1. Sisteme de ecuaţii liniare

Definiţia 1.1. Fie K un corp comutativ.

1) Prin *sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute $X_1, \dots, X_n$ şi coeficienţi în K* se înţelege un ansamblu de egalităţi formale

$$(S) \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}, \ a_{ij}, b_i \in K.$$

Dacă $b_1 = \cdots = b_n = 0$, atunci spunem că (S) este un *sistem omogen*.

2) Un vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ este *soluţie* pentru (S) dacă înlocuind necunoscutele sistemului cu componentele vectorului $X_i := x_i$ toate egalităţile ce se obţin sunt adevărate.

3) Sistemul (S) este *compatibil* dacă are cel puţin o soluţie şi este *incompatibil* dacă nu are soluţii. (S) este *compatibil determinat* dacă are exact o soluţie, iar dacă are cel puţin două suluţii, atunci spunem că este *compatibil nedeterminat*.

Definiţia 1.2. Fiind dat un sistem (S), matricea $A = (a_{ij})$ s.n. *matricea sitemului* (S). Matricea $A^e = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ s.n. *matricea extinsă* ataşată lui (S).

Observaţia 1.3. **(Forma matriceală)** Dacă $A = [a_{ij}]$ este matricea sistemului (S), atunci sistemul poate fi scris sub forma:

$$(S) \ AX^t = b^t,$$

unde $X = (X_1, \dots X_n)$ şi $b = (b_1, \dots, b_m)$.

Observaţia 1.4. **(Forma vectorială)** Dacă privim coloanele matricii A ca vectori coloană din K-spaţiul vectorial K^n, atunci sistemul poate fi pus sub forma:

$$(S) X_1 c_1^A + \cdots + X_n c_n^A = b^t.$$

Teorema 1.5. ***(Kroneker-Capelli)***

Sistemul de ecutaţii liniare (S) este compatibil dacă şi numai dacă $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^e)$.

Demonstraţie. $\Rightarrow$. Presupunem că sistemul (S) este compatibil. Există, deci, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ astfel încât

$$\alpha_1 c_1^A + \cdots + \alpha_n c_n^A = b^t$$

Dar, de aici, rezultă că $b^t \in \langle c_1^A, \ldots, c_n^A \rangle$, adică

$$\begin{aligned}\langle c_1^A, \ldots, c_n^A \rangle &= \langle c_1^A, \ldots, c_n^A, b^t \rangle\\ \Rightarrow \operatorname{rang}[c_1^A, \ldots, c_n^A] &= \operatorname{rang}[c_1^A, \ldots, c_n^A, b^t]\\ \Rightarrow \operatorname{rang}(A) &= \operatorname{rang}(A^e).\end{aligned}$$

$\Leftarrow$. Presupunem acum că $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^e)$, adică

$$\operatorname{rang}[c_1^A, \ldots, c_n^A] = \operatorname{rang}[c_1^A, \ldots, c_n^A, b^t].$$

Conform definiţiei rangului unui sistem de vectori, avem

$$\dim_K \langle c_1^A, \ldots, c_n^A \rangle = \dim_K \langle c_1^A, \ldots, c_n^A, b^t \rangle,$$

iar ţinând cont de faptul că $\langle c_1^A, \ldots, c_n^A \rangle$ este un subspaţiu a lui $\langle c_1^A, \ldots, c_n^A, b^t \rangle$, deducem că

$$\langle c_1^A, \ldots, c_n^A \rangle = \langle c_1^A, \ldots, c_n^A, b^t \rangle.$$

Vectorul $b^t \in \langle c_1^A, \ldots, c_n^A \rangle$, există deci $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ astfel încât

$$\alpha_1 c_1^A + \cdots + \alpha_n c_n^A = b^t,$$

adică, sistemul (S) este compatibil.

$\square$

Observaţia 1.6. Criteriul lui Rouché, studiat în liceu este o consecinţă a teoremei Kroneker-Capelli.

