Spaţii vectoriale

1. Spaţii vectoriale. Definiţii şi proprietăţi de bază

În continuare prin "corp" vom înţelege "corp comutativ". Dacă nu se precizează altceva, se vor folosi notaţiile standard pentru elementele speciale ale unui corp.

Definiţia 1.1. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp şi $(V, +)$ un grup abelian. Spunem că o *operaţie externă*

$$\cdot : K \times V \to V,\ K \times V \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

determină o structură de *K-spaţiu vectorial* pe V dacă sunt îndeplinite axiomele:

(SV1) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\forall \alpha \in K$, $\forall x, y \in V$;
(SV2) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall x \in V$;
(SV3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall x \in V$;
(SV4) $1x = x$, $\forall x \in V$.

Notăm cu ${}_KV$ un K-spaţiu vectorial.

Observaţia 1.2. În definiţia anterioară s-au folosit notaţiile standard din teoria spaţiilor vectoriale. Atragem atenţia că $+$ şi $\cdot$ notează fiecare câte două operaţii. De exemplu în (SV2) primul $+$ este operaţia din corp, iar al doilea este operaţia din grup.

Definiţia 1.3. În situaţia descrisă de definiţia 1.1 se foloseşte următoarea terminologie:

- elementele lui V s.n. *vectori*. Elementul neutru din V se notează cu 0 sau 0_V şi s.n. *vectorul nul*.
- elementele lui K s.n. *scalari*.
- operaţia externă s.n. *înmulţirea cu scalari*.

Example 1.4. 1) K^n

2) $V_2 = \mathbb{R}^2$

3) K^A

4) $K[X]$, $\mathbb{Z}_2[X]$

Propoziţia 1.5. *Fie V un K-s.v.*

a) $\forall \alpha \in K$, $t_\alpha : V \to V$, $t_\alpha(x) = \alpha x$ *este un morfism de grupuri.*

a) $\forall x \in V$, $t_x : (K, +) \to (V, +)$, $t_x(\alpha) = \alpha x$ *este un morfism de grupuri.*

Demonstraţie.

$\square$

Corolarul 1.6. ***(reguli de calcul)***

a) $\forall \alpha \in K$, $\alpha 0_V = 0_V$*;*
b) $\forall x \in V$, $0_K x = 0_V$*;*
c) $\forall \alpha \in K$, $\forall x \in V$, $\alpha(-x) = -\alpha x = (-\alpha x)$.
d) $\alpha \in K$, $x \in V$*;* $\alpha x = 0_V \Leftrightarrow \alpha = 0_K$ *sau* $x = 0_V$.

DEMONSTRAŢIE.

□

2. Subspaţii ale spaţiilor vectoriale

DEFINIŢIA 2.1. Fie V un K-s.v. şi $S \subseteq V$. Spunem că S este K*-subspaţiu* al lui V (şi notăm $S \leq_K V$) dacă S este stabilă faţă de adunarea vectorilor (i.e. $\forall x, y \in S$, $x + y \in S$) şi faţă de înmulţirea cu scalari (i.e. $\forall \alpha \in K\ \forall x \in S$, $\alpha x \in S$) şi împreună cu restricţiile acestor operaţii S este un K-s.v.

OBSERVAŢIA 2.2. Dacă $S \leq_K V$, atunci S este subgrup în $(V, +)$, deci $0_V \in S$.

TEOREMA 2.3. ***(teorema de caracterizare a subspaţiilor)*** *Fie* V *un* K*-s.v. şi* $S \subseteq V$*. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) S *este un subspaţiu al lui* V*;*
b) (i) $0_V \in S$ $(S \neq \varnothing)$,
  (ii) $\forall x, y \in S\ x + y \in S$,
  (iii) $\forall \alpha \in K$, $\forall x \in S$, $\alpha x \in S$.
c) (i) $0_V \in S$ $(S \neq \varnothing)$,
  (ii) $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall x, y \in S$, $\alpha x + \beta y \in S$.

DEMONSTRAŢIE.

