SEMINARUL 2
Grupuri

1. Fie $(M, \cdot)$ monoid şi $U(M)$ mulţimea elementelor inversabile ale lui $M$. Arătaţi că $U(M)$ este o parte stabilă a lui $(M, \cdot)$ şi $U(M)$ formează în raport cu operaţia indusă un grup, numit grupul elementelor inversabile.

2. Determinaţi grupul elementelor inversabile ala monoizilor:

   a) $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{R}, \cdot), (\mathbb{C}, \cdot)$
   b) $(M^M, \circ)$, $M$ mulţime
   c) $(\mathbb{Z}[i], \cdot)$, unde $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
   d) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot)$
   e) $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$

3. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte operaţia $*$ astfel:

   $$x * y = xy + 2ax + by, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

   Să determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca $(\mathbb{R}, *)$ să fie un semigrup comutativ.

4. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Dacă pentru orice $x, y \in G$ există un numar întreg $k$ astfel ca:

   $$(x \cdot y)^i = x^i \cdot y^i, \text{ pentru } i = k - 1, k, k + 1,$$

   atunci $G$ este comutativ.

5. Fie $(S, \cdot)$ un semigrup având proprietaţile:

   a) există $e \in S$ astfel încât $e \cdot a = a$, $\forall a \in S$,
   b) $\forall a \in S$, $\exists a' \in S$ astfel încât $a' \cdot a = e$.

   Să se arate că $(S, \cdot)$ este grup.

6. Fie "$*$" operaţia definită pe $\mathbb{R}$ de $x * y = xy - 5x - 5y + 30$;

   a) Este $(\mathbb{R}, *)$ grup?
   b) Dar $(\mathbb{R} \setminus \{5\}, *)$
   c) $((5, \infty), *)$?
   d) $((-\infty, 5), *)$?

7. Determinaţi ordinul elementelor

   $$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

   în $(GL_2(\mathbb{C}), \cdot)$.