

SEMIARUL 11
Valori și vectori proprii.

1. (a) Să se determine valorile și vectorii proprii ai matricilor:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Să se verifice că λ este valoare proprie a matricei

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

și să se determine subspațiul caracteristic corespunzător.

- (c) Să se determine valorile și vectorii proprii pentru endomorfismul

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, y, 0).$$

2. Fie $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ cu matricea asociată

$$[f] = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- (a) Să se determine valorile proprii reale și vectorii proprii corespunzători.
(b) Să se arate că $x = (2, 2, -2)$ este vector propriu și să se determine $f(x)$.

3. Se consideră aplicațiile \mathbb{R} - liniare $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $f_2: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$f_1(x, y, z) = (x, -y - x, y - x - z),$$

$$f_2(x, y, z, t) = (x + y + z + t, 2y - z - t, y + 2z + t, x + 3t).$$

Pentru ambele aplicații determinați valorile proprii, și pentru tot $\lambda \in \text{Spec}(f)$ să determine d_λ , m_λ și câte un sistem de generatori pentru V_λ .

4. Fie $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ cu matricea

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ -4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \text{ b) } \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ c) } \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Să se determine valorile și vectorii proprii corespunzători. Este f diagonalizabil?

5. Fie $f, g \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ cu matricile

$$[f] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Să se determine valorile și vectorii proprii.
(b) Să se diagonalizeze f și g .

6. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Să se determine valorile și vectorii proprii ai lui A .
- (b) Să se diagonalizeze matricea A .