□

DEFINIŢIA 2.4. Fie V un K-s.v., $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ şi $x_1, \ldots, x_n \in V$. Vectorul

$$v = \alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \overset{not}{=} (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)[x_1, \ldots, x_n]^t$$

s.n. *combinaţie liniară* a vectorilor $x_1, \ldots, x_n$ cu scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

COROLARUL 2.5. *Subspaţiile vectoriale sunt închise la combinaţii liniare.*

DEMONSTRAŢIE. Prin inducţie după numărul vectorilor din combinaţia liniară. □

EXAMPLE 2.6.

PROPOZIŢIA 2.7. *Dacă $(S_i)_{i \in I}$ este o familie de subspaţii vectorial ale K-s.v. V, atunci $\bigcap_{i \in I} S_i \leq_K V$. [Intersecţia unei familii de subspaţii ale unui s.v. este un subspaţiu.]*

DEMONSTRAŢIE.

□

DEFINIŢIA 2.8. Fie V un K-s.v. şi $X \subseteq V$. Subspaţiul

$$\langle X \rangle = \bigcap_{X \subseteq S \leq_K V} S$$

s.n. *subspaţiul generat de* X.

OBSERVAŢIA 2.9. $\langle X\rangle$ este cel mai mic subspaţiu care conţine pe X.

TEOREMA 2.10. *Dacă V este un K-s.v. şi $\varnothing \neq X \subseteq V$, atunci*

$$\langle X\rangle = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_i \in K,\ x_i \in X\ \forall i \in I\}.$$

[$\langle X\rangle$ este mulţimea combinaţiilor liniare de elemente din X.]

DEMONSTRAŢIE.

$\square$

COROLARUL 2.11.
a) $\langle x\rangle = \{\alpha x \mid \alpha \in K\}$;
b) $\langle x, y\rangle = \{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in K\}$;
c) $\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = \{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in K,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

OBSERVAŢIA 2.12. În general reuniunea a două subspaţii nu este subspaţiu.

EXAMPLE 2.13.

PROPOZIŢIA 2.14. *Fie V un K-s.v.*
a) Dacă $S, T \leq_K V$, atunci

$$\langle S \cup T\rangle = \{s + t \mid s \in S,\ t \in T\} \overset{not}{=} S + T.$$

b) Dacă $S_1, \ldots, S_n \leq_K V$*, atunci*

$$\left\langle \bigcup_{i=1}^{n} Si \right\rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i \mid \forall i, s_i \in S_i \right\} \overset{not}{=} \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

Demonstraţie.

$\square$

3. Aplicaţii liniare

Definiţia 3.1. Fie K un corp, V şi V' două spaţii vectoriale. Spunem că o funcţie $f : V \to V'$ este o *aplicaţie liniară* (sau K-*morfism*) dacă sunt îndeplinite condiţiile:

- $\forall x, y \in V$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (f este *aditivă*),
- $\forall \alpha \in K$, $\forall x \in V$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ (f este *omogenă*).

Dacă, în plus, f este bijectivă, atunci f s.n. *izomorfism*. În această situaţie spunem că spaţiile vectoriale sunt izomorfe şi notăm $V \cong V'$.

Dacă $V = V'$, atunci f s.n. *endomorfism* al lui V. Un endomorfism bijectiv s.n. *automorfism*.

Teorema 3.2. *Fie* V *şi* V' *două* K*-spaţii vectoriale. O funcţie* $f : V \to V'$ *este aplicaţie liniară dacă şi numai dacă* $\forall \alpha, \beta \in K$*,* $\forall x, y \in V$ $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$*.*

Demonstraţie.

$\square$

COROLARUL 3.3. *Orice aplicaţie liniară păstrează combinaţiile liniare:*

$$f((\alpha_1,\ldots,\alpha_n)[x_1,\ldots,x_n]^t) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)[f(x_1),\ldots,f(x_n)]^t.$$

EXAMPLE 3.4. 1) 1_V

2) θ

3) $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $s(a,b) = (b,a)$.

4) $f : K[X] \to K$, $f(P) = P(0)$.

