SEMIARUL 10

Interpretări matriceale.

1. Fie aplicaţiile

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x, 2y),$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = (x + y, y - z, 2x + y + z).$$

Să se arate că $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ şi $y \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ şi să se scrie matricea lui f, respectiv g în baza canonică din $\mathbb{R}^2$, respectiv $\mathbb{R}^3$.

2. Fie e baza canonică din $\mathbb{R}^3$ şi $b = [b_1, b_2, b_3]$, $b_1 = (0, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 2)$, $b_3 = (1, 1, 1)$. Fie $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, $f(x, y, z) = (x + y, y - z, x + z)$.

Determinaţi $[f]_{b,e}$ şi $[f]_b$.

3. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (y, -x)$. Fie bazele $B = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ în $\mathbb{R}^3$ peste $\mathbb{R}$, $B' = ((1, 1), (1, -2))$ în $\mathbb{R}^2$ peste $\mathbb{R}$ şi U baza canonică din $\mathbb{R}^2$ peste $\mathbb{R}$. Să se scrie matricile $[f]_{BU}$ şi $[f]_{BB'}$.

4. Fie $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o aplicaţie liniară a cărei matrice în baza canonică este

$$[f]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $f(1, 2, 0, 1)$ şi să se determine $\mathrm{rang}(f)$, $\mathrm{def}(f)$, o bază pentru $\mathrm{Im}\, f$ şi pentru $\mathrm{Ker}\, f$.

5. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinaţi aplicaţia liniară $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a cărei matrice asociată în perechea de baze (a, b), $a = [a_1, a_2, a_3]$, $b = [b_1, b_2]$ este A. Unde $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (-1, 1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1)$, $b_1 = (1, 2)$, $b_2 = (2, 1)$.

6. Fie $B = ((1, 1, 0), (-1, 0, 0), (0, 0, 1))$ şi $B' = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ baze în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$. Să se determine matricea de trecere de la B la B'.

7. Fie $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x, 2x + y - 3z)$$

$$g(x, y, z) = (xy + z, x + y, x + z, y + z).$$

   a) Verificaţi dacă f, g sunt aplicaţii liniare;
   b) Calculaţi rang, def, o bază pentru Im şi pentru Ker;

c) Arătaţi că $a = [a_1, a_2, a_3]$, unde $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (2, 3, 4)$, $a_3 = (0, 0, 1)$ bază a lui $\mathbb{R}^3$ şi determinaţi $[f]_{a,e}$;

d) Calculaţi $f(3a_1 + 5a_2 - a_3)$.

8. În $\mathbb{R}^3$ considerăm bazele $a = [a_1, a_2, a_3]$, $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (3, 2, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0)$ şi $a^{'} = [a_1^{'}, a_2^{'}, a_3^{'}]$, $a_1^{'} = (1, 0, 1)$, $a_2^{'} = (0, 1, 1)$, $a_3^{'} = (1, 0, 0)$, iar în $\mathbb{R}^2$ bazele $e = [e_1, e_2]$ şi $b = [b_1, b_2]$, $b_1 = (1, 2)$, $b_2 = (3, 4)$. Fie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ o aplicaţie liniară. Ştiind că

$$[f]_{a,e} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determinaţi $[f]_{a',b}$.