6. Grupuri factor. Teoreme de izomorfism

6.1. **Grupuri factor.**

Notaţia 6.1. Dacă G este un grup şi $N \trianglelefteq G$, atunci notăm

$$G/N = G/\rho_N = G/\rho'_N = \{xN \mid x \in G\}.$$

Teorema 6.2. *Fie G un grup şi $H \trianglelefteq G$. Sunt adevărate afirmaţiile:*

(a) *Operaţia $\cdot$ definită pe mulţimea G/N de*

$$(xN) \cdot (yN) = (xy)N$$

este bine definită (nu depinde de alegerea reprezentaţilor).

(b) *$(G/N, \cdot)$ este un grup în care elementul neutru este $N = 1N$.*

(c) *Funcţia $p_N : G \to G/N$, $p_N(x) = xN$, este un morfism de grupuri surjectiv.*

(d) $\mathrm{Ker}(p_N) = N$.

Demonstraţie.

$\square$

Definiţia 6.3. Grupul $(G/N, \cdot)$ se numeşte *grupul factor* (*grupul cât*) al lui G modulo N.

Morfismul p_N se numeşte morfismul canonic indus de N.

Exemplul 6.4. a) $N = \{1, r^2\} \trianglelefteq D_4$.

b) Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$.

6.2. **Teoreme de izomorfism.**

Teorema 6.5. ***(Prima teoremă de izomorfism)***
Fie G şi K două grupuri. Dacă $f : G \to K$ este un morfism de grupuri, atunci:
(a) $\mathrm{Ker}(f) \trianglelefteq G$;
(b) *funcţia*

$$\overline{f} : G/\mathrm{Ker}(f) \to f(G),\ \overline{f}(x\mathrm{Ker}(f)) = f(x),$$

este bine definită şi este un izomorfism de grupuri.

Demonstraţie.

$\square$

Corolarul 6.6. *Dacă $f : G \to H$ este un morfism de grupuri, atunci f are descompunerea canonică descrisă în diagrama comutativă*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & H \\
G/\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "\overline{f}"'] & f(G), \arrow[u, hook, "i_{f(G)}"']
\end{tikzcd}$$

unde $i_{f(G)} : f(G) \to G$ este aplicaţia de incluziune: $\forall y \in f(G),\ i_{f(G)}(y) = y$.

Teorema 6.7. ***(A doua teoremă de izomorfism)*** *Fie G un grup, $H \le G$ şi $N \trianglelefteq G$. Atunci:*
(a) $HN = \{hn \mid h \in H,\ n \in N\}$ *este un subgrup al lui G;*
(b) $N \trianglelefteq HN$ *şi* $H \cap N \trianglelefteq H$;

(c) *există un izomorfism*

$$H/(H \cap N) \cong (HN)/N.$$

Demonstraţie.

$\square$

Teorema 6.8. ***(A treia teoremă de izomorfism)*** *Fie G un grup, $H \trianglelefteq G$ şi $N \trianglelefteq G$ astfel încât $N \subseteq H$. Atunci:*

(a) *$H/N = \{hN \mid h \in H\}$ este un subgrup normal în G/N;*

(b) *există un izomorfism*

$$\frac{(G/N)}{(H/N)} \cong \frac{G}{H}.$$

Demonstraţie.

$\square$

Teorema 6.9. ***(Teorema de corespondenţă)*** *Fie G un grup şi $N \trianglelefteq G$. Atunci*

(a) *pentru orice subgrup $K \leq G/N$ există* ***un unic*** *subgrup $H \leq G$ astfel încât*
   (i) *$N \leq H$ şi*
   (ii) *$H/N = K$;*

(b) *dacă* $N \leq H \leq G$, *atunci*

$$H/N \trianglelefteq G/N \Leftrightarrow H \trianglelefteq G.$$