OBSERVAŢIA 3.5. 1) Orice aplicaţie liniară este un morfism de grupuri, pentru că este aditivă, prin urmare, dacă $f : V \to V'$ este o aplicaţie liniară, atunci

- $f(0_V) = 0_{V'}$;
- $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in V$.

PROPOZIŢIA 3.6. *a) Compusa a două (sau mai multe) aplicaţii liniare este o aplicaţie liniară.*

b) Inversa unui izomorfism între spaţii vectoiale este un izomorfism de spaţii vectoriale.

DEMONSTRAŢIE.

□

NOTAŢIA 3.7. Dacă V şi V' sunt K-s.v., atunci vom nota

$$\mathrm{Hom}_K(V,V') = \{f : V \to V' \mid f \text{ este o aplicaţie liniară}\}.$$

Mulţimea $\mathrm{Hom}_K(V,V)$ se notează $\mathrm{End}_K(V)$.

PROPOZIŢIA 3.8. *Fie V şi V' două K-s.v. Pe mulţimea* $\mathrm{Hom}_K(V,V')$ *definim operaţia $+$, dată de:*

$$f,g \in \mathrm{Hom}_K(V,V') \Rightarrow f+g :\to V',\ (f+g)(x) = f(x)+g(x).$$

Sunt adevărate afirmaţiile:

a) *Operaţia* $+$ *este bine definită.*
b) $(\mathrm{Hom}_K(V, V'), +)$ *este un grup abelian.*
c) $(\mathrm{End}_K(V), +, \circ)$ *este un inel (numit* inelul endomorfismelor *lui* V*).*
d) *Grupul* $\mathrm{Hom}_K(V, V')$ *este un* K*-s.v. faţă de înmulţirea cu scalari:*

$$\cdot : K \times \mathrm{Hom}_K(V, V') \to \mathrm{Hom}_K(V, V'),$$
$$\alpha f : V \to V',\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \forall \alpha \in K, \forall f \in \mathrm{Hom}_K(V, V').$$

Demonstraţie. TEMĂ □

Definiţia 3.9. Dacă $f : V \to V'$ este o aplicaţie liniară între K-s.v., atunci

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0_{V'}\}$$

s.n. *nucleul* lui f.

Teorema 3.10. *Fie* $f : V \to V'$ *o aplicaţie liniară. Sunt adevărate afirmaţiile:*

a) $\mathrm{Ker}(f) \leq_K V$*;*
b) f *este injectivă* $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = 0 (= \{0_V\})$.

Demonstraţie.

□

Teorema 3.11. ***(de corespondenţă)*** *Fie* $f : V \to V'$ *o aplicaţie liniară. Sunt adevărate afirmaţiile:*

a) $S \leq_K V \Rightarrow f(S) \leq_K V'$;
b) $S' \leq_K V' \Rightarrow f^{-1}(S') \leq_K V$;
c) *Dacă* f *este surjectivă, atunci funcţia*

$$\varphi : \{S \mid S \leq_K V,\ \mathrm{Ker}(f) \subseteq S\} \to \{S' \mid S' \leq_K V'\}$$

este bijectivă.

DEMONSTRAŢIE.

□

4. Dependenţă şi independenţă liniară. Baze

DEFINIŢIA 4.1. Fie V un K-spaţiu vectorial şi $\mathbf{a} = [v_1, \dots, v_n]$ un sistem de vectori din V. Spunem că:

- $\mathbf{a}$ este *liniar dependent* dacă există un n-uplu $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ de scalari din K astfel încât $\alpha \mathbf{a}^t = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$;
- $\mathbf{a}$ este *liniar independent* dacă nu este liniar dependent;
- $\mathbf{a}$ este *bază* dacă este un sistem de generatori liniar independent.

