Matrici şi sisteme de ecuaţii liniare

1. Matrici şi determinanţi

Reamintim aici câteva proprietăţi ale matricilor şi determinanţilor.

Definiţia 1.1. Fie K un corp (comutativ) şi $m, n \in \mathbb{N}^*$. O funcţie

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to K$$

s.n. *matrice* cu m linii, n coloane (sau de *tip* (m, n)) şi coeficienţi în K.

Notaţia 1.2. 1. Notăm cu $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ mulţimea matricilor cu m linii, n coloane şi coeficienţi în K. Dacă $m = n$, atunci notăm $\mathcal{M}_n(K)$ şi numim elementele acestei mulţimi *matrici pătratice*.

2. Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, atunci se notează de obicei $A(i, j) = a_{ij}$, iar matricea A este privită ca un tablou

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{1\le i\le m;1\le j\le n} = [a_{ij}]$$

Observaţia 1.3. Orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ poate fi privită ca:

- o coloană cu m vectori (linie) din K^n: $A = \begin{bmatrix} l_1^A \\ \vdots \\ l_m^A \end{bmatrix}$, unde $l_i^A = (a_{i1}, \dots, a_{in})$;
- o linie cu n vectori coloană din K^m: $A = [c_1^A, \dots, c_n^A]$, unde $c_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^t$.

Definiţia 1.4. 1) Dacă $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ şi $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(K)$, atunci *adunarea matricilor* A şi B este dată de $A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(K)$.

2) Dacă $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ şi $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$, atunci *înmulţirea matricilor matricilor* A şi B este dată de $AB = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{mp}(K)$, unde $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$.

3) Dacă $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ $\alpha \in K$, atunci *înmulţirea matricii A cu scalarul α* este dată de $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$.

Observaţia 1.5. Au loc următoarele proprietăţi:

- $(\mathcal{M}_{mn}(K), +)$ este un grup abelian;
- Înmulţirea matricilor
  - este asociativă (când poate fi efectuată)
  - nu este comutativă!
- $(\mathcal{M}_n(K), +, \cdot)$ este un inel cu unitate. Unitatea inelului este:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{ij}],$$

  cu $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \delta_{ii} = 1$ şi $\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ i \neq j,\ \delta_{ij} = 0$.
- $(AB)^t = B^t A^t$, unde $A^t = [a_{ji}]$ notează *transpusa* matricii $A = [a_{ij}]$.

Definiţia 1.6. Dacă $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$, atunci numărul

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

s.n. *determinantul* lui A.

Example 1.7. $n = 2$

Propoziţia 1.8. ***Proprietăţi ale determinanţilor-sinteză)***
1) $\det(A) = \det(A^t)$*;*
2) Dacă o linie (coloană) a matricii A este 0, atunci $\det(A) = 0$*;*
3) Dacă $\sigma \in S_n$*, atunci* $\det[a_{\sigma(i)j}] = \det[a_{i\sigma(j)}] = \epsilon(\sigma) \det[a_{ij}]$*;*
4) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *şi* A' *este obţinută din A prin permutarea a două linii (coloane), atunci* $\det(A) = -\det(A')$*;*
5) Dacă în matricea A două linii (coloane) sunt egale, atunci $\det(A) = 0$.
6) Dacă $A = [a_{ij}]$ *şi pentru un indice k,* $\forall j \in \{1, \dots, n\},\ a_{kj} = a'_{kj} + a''_{kj}$*, atunci* $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$*, unde* $A' = [a'_{ij}]$ *şi* $A'' = [a''_{ij}]$ *cu* $a''_{ij} = a_{ij}$ *pentru* $i \neq k$*;*
7) Dacă o linie (coloană) a matricii A este o combinaţie liniară de celelalte linii (coloane), atunci $\det(A) = 0$.
8) Valoarea determinantului nu se modifică dacă adăugăm la o linie (coloană) o combinaţie liniară de celelalate linii (coloane).

9) Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ *şi* $\alpha \in K$*, atunci* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ *şi* $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$*. Dacă* A' *este obţinută din* A *prin înmulţirea unei linii (coloane) cu* α*, atunci* $\det(A') = \alpha \det(A)$*.*

10) ***(complemenţi algebrici)*** *Dacă* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$ *şi* A_{ik} *reprezintă matricea obţinută din* A *prin scoaterea liniei* i *şi coloanei* k*, atunci*

$$\Gamma_{ik} = (-1)^{i+k} \det(A_{ik})$$

s.n. complemenul algebric ataşat coeficietului a_{ik}*. Au loc egalităţile:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\Gamma_{ik}$$

(dezvoltarea determinantului după coloana k*);*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij}$$

(dezvoltarea determinantului după linia i*).*

2. Rangul unei matrici

Definiţia 2.1. Dacă $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(K)$, $p, q \in \mathbb{N}^*$ şi

$$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le m;\ 1 \le j_1 < \ldots j_q \le n$$

sunt două şiruri strict crescătoare de numere naturale, atunci matricea

$$[a_{i_l j_k}] = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_q} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_q} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i_p j_1} & a_{i_p j_2} & \ldots & a_{i_p j_q} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{pq}(K)$$

s.n. *submatrice* (de tip (p, q)) a matricii A.

Un determinant al unei submatrici de tip (p, p) s.n. *minor* de grad p.

Observaţia 2.2. Maricea A are $C_m^p C_n^q$ submatrici de tip (p, q).

Definiţia 2.3. Spunem că o matrice A are *rangul* r (şi notăm $\text{rang}(A) = r$) dacă A are un minor de grad r nenul şi toţi minorii de ordin superior lui r ataşaţi lui A sunt nuli.

Teorema 2.4. *Dacă* $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$*, atunci*

$$\mathit{rang}(A) = \mathit{rang}[c_1^A, \ldots, c_n^A] = \mathit{rang}[l_1^A, \ldots, l_m^A]$$

Demonstraţie. Dacă $\operatorname{rang}(A) = r$,

$\square$

Corolarul 2.5. *$rang(A) = r$ dacă şi numai dacă A are un minor de grad r nenul şi orice minor de grad $> r$ este nul.*

Observaţia 2.6. Teorema 2.4 ne arată că putem folosi algoritmul furnizat de lema substituţiei pentru determinarea rangului unei matrici.

Example 2.7.

3. Transformări elementare

DEFINIŢIA 3.1. Fie $\mathbf{a} = [v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n]$ un sistem de vectori din K-spaţiul vectorial V. Spunem că efectuăm o *transformare elementară* asupra sistemului $\mathbf{a}$ dacă îl modificăm într-unul din următoarele moduri:

- permutăm (intervertim) doi vectori din sistem, obţinând un sistem: $\mathbf{a}' = [v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n]$
- înmulţim un vector cu un scalar $\alpha \neq 0$, obţinând un sistem: $\mathbf{a} = [v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_j, \dots, v_n]$
- adunăm la un vector din sistem un alt vector din sistem înmulţit cu un scalar $\alpha \in K$, obţinând sistemul: $\mathbf{a}''' = [v_1, \dots, v_i + \alpha v_j, \dots, v_j, \dots, v_n]$

PROPOZIŢIA 3.2. *Fie* $\mathbf{a}$ *un sistem de vectori din* K*-spaţiul vectorial* V *şi* $\mathbf{b}$ *un sistem de vectori obţinut din* $\mathbf{a}$ *prin aplicarea succesivă a unui număr finit de transformări elementare. Atunci* $\langle \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{b} \rangle$.

DEMONSTRAŢIE.

$\square$

COROLARUL 3.3. *Dacă* $\mathbf{a}$ *şi* $\mathbf{b}$ *sunt ca în propoziţia anterioară, atunci* $\operatorname{rang}(\mathbf{a}) = \operatorname{rang}(\mathbf{b})$.

DEFINIŢIA 3.4. 1) Fie $A = [a_{ij}] = [c_1^A, \dots, c_n^A] = [l_1^A, \dots, l_n^A] \in \mathcal{M}_{mn}(K)$. Spunem că efectuăm o *transformare elementară* pe linii, respectiv coloane, asupra matricii A dacă modificăm matricea efectuând o transformare elementară asupra coloanelor, respectiv liniilor, sale.

