SEMINARUL 3

Relaţii de echivalenţă, mulţime factor, morfisme, inele şi corpuri

1. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $\rho = (A, A, R)$.

    a) $R = \Delta_A \cup \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (2, 1)\}$;

    b) $R = \Delta_A \cup \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 1)\}$;

    c) $R = \Delta_A \cup \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1)\}$;

    d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (2, 1)\}$;

    Verificaţi $(r), (t), (s)$ şi dacă ρ este relaţie de echivalenţă determinaţi mulţimea factor indusă.

2. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\pi \subseteq P(A)$.

    a) $\pi = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$; b) $\pi = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$; c) $\pi = \{\{1\}, \{3, 4\}\}$; d) $\pi = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$;

    Verificaţi dacă π este partiţie pentru A şi în caz afirmativ determinaţi relaţia de echivalenţă indusă.

3. Fie $g\colon \mathbb{C}^* \to GL_2(\mathbb{R})$, $g(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Arătaţi că g este morfism de grupuri între $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ şi $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$.

4. Considerăm inelul claselor de resturi modulo n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) şi fie $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$.

    a) $\hat{a}$ inversabil $\Leftrightarrow (a, n) = 1$;

    b) Deduceţi: $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este corp $\Leftrightarrow n$ este număr prim;

5. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_6$:

    $\hat{4}x + \hat{5} = \hat{1}$; $\hat{5}x + \hat{3} = \hat{1}$.

6. Fie $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

    a) Arătaţi că $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \leq (\mathbb{R}, +, \cdot)$. Este $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ corp ?

    b) Arătaţi că $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ este corp.

7. a) Arătaţi că $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea şi în raport cu înmulţirea matricelor şi că R este domeniu de integritate în raport cu operaţia indusă.

    b) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \simeq R$

8. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

    a) Determinaţi $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, $\sigma^{-1}, \tau^{-1}, \tau^3$;

    b) Determinaţi $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi $< \sigma >$;

    c) $\varepsilon(\sigma)$, $\varepsilon(\tau)$.