Din definiţiile de mai sus deducem următoarele proprietăţi

1) Un sistem format dintr-un singur vector este liniar dependent dacă şi numai dacă vectorul este nul.
2) Dacă există un indice i astfel încât $v_i = 0$, sistemul $\mathbf{a} = [v_1, \dots, v_n]$ este liniar dependent.
3) Sistemul $\mathbf{a} = [v_1, \dots, v_n]$ este liniar independent dacă şi numai dacă din $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ rezultă $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

EXAMPLE 4.2. În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ avem:

a) Sistemul $\mathbf{a} = [u_1, u_2, u_3]$ cu $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (2, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, -2)$ este liniar dependent pentru că $-2u_1 + u_2 - u_3 = 0$.
b) Sistemul $\mathbf{b} = [v_1, v_2]$ cu $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$ este liniar independent. Acest sistem nu formează o bază pentru că $(0, 1, 1) \neq \langle u_1, u_2 \rangle$.
c) Sistemul $\mathbf{c} = [w_1, w_2, w_3]$ dat de $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (1, 1, 0)$ şi $v_3 = (1, 1, 1)$ este o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$.

EXAMPLE 4.3. În K-spaţiul vectorial K^n, sistemul $\mathbf{e} = [e_1, \dots, e_n]$ cu $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ este o bază, numită *baza canonică*.

PROPOZIŢIA 4.4. *Fie V un K-spaţiu vectorial şi* $\mathbf{a} = [v_1, \ldots, v_n]$ *un sistem de vectori din V. Sistemul* $\mathbf{a}$ *este liniar dependent dacă şi numai dacă există un indice i astfel încât v_i este o combinaţie liniară de ceilalţi $n-1$ vectori din* $\mathbf{a}$.

DEMONSTRAŢIE.

□

NOTAŢIA 4.5. Dacă $\mathbf{a} = [v_1, \ldots, v_n]$ este un sistem de vectori din K-spatiul vectorial V şi $F = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, prin $\mathbf{a}^{\setminus F} = \mathbf{a}^{\setminus i_1, \ldots, i_k}$ vom nota sistemul obţinut din $\mathbf{a}$ prin scoaterea vectorilor de pe toate poziţiile $i \in F$.

COROLARUL 4.6. *Dacă* $\mathbf{a} = [v_1, \ldots, v_n]$ *este un sistem de vectori din K-spaţiul vectorial V şi v_i este o combinaţie liniară de ceilalţi vectori, atunci* $\langle \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{a}^{\setminus i} \rangle$.

DEMONSTRAŢIE.

□

DEFINIŢIA 4.7. Spunem că un spaţiu vectorial este de *tip finit* dacă el admite un sistem de generatori finit.

TEOREMA 4.8. *Orice spatiu vectorial nenul de tip finit admite o bază.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $V \neq 0$ un spaţiu vectorial de tip finit şi $\mathbf{a} = [v_1, \ldots, v_n]$ un sistem de generatori pentru V.

□

Propoziţia 4.9. *Fie V un K-s.v. Un sistem $\mathbf{a} = [v_1, \ldots, v_n]$ de vectori din V este bază în V dacă şi numai dacă pentru orice $v \in V$ există un singur n-uplu $\alpha = \mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ astfel încât $v = \alpha \mathbf{a}^t$.*

Demonstraţie.

□

Definiţia 4.10. Spunem că sistemul de scalari α reprezintă *coordonatele* vectorului v în baza $\mathbf{a}$.

Example 4.11.

Teorema 4.12. ***(Proprietatea de universalitate)***

Fie V un K-s.v. şi $\mathbf{a} = [v_1, \ldots, v_n]$ o bază în V. Oricare ar fi W un K-s.v. şi $\mathbf{b} = [w_1, \ldots, w_n]$ un sistem de vectori din W, există o unică aplicaţie liniară $f : V \to W$ astfel încât $f(v_i) = w_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Mai mult:

a) *f este injectivă $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b}$ este liniar independent;*
b) *f este surjectivă $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b}$ este sistem de generatori;*
a) *f este bijectivă $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b}$ este bază;*

Demonstraţie.