2) Două matrici $A, B \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ sunt *elementar echivalente* (pe linii, respectiv coloane) dacă B este obţinută din A prin aplicarea succesivă a unui număr finit de transformări elementare numai asupra liniilor repectiv numai asupra coloanelor lui A.

DEFINIŢIA 3.5. O matrice $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ are o *formă eşalon* cu r linii (coloane) nenule dacă sunt îndeplinite condiţiile:
(i) liniile (coloanele) $r+1, r+2, \dots$ sunt nule;

(ii) dacă $n_0(i)$ repezintă numărul elementelor nule de la începutul liniei (coloanei) i, atunci

$$0 \leq n_0(1) < n_0(2) < \cdots < n_0(r).$$

Dacă, în plus, $\forall 1 \leq i \leq r$ $n_0(i) = i - 1$, atunci B are o *formă trapezoidală*. O matrice din $\mathcal{M}_{mn}$ cu formă trapezoidală cu n linii nenule s.n. matrice triunghiulară. Dacă singurele elemente posibil nenule din B sunt $b_{11}, \ldots, b_{rr}$, atunci spunem că B are *formă diagonală*.

EXAMPLE 3.6.

TEOREMA 3.7. *Orice matrice este elementar echivalentă cu o matrice eşalon.*

DEMONSTRAŢIE.

$\square$

Aplicaţii.

1. Aflarea rangului unui sistem de vectori şi a unei baze a subspaţiului generat

Fie V un K-s.v., $\mathbf{e} = [e_1, \ldots, e_n]$ o bază a lui V şi $\mathbf{a} = [v_1, \ldots, v_m]$ un sistem de vectori din V. scriem coordonatele vectorilor din $\mathbf{a}$ în baza **e**:

$$v_1 = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n})\mathbf{e}^t, \dots, v_m = (\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn})\mathbf{e}^t$$

şi considerăm matricea $A = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(K)$. Avem egaliatea (formală):

$$\mathbf{a}^t = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = A\mathbf{e}^t.$$

Fie $B \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ o matrice eşalon cu r linii nenule, echivalentă pe linii cu A, $B = [l_1^A, \dots, l_m^A]^t$.

TEOREMA 3.8. *a)* $\operatorname{rang}(\mathbf{a}) = r$*;.*
b) Sistemul de vectori $[l_1^A\mathbf{e}^t, \dots, l_r^A\mathbf{e}^t]$ *este o bază pentru* $\langle \mathbf{a} \rangle$*.*

2. Aflarea rangului unei matrici

COROLARUL 3.9. *Dacă A este o matrice, elementar echivalentă pe linii cu o matrice eşalon cu r linii nenule, atunci* $\operatorname{rang}(A) = r$*.*

EXAMPLE 3.10.

4. Schimbarea bazei unui spaţiu vectorial

PROBLEMA 4.1. *Fie V un K-s.v. şi* $\mathbf{a} = [v_1, \dots, v_n]$*,* $\mathbf{b} = [w_1, \dots, w_n]$ *două baze din V. Să se găsească o formulă de calcul a coordonatelor unui vector x în baza* **b** *, atunci când ştim coordonale sale în baza* **a***.*

SOLUŢIE. Fie $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\mathbf{a}^t = (\beta_1, \dots, \beta_n)b^t$.
Scriem coordonatele vectorilor din **a** în baza **b**:

$$v_1 = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n})\mathbf{b}^t, \dots, v_n = (\alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nn})\mathbf{b}^t$$

şi considerăm matricea $A = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(K)$. Avem egaliatea (formală):

$$\mathbf{a}^t = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = U\mathbf{b}^t,$$

unde $U = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$.

