SEMINARUL 4

Spaţii vectoriale

1. Fie K un corp comutativ şi $n \in \mathbb{N}^*$; notăm $K^n = K \times K \times \ldots \times K$ şi definim operaţiile $+\colon K^n \times K^n \to K^n$, $\cdot\colon K \times K^n \to K^n$; $\forall a = (a_1, \ldots a_n), b = (b_1, \ldots b_n) \in K^n, \forall \alpha \in K$:

$$a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$
$$\alpha \cdot a = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n).$$

Arătaţi că faţă de aceste operaţii K^n este un K - spaţiu vectorial.

2. Considerăm mulţimea $\mathbb{R}_+^* = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$. Arătaţi că $\mathbb{R}_+^*$ este spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$ în raport cu operaţiile :

$$x \oplus y = x \cdot y$$
$$\alpha \odot x = x^\alpha,$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

3. Pe mulţimea $\mathbb{R}^3$ definim operaţiile (1) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, (2) $\alpha x = (\alpha x_1, 0, \alpha x_3)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^3$, (3) $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, x_3)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^3$. Formează $\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$ - spaţiu vectorial faţă de operaţiile (1) şi (2)? Dar faţă de (1) şi (3)?

4. Fie K un corp şi fie A o mulţime. Pe mulţimea $K^A = \{f \mid f\colon A \to M\}$ se definesc operaţiile $+\colon K^A \times K^A \to K^A$, $\forall f, g \in K^A$: $f + g\colon A \to K$, $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ şi $\cdot\colon K \times K^A \to K^A$, $\forall \alpha \in K$, $\forall f \in K^A$: $\alpha f\colon A \to K$, $(\alpha f)(a) = \alpha f(a)$.

   Arătaţi că faţă de aceste operaţii K^A este un K - spaţiu vectorial.

5. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ, $K' \leq K$. Arătaţi că:

   a) K este un K'- spaţiu vectorial faţă de adunarea din K şi faţă de restricţia înmulţirii din K, $\cdot\colon K' \times K \to K$.

   b) Orice K - spaţiu vectorial este un K' - spaţiu vectorial faţă de restricţiile înmulţirii cu scalari.

6. Fie V un K - spaţiu vectorial, $\alpha \in K$ şi $v \in V$. Arătaţi că :

   a) $\alpha 0 = 0v = 0$;

   b) $\alpha(-x) = (-\alpha)x = -\alpha x$;

   c) dacă $\alpha \neq 0$ şi $x \neq 0$, atunci $\alpha x \neq 0$.

7. Fie p un număr prim, V un spaţiu vectorial peste $\mathbb{Z}_p$.

   a) Arăţi că $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{p-\text{ori}} = 0$, $\forall x \in V$.

   b) Poate fi înzestrat $(\mathbb{Z}, +)$ cu o structură de $\mathbb{Z}_p$ - spaţiu vectorial?

8. Verificaţi dacă operaţiile

$$\oplus\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \oplus y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$$
$$\odot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \alpha \odot x = \sqrt[5]{\alpha} \cdot x$$

determină pe $\mathbb{R}$ o structură de $\mathbb{R}$ - spaţiu vectorial.