5. SUBGRUPURI NORMALE. (27 MARTIE 2019)

## 5.1. **Relaţii de echivalenţă induse de un subgrup.**

**Propoziţia 5.1.** *Fie $G$ un grup şi $H \leq G$. Atunci relaţiile omogene $\rho_H$ şi $\rho'_H$ definite pe $G$ de*
(a) $x\rho_H y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$, *respectiv*
(b) $x\rho_H y \Leftrightarrow yx^{-1} \in H$
*sunt relaţii de echivalenţă.*

*Demonstraţie.*

□

*Definiţia* 5.2. a) Relaţia $\rho_H$ se numeşte *relaţia de echivalenţă la stânga* indusă de $H$.

b) Relaţia $\rho'_H$ se numeşte *relaţia de echivalenţă la dreapta* indusă de $H$.

*Notaţia* 5.3. Dacă $G$ este un grup, $H \leq G$ şi $x \in G$, atunci

$$xH = \{xh \mid h \in H\} \text{ şi } Hx = \{hx \mid h \in H\}.$$

*Observaţia* 5.4. a) Clasele de echivalenţă induse de $\rho_H$ au forma $xH = \{xh \in h \in H\}$ cu $x \in G$. Mulţimea factor indusă este

$$G/\rho_H = \{xH \mid x \in G\}.$$

b) Clasele de echivalenţă induse de $\rho'_H$ au forma $Hx = \{hx \in h \in H\}$ cu $x \in G$. Mulţimea factor indusă este

$$G/\rho'_H = \{Hx \mid x \in G\}.$$

c) Mulţimile factor $G/\rho_H$ şi $G\rho'_H$ sunt partiţii ale lui $G$.

*Definiţia* 5.5. Dacă $G$ este un grup, $H \leq G$ şi $x \in G$, atunci
a) clasa $xH$ se numeşte clasa de echivalenţă la stânga a lui $x$;
b) clasa $Hx$ se numeşte clasa de echivalenţă la dreapta a lui $x$.

*Exemplul* 5.6. Fie $G = D_4$ şi $H = \{1, s\}$.

**Teorema 5.7.** *Fie $G$ un grup şi $H \leq G$. Sunt adevărate afirmaţiile:*

(1) $|G/\rho_H| = |G/\rho'_H| \overset{not.}{=} |G : H|$;
(2) $|G| = |H| \cdot |G : H|$.

*Demonstraţie.*

$\square$

*Definiţia* 5.8. Numărul cardinal $|G : H|$ se numeşte *indicele lui $H$ în $G$*.

**Corolarul 5.9.** *Dacă $G$ este un grup finit şi $g \in G$, atunci* $\mathrm{ord}(g) \mid |G|$.

*Observaţia* 5.10. Teorema 5.7 poate fi generalizată astfel: *Dacă $G$ este un grup şi $H \leq K \leq G$, atunci*

$$|G : H| = |G : K| \cdot |K : H|.$$

---

5.2. **Subgrupuri normale.**

*Definiţia* 5.11. Fie $G$ un grup şi $N \leq G$. Spunem că $N$ este *normal* în $G$ dacă

$$\forall x \in G \text{ avem } xN = Nx.$$

*Notaţia* 5.12. Dacă $N$ este un subgrup normal al lui $G$, atunci notăm

$$N \trianglelefteq G.$$

**Propoziţia 5.13.** *Fie $G$ un grup şi $N \leq G$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(a) $N \trianglelefteq G$;
(b) $\forall x \in G, \forall h \in N$ *avem* $x^{-1}hx \in N$.

*Demonstraţie.*

□

*Exemplul* 5.14. 1) Dacă $G$ este un grup, atunci $\{1\}$ şi $G$ sunt subgrupuri normale (numite *triviale*).

2) Orice subgrup al unui grup abelian este normal.

3) In $D_4$ avem:

- $N = \{1, r^2\}$ este normal:

- $H = \{1, s\}$ nu este normal: $rH = \{r, rs\}$, $Hr = \{r, sr\}$, iar $rs \neq sr$.

**Propoziţia 5.15.** *Dacă $G$ este un grup şi $N$ este un subgrup al lui $G$ astfel încât $|G : N| = 2$, atunci $N$ este subgrup normal.*

*Demonstraţie.*

□

*Exemplul* 5.16. 1) In grupul cuaternionilor $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ subgrupurile $\langle i \rangle = \{\pm 1, \pm i\}$, $\langle j \rangle = \{\pm 1, \pm j\}$, $\langle k \rangle = \{\pm 1, \pm k\}$ sunt subgrupuri normale în $Q$.

2) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Atunci $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ este permutare pară}\}$ este un subgrup de indice 2 în $S_n$.

*Definiţia* 5.17. Spunem că un grup $G$ este *grup simplu* dacă el nu are subgrupuri normale netriviale.

**Propoziţia 5.18.** *Un grup abelian $G$ este simplu dacă şi numai dacă există $p \in \mathbb{N}$ un număr prim astfel încât $G \cong \mathbb{Z}_p$.*

*Demonstraţie.*

□

**Propoziţia 5.19.** *(C. Jordan, 1875)*
*Dacă $n \geq 5$, atunci grupul altern $A_n$ este simplu.*

*Exerţiul* 5.20. Demonstraţi că $A_4$ nu este simplu şi că $A_3$ este simplu.