Teorema 1.7. *Soluţiile unui sistem omogen (S) cu n necunoscute formează un subspaţiu al K-spaţiului vectorial K^n, de dimensiune $n - \operatorname{rang}(A)$.*

Demonstraţie. Fie (S) un sistem cu m ecuaţii şi n necunoscute, cu forma matriceala

$$A \cdot X^t = 0^t.$$

Trecând la transpuse, în identitatea matriceală anterioară, obţinem

$$(X_1, \ldots, X_n) A^t = (0, \ldots, 0).$$

Considerăm aplicaţia liniară $f_A : K^n \to K^m$, cu $[f_A]_{\mathbf{bb'}} = A^t$, unde $\mathbf{e}$ este baza canonică lui K^n, iar $\mathbf{e'}$ este baza canonică lui K^m. Dacă $(X_1, \ldots, X_n) \in K^n$, avem

$$f_A(X_1, \ldots, X_n) = (X_1, \ldots, X_n)[f_A]_{\mathbf{ee'}} \mathbf{e'}^t = (X_1, \ldots, X_n) A^t \mathbf{e'}^t.$$

Deducem că $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ este soluţie a sistemului (S), dacă, şi numai dacă, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \operatorname{Ker}(f_A)$. Mulţimea soluţiilor sistemului (S) coincide deci cu $\operatorname{Ker}(f_A)$. Dar $\operatorname{Ker}(f_A)$ este subspaţiu a lui K^n, de dimensiune

$$\operatorname{def}(f_A) = n - \operatorname{rang}(f_A) = n - \operatorname{rang}(A^t) = n - \operatorname{rang}(A).$$

□

Corolarul 1.8. *Un sistem omogen* (S) *are doar soluţia banală* $(0,\ldots,0)$ *dacă şi numai dacă* $n = \mathrm{rang}(A)$.

Observaţia 1.9. Din demonstraţia teoremei se deduce că subspaţiul soluţiilor unui sistem omogen coincide cu nucleul aplicaţiei liniare $f : K^n \to K^m$ cu $[f]_{\mathbf{ee}'} = A^t$, unde $\mathbf{e}$ şi $\mathbf{e}'$ sunt bazele canonice. Prin urmare, pentru determinarea solţiilor unui sistem omogen se pot aplica metodele prezentate pentru determinarea nucleelor de aplicaţii liniare.

Teorema 1.10. *Fie* (S) $AX^t = b^t$ *un sistem de ecuaţii liniare şi* (S_0) *sistemul omogen* $AX^t = 0$ *(obţinut prin înlocuirea coloanei* b *cu 0). Dacă* x_0 *este o soluţie particulară a lui* (S) *şi* $\mathcal{S}_0$ *este mulţimea soluţiilor lui* (S_0)*, atunci mulţimea soluţiilor sistemului* (S) *este*

$$\mathcal{S} = x_0 + \mathcal{S}_0 = \{x_0 + y \mid y \in S_0\}.$$

Demonstraţie. Fie (S) un sistem de m ecuaţii, cu n necunsocute. Considerăm aplicaţia liniară $f_A : K^n \to K^m$ cu $[f_A]_{\mathbf{ee}'} = A^t$, unde $A \in M_{m,n}(K)$ este matricea sistemului (S). Am notat cu $\mathbf{e}$ şi $\mathbf{e}'$ baza canonică din K^n, respectiv K^m.

Dacă $x = (x_1,\ldots,x_n) \in K^n$, avem

$$f_A(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n)A^t \in K^m.$$

Vectorul x este o soluţie a lui (S) dacă şi numai dacă

$$Ax^t = b^t \Leftrightarrow xA^t = b \Leftrightarrow f(x) = b.$$

Deci, x_0, fiind o soluţie pariculară a lui (S) avem $f(x_0) = b$ şi

$$x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x - x_0) = 0.$$

Un vector $y \in K^n$ este soluţie a sistemului (S_0), dacă şi numai dacă $f(y) = 0$, deci

$$\begin{aligned} f(x - x_0) = 0 &\Leftrightarrow x - x_0 \in \mathcal{S}_0 \Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{S}_0 \text{ a.i. } x - x_0 = y \\ &\Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{S}_0 \text{ a.i. } x = x_0 + y \Leftrightarrow x \in x_0 + \mathcal{S}_0. \end{aligned}$$