Dacă $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\mathbf{a}^t = (\beta_1, \dots, \beta_n)\mathbf{b}^t$, atunci $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)U\mathbf{b}^t = (\beta_1, \dots, \beta_n)\mathbf{b}^t$, deci $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)U$. □

Definiţia 4.2. Matricea U construită anterior s.n. *matricea de trecere* de la baza $\mathbf{a}$ la baza $\mathbf{b}$.

Notaţia 4.3. Situaţia prezentată se notează: $\mathbf{a} \xrightarrow{U} \mathbf{b}$.

Am demonstrat

Teorema 4.4. *Dacă* $\mathbf{a}$ *şi* $\mathbf{b}$ *sunt baze ale* K*-s.v.* V*,* $\mathbf{a} \xrightarrow{U} \mathbf{b}$ *şi* $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\mathbf{a}^t = (\beta_1, \dots, \beta_n)\mathbf{b}^t$*, atunci* $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)U$

Teorema 4.5. *Fie* V *un* K*-s.v. şi* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$ *şi* $\mathbf{c}$ *baze ale lui* V*. Dacă* $\mathbf{a} \xrightarrow{U} \mathbf{b}$*,* $\mathbf{b} \xrightarrow{U} \mathbf{c}$*, atunci* $\mathbf{a} \xrightarrow{UV} \mathbf{c}$

Demonstraţie. $\mathbf{a} = U\mathbf{b} = UV\mathbf{c}$. □

Corolarul 4.6. *Dacă* $\mathbf{a} \xrightarrow{U} \mathbf{b}$ *şi* $\mathbf{b} \xrightarrow{U} \mathbf{a}$*, atunci* $UV = VU = I_n$

Demonstraţie.

□

5. Matrici inversabile

Definiţia 5.1. O matrice $U \in \mathcal{M}_n(K)$ s.n. *inverabilă* dacă există $V \in \mathcal{M}_n(K)$ astfel încât $UV = VU = I_n$. În această situaţie V se notează cu U^{-1} şi s.n. *inversa* lui U.

Corolarul 5.2. *Dacă* $\mathbf{a} \xrightarrow{U} \mathbf{b}$ *şi* $\mathbf{b} \xrightarrow{U} \mathbf{a}$*, atunci* U *şi* V *sunt inversabile şi* $V = U^{-1}$.

Teorema 5.3. *O matrice* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *este inversabilă dacă şi numai dacă* $\det(A) \neq 0$.

DEMONSTRAŢIE.

□

OBSERVAŢIA 5.4. Demontraţia teoremei anterioare ne furnizează o metodă de calcul a inversei unei matrici.

TEOREMA 5.5. *O matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este inversabilă dacă şi numai dacă sistemul de vectori format din liniile (coloanele) sale reprezintă o bază a K-spaţiului vectorial K^n.*

DEMONSTRAŢIE.

□

OBSERVAŢIA 5.6. Este suficient să cerem ca sistemul de vectori să fie liniar independent.

Observaţia 5.7. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este invesabilă, atunci A^{-1} este matricea de trecere de la baza canonică la baza $[l_1^A, \dots, l_nA]$ (sau $[c_1^A, \dots, c_nA]$). Liniile (coloanele) matricii A^{-1} sunt date de cordonatele vectorilor din baza canonică în baza $[l_1^A, \dots, l_nA]$ (respectiv $[c_1^A, \dots, c_nA]$).

Metode de calcul pentru inversa unei matrici.
II. Folosind lema substituţiei

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} & c_1^A & \dots & c_n^A & e_1 & \dots & e_n \\ \hline \mathbf{e}^t & & A & & & I_n & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline c_1^A & & \\ \vdots & I_n & A^{-1} \\ c_n^A & & \end{array}$$

III. Folosind transformări elementare
Dacă A este inversabilă atunci $A \sim I_n$.
Metoda: $[A|I_n] \sim \dots \sim [I_n|A^{-1}]$ (se lucrează numai pe linii!)

Example 5.8.