□

Corolarul 4.13. *Dacă V este un K-s.v. care are o bază cu n-elemente, atunci $V \cong K^n$.*

5. Dimensiunea unui spaţiu vectorial

Teorema 5.1. ***(a înlocuirii, Steinitz)***

Fie V un K-s.v. Dacă $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]$ este un sistem de generatori pentru V şi $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_r]$ este un sistem liniar independent de vectori din V, atunci:

a) $r \leq n$;

b) sistemul $\mathbf{b}$ poate fi completat cu vectori din $\mathbf{a}$ până când se obţine un sistem $\mathbf{b}^* = [b_1, \dots, b_r, a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-r}}]$ care este un sistem de generatori pentru V.

FĂRĂ DEMONSTRAŢIE.

Teorema 5.2. *Orice două baze ale unui spaţiu vectorial de tip finit $V \neq 0$ au acelaşi număr de elemente.*

Demonstraţie.

□

DEFINIŢIA 5.3. Numărul elemetelor unei baze ale unui spaţiu vectorial s.n. *dimensiunea* spaţiului vectorial.

NOTAŢIA 5.4. Vom nota cu $\dim_K(V)$ dimensiunea K-spaţiului vectorial V.

OBSERVAŢIA 5.5. Teorema 5.2 are loc pentru toate spaţiile vectoriale, nu doar pentru cele de tip finit.

EXAMPLE 5.6. 1) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$
2) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$, $\dim_K K^n = n$.

Din demonstraţiile toeremelor 4.8 şi 5.2 deducem şi următoarele consecinţe:

COROLARUL 5.7. *Sunt adevărate airmaţiile:*
1. Din orice sistem de generatori se poate extrage o bază.
2. Orice sistem liniar independent poate fi completat până la o bază.
3. $\dim_K V$*=nr. maxim de vectori liniar independenţi=nr minim de vectori dintr-un sistem de generatori.*

TEOREMA 5.8. ***(a alternativei)***
Fie V un K-s.v. cu $\dim_K V = n$ şi $\mathbf{a} = [a_1, \ldots, a_n]$ un sistem de vectori din V. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\mathbf{a}$ *este o bază;*
b) $\mathbf{a}$ *este liniar independent;*
c) $\mathbf{a}$ *este sistem de generatori pentru V.*

DEMONSTRAŢIE.

□

6. Formule legate de dimensiune

PROPOZIŢIA 6.1. *Fie $f : U \to V$ o aplicaţie liniară între K-spaţii vectoriale. Atunci*

$$\dim_K U = \dim_K \operatorname{Ker}(f) + \dim_K \operatorname{Im}(f).$$

DEMONSTRAŢIE.

$\square$

PROPOZIŢIA 6.2. *Fie V un K-s.v. şi $S, T \leq_K V$. Atunci*

$$\dim_K(S + T) + \dim_K(S \cap T) = \dim_K S + \dim_K T.$$

DEMONSTRAŢIE.

□

PROPOZIŢIA 6.3. *Fie* V *un* K*-s.v. (de tip finit) şi* $S \leq_K V$*. Atunci:*
a) $\dim_K S \leq \dim_K(V)$*;*
b) $\dim_K S = \dim_K(V) \Leftrightarrow S = V$*.*

PROPOZIŢIA 6.4. *Dacă* V *este un* K*-s.v. şi* $m \leq \dim V$*, atunci există* $S \leq_K V$ *cu* $\dim_K S = m$*.*

COROLARUL 6.5. *Fie* $f : U \to V$ *o aplicaţie liniară între* K*-spaţiile vectoriale de tip finit* U *şi* V *cu* $\dim_K U = \dim_K V$*. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) f *este bijectivă;*
b) f *este injectivă;*
c) f *este surjectivă;*

7. Lema substituţiei

OBSERVAŢIA 7.1. Coordonatele unui vector se modifică dacă schimbăm baza.

EXAMPLE 7.2.