□

2. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

Teorema 2.1. ***(Regula lui Cramer)*** *Un sistem* (S) $AX^t = b^t$ *cu* n *ecuaţii şi* n *necunoscute (adică* $A \in \mathcal{M}_n(K)$*) este compatibil determinat dacă şi numai dacă* $\det(A) \neq 0$*. În aceste condiţii soluţia este* $x = (x_1,\ldots,x_n)$ *cu*

$$x_i = (\det(A))^{-1} \det[c_1^A,\ldots,c_{i-1}^A, b^t, c_{i+1}^A,\ldots,c_n^A],\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Demonstraţie. $\Rightarrow$. Presupunem că sistemul (S) este compatibl determinat. Mulţimea soluţiilor lui (S), $\mathcal{S}$, are deci un singur element. Conform Teoremei 1.10 avem

$$\mathcal{S} = x_0 + \mathcal{S}_0 = \{x_0 + y \mid y \in S_0\}.$$

În consecinţă, mulţimea $\mathcal{S}_0$ nu poate avea decât un singur element. Dar, $\mathcal{S}_0$ fiind un K-subspaţiu a lui K^n, nu poate fi egal decât cu $\{0\}$. Conform Corolarului 1.8, $\text{rang}(A) = n$, deci $\det(A) \neq 0$.

$\Leftarrow$. Presupunem că $\det(A) \neq 0$. Sistemul omogen ataşat, (S_0), are deci doar soluţia banală, adică $\mathcal{S}_0 = \{0\}$. Conform Teoremei 1.10, mulţimea $\mathcal{S}$ are cel mult un elemet. Nu ne rămâne să demonstrăm, decât existenţa unei soluţii particulare a sistemului (S).

Considerăm scalarii $x_i \in K$, definiţi astfel

$$x_i = (\det(A))^{-1} \det[c_1^A, \dots, c_{i-1}^A, b^t, c_{i+1}^A, \dots, c_n^A],\ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Pentru a ajunge la concluzia că $x_0 = (x_1, \dots, x_n)$ este o soluţie a lui (S) e suficient să arătăm că

$$Ax_0^t = b^t \Leftrightarrow x_0^t = A^{-1}b^t \Leftrightarrow x_0^t = (\det(A))^{-1}A^*b^t,$$

unde A^* este adjuncta matricii A. Avem deci

$$Ax_0^t = b^t \Leftrightarrow x_i = (\det(A)^{-1}(\Gamma_{1i}\Gamma_{2i}\dots\Gamma_{ni})\cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = (\det(A))^{-1}\sum_{j=1}^n b_j\Gamma_{ji},$$

unde Γ_{ji} sunt complemenţii algebrici corespunzători. Dar, $\sum_{j=1}^n b_j\Gamma_{ji}$ nu reprezintă altceva decât dezvoltarea după coloana a i-a a determinantului

$$\det[c_1^A, \dots, c_{i-1}^A, b^t, c_{i+1}^A, \dots, c_n^A]\ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Aşadar, x_0 reprezintă unica soluţie a sistemului (S). □

Metode de rezolvare
I. Metoda lui Cramer

Example 2.2. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Calculând determinantul matricii sistemului

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -5,$$

deducem că sistemul este compatibil determinat. Pentru a obţine soluţia calculăm determinaţii.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -10,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

d_i este determinantul matricii obţinute din A prin înlocuirea coloanei a i-a cu coloana termenilor liberi. Componenetele soluţiei sunt

$$x_1 = \frac{d_1}{\det(A)} = \frac{-5}{-5} = 1,$$

$$x_2 = \frac{d_2}{\det(A)} = \frac{-10}{-5} = 2,$$

$$x_3 = \frac{d_3}{\det(A)} = \frac{-15}{-5} = 3.$$

II. Folosind lema substituţiei

Observaţia 2.3. Este suficient să găsim o bază pentru spaţiul soluţiilor sistemului omogen (numit *sistem fundamental de soluţii*) şi o soluţie particulară.

Considerăm sistemul

$$(S) \quad Ax^t = b^t,$$

cu m ecuaţii şi n necunoscute.

Aplicăm lema substituţiei pentru a calcula rang(A), adică rangul sistemului de vectori $[c_1^A, \ldots, c_n]$, format din coloanele lui A. Tabelul ini ţial va arăta astfel

$$\begin{array}{c|cccc|c} & c_1^A & c_2^A & \ldots & c_n^A & b^t \\ \hline e_1 & & & & & b_1 \\ e_2 & & & A & & b_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ e_m & & & & & b_m \end{array}$$

Presupunem că după un număr de r paşi ajungem la următoarea situaţie

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & c_1^A & \cdots & c_r^A & c_{r+1}^A & \cdots & c_n^A & b^t \\
\hline
c_1^A & 1 & \cdots & 0 & \beta_{1,r+1} & \cdots & \beta_{1,n} & b'_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
c_r^A & 0 & \cdots & 1 & \beta_{r,r+1} & \cdots & \beta_{r,n} & b'_r \\
c_{r+1}^A & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
c_m^A & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m
\end{array}$$