6. Matricea unei aplicaţii liniare

Fie U şi V două K-spaţii vectoriale, $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_m$ bază în U şi $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]$ bază în V. Dacă $f : U \to V$ este o aplicaţie liniară, calculăm coordonatele vectorilor $f(a_i)$ în baza $\mathbf{b}$:

$$f(a_1) = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$f(a_m) = (\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn}) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

adică

$$(\star) \quad \begin{bmatrix} f(a_1) \\ \vdots \\ f(a_m) \end{bmatrix} = [\alpha_{ij}] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Definiţia 6.1. Matricea $(\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ dată de formula $(\star)$ s.n. *matricea aplicaţiei liniare f în perechea de baze* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Ea se notează cu $[f]_{\mathbf{ab}}$. Dacă $U = V$ şi $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, atunci notăm matricea corespunzătoare cu $[f]_{\mathbf{a}}$.

Observaţia 6.2. Formula $(\star)$ poate fi scrisă formal $f(\mathbf{a}^t) = [f]_{\mathbf{ab}}\mathbf{b}^t$.

Reciproc, dacă $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$, atunci $\exists! f : U \to V$ aplicaţie liniară astfel încât $[f]_{\mathbf{ab}} = A$. Aplicaţia f este construită cu condiţia $(\star)$. Dacă $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\mathbf{a}^t$, atunci

$$f(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)[f]_{\mathbf{ab}}\mathbf{b}^t.$$

OBSERVAŢIA 6.3. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)[f]_{\mathbf{ab}}$ reprezintă coordonatele lui $f(x)$ în baza $\mathbf{b}$.

PROPOZIŢIA 6.4. ***(legătura între operaţii)*** *Fie U, V şi W trei K-spaţii vectoriale în care sunt fixate bazele* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, *respectiv* $\mathbf{c}$.

a) Dacă $f, g : U \to V$ sunt aplicaţii liniare şi $\alpha \in K$, atunci

$$[f+g]_{\mathbf{ab}} = [f]_{\mathbf{ab}} + [g]_{\mathbf{ab}},$$
$$[\alpha f]_{\mathbf{ab}} = \alpha [f]_{\mathbf{ab}}.$$

b) Dacă $f : U \to V$ şi $g : V \to W$ sunt aplicaţii liniare, atunci

$$[g \circ f]_{\mathbf{ac}} = [f]_{\mathbf{ab}}[g]_{\mathbf{bc}}.$$

DEMONSTRAŢIE.

$\square$

PROPOZIŢIA 6.5. ***(schimbarea bazei)***

Fie $f : U \to V$ o aplicaţie liniară, $\mathbf{a}$ *şi* $\mathbf{a}'$ *baze în U, respectiv* $\mathbf{b}$ *şi* $\mathbf{b}'$ *baze în V. Dacă* $\mathbf{a} \xrightarrow{A} \mathbf{a}'$ *şi* $\mathbf{b}\overset{B'}{\mathbf{b}}$, *atunci*

$$[f]_{\mathbf{a}'\mathbf{b}'} = A^{-1}[f]_{\mathbf{ab}}B.$$

DEMONSTRAŢIE.

□

Reamintim $\mathrm{rang}(f) = \dim_K(\mathrm{Im}(f))$, $\mathrm{def}(f) = \dim_K(\mathrm{Ker}(f))$.

PROPOZIŢIA 6.6. *Dacă $f : U \to V$ este o aplicaţie liniară,* $\mathbf{a}$ *este bază în U şi* $\mathbf{b}$ *este bază în V, atunci*

$$\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}[f]_{\mathbf{ab}},$$

$$\mathrm{def}(f) = \dim_K(U) - \mathrm{rang}[f]_{ab}.$$

DEMONSTRAŢIE.

□

EXAMPLE 6.7. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 - x_4, -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4)$.

7. Vectori şi valori proprii

DEFINIŢIA 7.1. Fie V un K-s.v. şi $f : V \to V$ un endomorfism al lui V. Un vector $x \in V \setminus \{0\}$ s.n. *vector propriu* ataşat lui f dacă există $\lambda \in K$ astfel încât $f(x) = \lambda x$. În aceste condiţii spunem că λ este o *valoare proprie* a lui f, corespunzătoare vectorului propriu x.

