a este liniar dependent.

   b) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel incât sistemul format din vectorii

   $$v_1 = (1,-2,0,-1),\ v_2 = (2,1,1,0),\ v_3 = (0,a,1,2)$$

   să fie liniar dependent.

   c) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel incât sistemul format din vectorii

   $$v_1 = (a,1,1),\ v_2 = (1,a,1),\ v_3 = (1,1,a)$$

   să poată forma o bază a lui $\mathbb{R}^3$.

6. În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ considerăm sistemul de vectori $a = [v_1, v_2, v_3]$, unde

$$v_1 = (1, 2, 3),\ v_2 = (0, 2, 3),\ v_3 = (0, 0, 3).$$

   Arătaţi că a este o bază a lui $\mathbb{R}^3$ peste $\mathbb{R}$ şi determinaţi coordonatele lui $v = (1, 1, 1)$ în aceasta bază.

7. În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ considerăm sistemul de vectori $a = [v_1, v_2, v_3, v_4]$, unde

$$v_1 = (1, 2, -1, 2),\ v_2 = (1, 2, 1, 4),\ v_3 = (2, 3, 0, -1),\ v_4 = (1, 3, -1, 0).$$

   Arătaţi că a este o bază a lui $\mathbb{R}^4$ peste $\mathbb{R}$ şi determinaţi coordonatele lui $v = (2, 3, 2, 10)$ în aceasta bază.