Observăm că $\mathrm{rang}(A) = r$. Ca sistemul (S) să fie compatibil rangul matricii extinse, A^e, trebuie să fie tot r. Această condiţie este echivalentă cu

$$b'_{r+1} = \cdots = b'_m = 0.$$

În aceste condiţii avem

$$b^t = b'_1 \cdot c_1^A + \cdots + b'_r \cdot c_r^A + 0 \cdot c_{r+1}^A + \cdots + 0 \cdot c_n^A,$$

adică $x_0 = (b'_1, \ldots, b'_r, 0, \ldots, 0)$ este o soluţie particulară a sistemului (S).

Dimensiunea subspaţiului soluţiilor sistemului omogen ataşat, $\mathcal{S}_0$ este $n - \mathrm{rang}(A)$, adică $n - r$. Pentru a determina o bază a lui $\mathcal{S}_0$ este suficient să găsim $n - r$ vectori liniari independenţi. Din ultimul tabel avem

$$\begin{cases} c_{r+1}^A = \beta_{1,r+1} \cdot c_1^A + \cdots + \beta_{r,r+1} \cdot c_r^A \\ \cdots \\ c_n^A = \beta_{1,n} \cdot c_1^A + \cdots + \beta_{r,n} \cdot c_r^A \end{cases},$$

adică

$$\begin{cases} \beta_{1,r+1} \cdot c_1^A + \cdots + \beta_{r,r+1} \cdot c_r^A + (-1) \cdot c_{r+1}^A + 0 \cdot c_{r+2}^A + \cdots + 0 \cdot c_n^A = 0 \\ \cdots \\ \beta_{1,n} \cdot c_1^A + \cdots + \beta_{r,n} \cdot c_r^A + 0 \cdot c_{r+1}^A + 0 \cdot c_{r+2}^A + \cdots + (-1) \cdot c_n^A = 0 \end{cases}.$$

Obţinem astfel următoarele soluţii ale sistemului omogen

$$\begin{cases} y_1 = (\beta_{1,r+1}, \ldots, \beta_{r,r+1}, -1, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{S}_0 \\ \cdots \\ y_{n-r} = (\beta_{1,n}, \ldots, \beta_{r,n}, 0, 0, \ldots, -1) \in \mathcal{S}_0 \end{cases}.$$

Vectorii $y_1, \ldots, y_{n-r}$, fiind liniari independenţi, formează o bază în $\mathcal{S}_0$. Cunoscând soluţia particulară x_0 şi o bază a lui $\mathcal{S}_0$ putem determina soluţiile lui (S).

EXAMPLE 2.4. a) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 4x_5 = -3 \end{cases}$$

Folosind lema substituţiei avem tabelul

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	c_5^A	b^t
e_1	$\boxed{1}$	-1	2	1	3	2
e_2	1	-1	1	1	1	1
e_3	-3	2	1	-4	4	-3
c_1^A	1	-1	2	1	3	2
e_2	0	0	$\boxed{-1}$	0	-2	-1
e_3	0	-1	7	-1	13	3
c_1^A	1	-1	0	1	-1	0
c_3^A	0	0	1	0	2	1
e_3	0	$\boxed{-1}$	0	-1	-1	-4
c_1^A	1	0	0	2	0	4
c_3^A	0	0	1	0	2	1
c_2^A	0	1	0	1	1	4

.

Observăm că $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e) = 3$, deci sistemul este compatibil. Coloana termeilor liberi se poate exprima astfel

$$b^t = 4c_1^A + 1c_3^A + 4c_2^A = 4c_1^A + 4c_2^A + 1c_3^A + 0c_4^A + 0c_5^A,$$

de unde deducem că $x_0 = (4, 1, 1, 0, 0)$ este o soluţie a lui (S).