Mulţimea

$$\mathrm{Spec}(f) = \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ este valoare proprie pentru } f\}$$

s.n. *spectrul lui f*.

PROPOZIŢIA 7.2. *Fie V un K-s.v. şi $f : V \to V$ un endomorfism al lui V. Sunt adevărate afirmaţiile:*

a) Unui vector propriu îi corespunde o singură valoare proprie.

b) Un sistem format din vectori proprii corespunzători la valori proprii distinte este liniar independent.

c) Dacă $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, *atunci mulţimea* $V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ *este un subspaţiu nenul al lui* V *şi* $f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.

Demonstraţie.

$\square$

Observaţia 7.3. $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda 1_V)$ este mulţimea vectorilor proprii corespunzători lui λ la care se adaugă vectorul nul.

Definiţia 7.4. Dacă $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, atunci V_λ s.n. *subspaţiul vectorilor proprii* ataşati lui λ. Numărul

$$d_\lambda = \dim_K(V_\lambda)$$

s.n. *multiplicitatea geometrică* a lui λ.

Definiţia 7.5. Fie V un K-s.v. cu $\dim_K(V) = n$, $\mathbf{b}$ o bază în V şi $f : V \to V$ un endomorfism al lui V. Polinomul $P_f(X) = \det([f]_{\mathbf{b}} - XI_n)$ s.n. *polinomul caracteristic* ataşat lui f.

Teorema 7.6. *Fie* V *un* K*-s.v. şi* $f : V \to V$ *un endomorfism al lui* V.

a) Valoarea polinomului caracteristic $P_f(X)$ *este idependentă de baza în care acesta se calculează.*

b) $\lambda \in \mathrm{Spec}(f) \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$.

Demonstraţie.

□

DEFINIŢIA 7.7. Ordinul de multiplicitate a unei valori proprii λ ca rădăcină a polinomului caracteristic s.n. *multiplicitatea algebrică* a lui λ şi se noteaă cu m_λ.

PROPOZIŢIA 7.8. $1 \leq d_\lambda \leq m_\lambda \leq \dim_K(V)$.

DEMONSTRAŢIE.

□

OBSERVAŢIA 7.9. Teoria vectorilor şi valorilor proprii poate fi făcută şi pentru matrici pătratice, ţinând cont e faptul că orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ determină un endomorfism al K-spaţiului vectorial V.

DEFINIŢIA 7.10. Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
a) Polinomul $P_A(X) = \det(A - XI_n)$ s.n. *polinomul caracteristic* ataşat lui A.
b) Un scalar $\lambda \in K$ s.n. valoare proprie pentru A dacă $P_A(\lambda) = 0$. Notăm cu $\mathrm{Spec}(A)$ mulţimea valorilor proprii ataşate lui A.
c) Un n-uplu $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n \setminus \{0\}$ s.n. *vector propriu* pentru A dacă $\alpha(A - \lambda I_n) = 0$ pentru un $\lambda \in K$.
d) Dacă $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, atunci

- $d_A = n - \mathrm{rang}(A - \lambda I_n)$ s.n. multiplicitatea geometrică a lui A.
- m_λ =ordinul de multiplicitate a rădăcinii λ pentru $P_A(X)$ s.n. multiplicitatea algebrică a lui λ.

DEFINIŢIA 7.11. Două matrici $A, A' \in \mathcal{M}_n(K)$ sunt *asemenea* dacă există $B \in \mathcal{M}_n(K)$ a.i. $A' = B^{-1}AB$

OBSERVAŢIA 7.12. Două matrici asemenea au acelaşi polinom caracteristic.

DEFINIŢIA 7.13. Spunem că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este *simetrică* dacă $A = A^t$.

TEOREMA 7.14. *Dacă* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *este o matrice simetrică, atunci* $\mathrm{Spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$.

8. Endomorfisme (matrici) diagonalizabile

DEFINIŢIA 8.1. Fie V un K-s.v. şi $f : V \to V$ un endomorfism al lui V. Spunem că f este *diagonalizabil* dacă există o bază $\mathbf{b}$ a lui V astfel înât $[f]_{\mathbf{b}}$ să fie diagonală.

