SEMINARUL 5

Subspaţii vectoriale

1. Precizaţi care dintre următoarele submulţimi ale spaţiului vectorial ${}_{\mathbb{R}}V_2$ al vectorilor din plan cu originea în O sunt subspaţii:

   a) mulţimea vectorilor din primul cadran;

   b) mulţimea vectorilor din cadranele I şi III;

   c) mulţimea vectorilor de pe o dreaptă;

   d) mulţimea vectorilor dintr-un semiplan.

2. Verificaţi dacă următoarele mulţimi sunt $\mathbb{R}$ - subspaţii în $\mathbb{R}^3$.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\} \ (a, b, c \text{ fixate})$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot y = 0\}$$

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1\}$$

3. Fie K un corp. Care dintre următoarele mulţimi

   a) $K_n[x] = \{f \in K[x] \mid \text{grad} f \leq n\}$

   b) $A = \{f \in K[x] \mid \text{grad} f = n\}$

   este K - subspaţiu în $K[x]$?

4. Verificaţi dacă $x = (3, 0, 3)$ aparţine subspaţiilor

   a) $S_1 =< (1, 2, 3) >$, b) $S_2 =< (1, 1, 0), (0, 0, 1) >$,

   c) $S_3 =< (1, 2, 1), (1, -4, 1) >$, d) $S_4 =< (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) >$.

5. Considerăm următoarele subspaţii ale spaţiului vectorial real $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}.$$

   Scrieţi A, B, şi C ca subspaţii generate (cu număr minim de generatori).

6. Fie

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}.$$

   Arătaţi că $A, B \leq {}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ şi $\mathbb{R}^3 = A + B$.

7. Fie ${}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$ spaţiul vectorial al funcţiilor de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$.
   Notăm

$$\mathbb{R}_i^{\mathbb{R}} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ impară } \}$$

$$\mathbb{R}_p^{\mathbb{R}} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ pară } \}.$$

   Arătaţi că $\mathbb{R}_i^{\mathbb{R}}, \mathbb{R}_p^{\mathbb{R}} \leq {}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$ şi că $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_i^{\mathbb{R}} + \mathbb{R}_p^{\mathbb{R}}$.

8. Fie

$$S = \{aI_2 \mid a \in \mathbb{C}\}$$

$$T = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid TrA = 0\}.$$

   Arătaţi că $S, T \leq {}_{\mathbb{C}}M_2(\mathbb{C})$ şi că $M_2(\mathbb{C}) = S + T$.