Conform ultimului tabel avem

$$\begin{cases} c_4^A = 2c_1^A + c_2^A \\ c_5 = 2c_3^A + c_2^A, \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} 2c_1^A + c_2^A + 0c_3^A + (-1)c_4^a + 0c_5^A = 0 \\ 0c_1^A + c_2^A + 2c_3^A + 0c_4^a + (-1)c_5^A = 0. \end{cases}$$

Obţinem astfel următoarele soluţii ale sistemului omogen ataşat

$$\begin{cases} y_1 = (2, 1, 0, -1, 0) \in \mathcal{S}_0 \\ y_2 = (0, 1, 2, 0, -1) \in \mathcal{S}_0. \end{cases}$$

Ştim că $dim_{\mathbb{R}}\mathcal{S}_0 = 5 - \text{rang}(A) = 5 - 3 = 2$. Vectorii y_1, y_2, fiind liniar independenţi, formează o bază în $\mathcal{S}_0$. Aşadar

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \langle y_1, y_2 \rangle = \{\alpha y_1 + \beta y_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2\alpha, \alpha + \beta, 2\beta, -\alpha, -\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

de unde deducem că multimea soluţiilor sistemului (S) este

$$\mathcal{S} = x_0 + \mathcal{S}_0 = \{(4+2\alpha, 4+\alpha+\beta, 1+2\beta, -\alpha, -\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

b) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3 \end{cases}$$

Folosind lema substituţiei avem tabelul

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	c_5^A	b^t
e_1	$\boxed{1}$	-1	2	1	3	2
e_2	1	-1	1	1	1	1
e_3	2	-2	3	3	4	3
c_1^A	1	-1	2	1	3	2
e_2	0	0	$\boxed{-1}$	0	-2	-1
e_3	0	0	-1	0	-3	-7
c_1^A	1	-1	0	1	-1	0
c_3^A	0	0	1	0	2	1
e_3	0	0	0	0	0	-6

Sistemul este incompatibil pentru că $\operatorname{rang}(A) = 2 \neq 3 = \operatorname{rang}(A^e)$.

III. Metoda lui Gauss

Definiţia 2.5. Spunem că două sisteme de ecuaţii liniare sunt *echivalente* dacă ambele sunt compatbile şi au aceleaşi soluţii sau dacă ambele sunt incompatibile.

Teorema 2.6. *Dacă sistemele (S) şi (S') au matricile extinse echivalente pe linii, atunci ele sunt echivalente.*

Metoda lui Gauss constă în aducerea matricii extinse la o fomă eşalon şi rezolvarea sistemului care are ca matrice extinsă matricea eşalon obţinută.

Example 2.7. a) Să se rezolve folosind metoda lui Gauss sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 4x_5 = -3 \end{cases}$$

Aducem matricea extinsă a asistemului la o matrice eşalon

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -4 & 4 & -3 \end{array}\right] \overset{\substack{l_2=l_2-l_1 \\ l_3=l_3+3l_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & -1 & 13 & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{l_2=l_3}{\underset{l_3=-l_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -1 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ -x_2 + 7x_3 - x_4 + 13x_5 = 3 \\ x_3 \ + 2x_5 = 1, \end{cases}$$

echivalent cu cel iniţial, iar rezolvându-l obţinem

$$\mathcal{S} = \{(4 - 2\alpha, 4 - \alpha - \beta, 1 - 2\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

b) Să se rezolve folosind metoda lui Gauss sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3 \end{cases}$$

Aducem matricea extinsă a sistemului la o matrice eşalon

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & 4 & -3 \end{array}\right] \overset{l_2=l_2-l_1}{\underset{l_3=l_3-2l_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -7 \end{array}\right]$$

$$\overset{l_3-l_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right].$$

Observăm că $\operatorname{rang}(A) = 2 \neq 3 = \operatorname{rang}(A^e)$, deci sistemul este incompatibil.

c) Să se rezolve folosind metoda lui Gauss sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 4y + 10z = 3 \\ 2x + 3y + 5z = 1. \end{cases}$$

Aducând matricea extinsă a sistemului la o matrice eşalon

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right] \overset{l_2=l_2-l_1}{\underset{l_3=l_3-2l_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{l_3=l_3-l_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

observăm că $\operatorname{rang}(A) = 2 = \operatorname{rang}(A^e)$. Sistemul este deci compatibil nedeterminat. Sistemul echivalent este

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 1, \end{cases}$$

iar rezolvându-l obţinem

$$\mathcal{S} = \{(2\alpha - 1, 1 - 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Metoda lui Gauss-Jordan se bazează pa acelaşi principiu ca şi metda lui Gauss, cu diferenţa că se aduce matricea la o formă care este diagonală pe primele n coloane (corespunzătoare matricii sistemlui).