O matrice este *diagonalizabilă* dacă este asemenea cu o matrice diagonală.

TEOREMA 8.2. *Un endomorfism f al K-spaţiului vectorial V este diagonalizabil dacă şi numai dacă V are o bază formată din vectori proprii ai lui f.*

DEMONSTRAŢIE.

□

TEOREMA 8.3. *Fie V un K-s.v. şi $f : V \to V$ un endomorfism al lui V ($A \in \mathcal{M}_n(K)$). Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
a) f (respectiv A) este diagonalizabil.
b) $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, $m_\lambda = d_\lambda$.

OBSERVAŢIA 8.4. Ca să găsim forma diagonală trebuie să determinam o bază formată din vectori proprii.

Procedeu practic de diagonalizare Pentru diagonalizare endomorfismului $f : V \to V$ cu $\dim_K(V) = n$, se parcurg următorii paşi:
1) Se fixează o bază $\mathbf{b}$ a lui V şi se determină matricea $[f]_{\mathbf{b}}$;
2) Calculăm $P_f(X)$ şi determinăm $\mathrm{Spec}(f)$;
3) Se determină m_λ, $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$.
Dacă $\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \neq n$, atunci f **nu este diagonalizabil**;
Dacă $\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} = n$, atunci se trece la 4);
4) Pentru fiecare $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$ calculăm $d_\lambda = n - \mathrm{rang}([f]_{\mathbf{b}} - \lambda I_n)$;

Dacă $\exists\lambda$ a.i. $m_\lambda \neq d_\lambda$, atunci f **nu este diagonalizabil**;

Dacă $\forall\lambda$, $m_\lambda \neq d_\lambda$, atunci f **este diagonalizabil** şi se trece la pasul 5);

5) Pentru fiecare $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$ determinăm o bază $\mathbf{a}_\lambda$ în $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda 1_V)$.

6) Reuniunea bazelor $\mathbf{a}_\lambda$ este o bază în care f are forma diagonală.

Observaţia 8.5. Pentru diagonalizarea matricilor se respectă paşii 2)–5) din algoritmul anterior. Pasul 6) se înlocuieşte cu:

6') Matricea care are pe linii vectorii determinaţi la pasul 5) are proprietatea: BAB^{-1} este matrice diagonală (A notează matricea iniţială).

Example 8.6. $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

9. Sisteme de ecuaţii liniare

Definiţia 9.1. Fie K un corp comutativ.

1) Prin *sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute $X_1, \ldots, X_n$ şi coeficienţi în K* se înţelege un ansamblu de egalităţi formale

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases},\ a_{ij}, b_i \in K.$$

Dacă $b_1 = \cdots = b_n = 0$, atunci spunem că (S) este un *sistem omogen*.

2) Un vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ este *soluţie* pentru (S) dacă înlocuind necunoscutele sistemului cu componentele vectorului $X_i := x_i$ toate egalităţile ce se obţin sunt adevărate.

3) Sistemul (S) este *compatibil* dacă are cel puţin o soluţie şi este *incompatibil* dacă nu are soluţii. (S) este *compatibil determinat* dacă are exact o soluţie, iar dacă are cel puţin două suluţii, atunci spunem că este *compatibil nedeterminat*.

Definiţia 9.2. Fiind dat un sistem (S), matricea $A = (a_{ij})$ s.n. *matricea sitemului* (S). Matricea $A^e = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ s.n. *matricea extinsă* ataşată lui (S).

Observaţia 9.3. **(Forma matriceală)** Dacă $A = [a_{ij}]$ este matricea sistemului (S), atunci sistemul poate i scris sub forma:

$$(S)\ AX^t = b^t,$$

unde $X = (X_1, \dots X_n)$ şi $b = (b_1, \dots, b_m)$.

OBSERVAŢIA 9.4. **(Forma vectorială)** Dacă privim coloanele matricii A ca vectori coloană din K-spaţiul vectorial K^n, atunci sistemul poate fi pus sub forma:

$$(S) X_1 c_1^A + \dots X_n c_n^A = b^t$$

TEOREMA 9.5. ***(Kroneker-Capelli)***
Sistemul de ecutaţii liniare (S) este compatibil dacă şi numai dacă $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^e)$.