EXAMPLE 2.8. a) Considerând sistemul din Exemplul 2.7 a), am văzut că

$$A^e \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -1 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Aplicând succesiv transformări elementare pe linii avem

$$A^e \overset{\substack{l_2=l_2-7l_3 \\ l_1=l_1-2l_3}}{\sim} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{l_1=l_1-l_2 \\ l_2=-l_2}}{\sim} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 4 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_3 + 2x_5 = 1, \end{cases}$$

echivalent cu cel iniţial.

EXAMPLE 2.9. Să se rezolve cu toate metodele studiate sistemele:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 14 \end{cases}$

a) I. Folosind lema substituţiei avem tabelul

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	b^t
e_1	3	4	$\boxed{1}$	2	3
e_2	6	8	2	5	6
e_3	9	12	3	10	13
c_3	3	4	1	2	3
e_2	0	0	0	$\boxed{1}$	1
e_3	0	0	0	4	4
c_3	3	4	1	0	1
c_4	0	0	0	1	1
e_3	0	0	0	0	0

Observăm că $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e) = 2$, deci sistemul este compatibil. Coloana termeilor liberi se poate exprima astfel

$$b^t = c_3^A + c_4^A = 0c_1^A + 0c_2^A + 1c_3^A + 1c_4^A,$$

de unde deducem că $x_0 = (0, 0, 1, 1)$ este o soluţie a sistemului.

Conform ultimului tabel avem

$$\begin{cases} c_1^A = 3c_3^A \\ c_2 = 4c_3^A, \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} c_1^A - 3c_3^A = 0 \\ c_2 - 4c_3^A = 0, \end{cases}$$

Obţinem astfel următoarele soluţii ale sistemului omogen ataşat

$$\begin{cases} y_1 = (1, 0, -3, 0) \in \mathcal{S}_0 \\ y_2 = (0, 1, -4, 0) \in \mathcal{S}_0. \end{cases}$$

Ştim că $dim_{\mathbb{R}}\mathcal{S}_0 = 4 - \text{rang}(A) = 4 - 2 = 2$. Vectorii y_1, y_2, fiind liniar independenţi, formează o bază în $\mathcal{S}_0$. Aşadar

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \langle y_1, y_2 \rangle = \{\alpha y_1 + \beta y_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha, \beta, -3\alpha - 4\beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

de unde deducem că multimea soluţiilor sistemului (S) este

$$\mathcal{S} = x_0 + \mathcal{S}_0 = \{(\alpha, \beta, 1 - 3\alpha - 4\beta, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

II. Aplicăm metoda Gauss şi aducem matricea extinsă a sistemului la o matrice eşalon astfel

$$A^e \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right] \overset{\substack{l_2 = l_2 - 2l_1 \\ l_3 = l_3 - 3l_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\overset{l_3 = l_3 - 4l_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Observăm că $\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A^e)$. Sistemul este deci compatibil nedeterminat. Sistemul echivalent este

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_2 = 3 \\ x_4 = 1, \end{cases}$$

iar rezolvându-l obţinem

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \\ x_2 = \beta, \\ x_3 = 1 - 3\alpha - 4\beta \\ x_4 = 1, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

III. Putem aplica şi metoda Gauss-Jordan. Avem

$$A^e \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{l_1 = l_1 - 2l_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Sistemul obţinut astfel este

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_4 = 1, \end{cases}$$

iar rezolvându-l ajungem la aceeaşi soluţie.

b) Folosind lema substituţiei avem tabelul

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	b^t
e_1	3	4	$\boxed{1}$	2	3
e_2	6	8	2	5	6
e_3	9	12	3	10	14
c_3	3	4	1	2	3
e_2	0	0	0	$\boxed{1}$	1
e_3	0	0	0	4	5
c_3	3	4	1	0	1
c_4	0	0	0	1	1
e_3	0	0	0	0	1

Sistemul este incompatibil pentru că $\text{rang}(A) = 2 \neq 3 = \text{rang}(A^e)$.

II. Aplicăm metoda Gauss şi aducem matricea extinsă a sistemului la o matrice eşalon astfel

$$A^e \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 14 \end{array}\right] \overset{\substack{l_2 = l_2 - 2l_1 \\ l_3 = l_3 - 3l_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

$$\overset{l_3 = l_3 - 4l_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Observăm că $\mathrm{rang}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{rang}(A^e)$. Ajungem la aceeaşi concluzie.