DEMONSTRAŢIE.

□

OBSERVAŢIA 9.6. Criteriul lui Rouché, studiat în liceu este o consecinţă a teoremei Kroneker-Capelli.

TEOREMA 9.7. *Soluţiile unui sistem omogen (S) cu n necunoscute formează un subspaţiu al K-spaţiului vectorial K^n, de dimensiune* $n - \operatorname{rang}(A)$.

DEMONSTRAŢIE.

$\square$

COROLARUL 9.8. *Un sistem omogen* (S) *are doar soluţia banală* $(0,\dots,0)$ *dacă şi numai dacă* $n = \mathrm{rang}(A)$.

OBSERVAŢIA 9.9. Din demonstraţia teoremei se deduce că subspaţiul soluţiilor unui sistem omogen coincide cu nucleul aplicaţiei liniare $f : K^n \to K^m$ cu $[f]_{\mathbf{ee}'} = A^t$, unde $\mathbf{e}$ şi $\mathbf{e}'$ sunt bazele canonice. Prin urmare, pentru determinarea solţiilor unui sistem omogen se pot aplica metodele prezentate pentru determinarea nucleelor de aplicaţii liniare.

TEOREMA 9.10. *Fie* (S) $AX^t = b^t$ *un sistem de ecuaţii liniare şi* (S_0) *sistemul omogen* $AX^t = 0$ *(obţinut prin înlocuirea coloanei* b *cu 0). Dacă* x_0 *este o soluţie particulară a lui* (S) *şi* $\mathcal{S}_0$ *este mulţimea soluţiilor lui* (S_0)*, atunci mulţimea soluţiilor sistemului* (S) *este*

$$\mathcal{S} = x_0 + \mathcal{S}_0 = \{x_0 + y \mid y \in S_0\}.$$

DEMONSTRAŢIE.

$\square$

10. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

TEOREMA 10.1. ***(Regula lui Cramer)*** *Un sistem* (S) $AX^t = b^t$ *cu* n *ecuaţii şi* n *necunoscute (adică* $A \in \mathcal{M}_n(K)$*) este compatibil determinat dacă şi numai dacă* $\det(A) \neq 0$*. În aceste condiţii soluţia este* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *cu*

$$x_i = (\det(A))^{-1} \det[c_1^A, \dots, c_{i-1}^A, b^t, c_{i+1}^A, \dots, c_n^A],\ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

DEMONSTRAŢIE.

□

Metode de rezolvare
I. Metoda lui Cramer
II. Folosind lema substituţiei

OBSERVAŢIA 10.2. Este suficient să găsim o bază pentru spaţiul soluţiilor sistemului omogen (numit *sistem fundamental de soluţii* şi o soluţie particulară.

EXAMPLE 10.3. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 4x_5 = -3 \end{cases}$$

III. Metoda lui Gauss

DEFINIŢIA 10.4. Spenem că două sisteme de ecuaţii liniare sunt *echivalente* dacă ambele sunt compatbile şi au aceleaşi soluţii sau dacă ambele sunt incompatibile.

TEOREMA 10.5. *Dacă sistemele (S) şi (S') au matricile extinse echivalente pe linii, atunci ele sunt echivalente.*

Metoda lui Gauss constă în aducerea matricii extinse la o fomă eşalon şi rezolvarea sistemului care are ca matrice extinsă matricea eşalon obţinută.

EXAMPLE 10.6. Ex. anterior

Metoda lui Gauss-Jordan se bazează pa acelaşi principiu ca şi metda lui Gauss, cu diferenţa că se aduce matricea la o formă care este diagonală pe primele n coloane (corespunzătoare matricii sistemlui).

EXAMPLE 10.7. a) Ex. anterior.

EXAMPLE 10.8. Să se rezolve cu toate metodele studiate sistemele:

a) $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 14 \end{cases}$$