LEMA 7.3. ***(lema substituţiei)***

Fie $\mathbf{b} = [v_1, \ldots, v_n]$ *o bază a* K*-spaţiului vectorial* V *şi* $u \in V$ *cu* $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbf{b}^t$*. Pentru un indice* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *considerăm sistemul de vectori* $\mathbf{b}^* = [v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n]$*. Sunt adevărate afirmaţiile:*

a) $\mathbf{b}^*$ *este o bază* $\Leftrightarrow \alpha_i \neq 0$*;*

b) Dacă $\mathbf{b}^*$ *este o bază şi* $x \in V$ *este un vector cu coordonatele* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *în baza* $\mathbf{b}$*, respectiv* $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*)$ *în baza* $\mathbf{b}^*$*, atunci*

$$\lambda_i^* = \alpha_i^{-1}\lambda_i$$
$$\lambda_j^* = \lambda_j - \alpha_i^{-1}\alpha_j\lambda_j, \ \forall j \neq i.$$

DEMONSTRAŢIE. a)

□

OBSERVAŢIA 7.4. Lema substituţiei furnizează o metodă de calcul care este folosită des în elaborarea de algoritmi pentru rezolvarea de probleme de algebră liniară.

Calcul tipic: Se pleacă de la o bază cunosută (de obicei baza canonică) şi se înlocuieşte câte un vector folosind formulele date în lemasubstituţiei până când se obţin informaţiile dorite despre sistemul de vectori sudiat. Transformările furnizate de lema substituţiei pot fi evidenţiate în tabele astfel:

Paşii ce trebuie urmaţi:

1) Declarăm un "pivot" $\alpha_i \neq 0$.

2) Înlocuim vectorul de pe linia pivotului cu cel de pe coloana pivotului.

3) Înmulţim scalarii de pe linia pivotului cu α_i^{-1}.

4) Elementele de pe coloana pivotului, diferite de pivot se înlocuiesc cu 0.

5) Pentru celelalte elemente se aplică "regula dreptunghiului":

$$\begin{array}{ccc} \alpha_i & \dots & \lambda_i \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_j & \dots & \lambda_j \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & \dots & \alpha_i^{-1}\lambda_i \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_i^{-1}(\alpha_i\lambda_j - \alpha_j\lambda_i) \end{array}$$

PROBLEMA 7.5. *Fie* $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]$ *un sistem de vectori din* K*-s.v.* K^n *şi* $x \in K^n$*. Verificaţi dacă* $\mathbf{b}$ *este o bază a lui* K^n*. Dacă da, atunci determinaţi coordonatele lui* x *în baza* $\mathbf{b}$*. Dacă nu, determinaţi o relaţie de dependenţă liniară între vectorii din* $\mathbf{b}$*.*

SOLUŢIE. Considerăm ca bază de plecare baza canonică $\mathbf{e} = [e_1, \dots, e_n]$. Contruim primul tabel (cu datele iniţiae)

Se repetă procedeul până când ajungem la una din situaţiile:

I) Înlocuim toţi vectorii din $\mathbf{e}$ cu vectorii din $\mathbf{b}$ (eventual în altă ordine). Rezultă că $\mathbf{b}$ este o bază. Coordonatele lui x se citesc de pe coloana sa.

II) Gašim o coloană (linie) formată numai de 0. Atunci nu e bază. Pentru determinarea unei relaţii de dependenţă liniară, continuaă înlocuirea vectorilor de $\mathbf{e}$ cu vectori din $\mathbf{b}$ până când procedeul se blochează şi scriem un vector in b pe care nu l-am mutat ca o combinaţie liniară de vectorii din ultima bază obţinută. $\square$

EXAMPLE 7.6. a) $v_1 = (2, 1, 1)$, $v_2 = (3, 2, 1)$, $v_3 = (-1, -1, -2)$, $x = (1, -1, -2)$.

b) $v_1 = (2, 1, 1)$, $v_2 = (3, 2, 1)$, $v_3 = (-1, -1, 0)$.

DEFINIŢIA 7.7. Fie V un K-s.v. şi $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]$ un sistem de vectori din V. Prin *rangul* sistemului **a** înţelegem dimensiunea subspaţiului generat de **a**:

$$\operatorname{rang}(\mathbf{a}) = \dim_K \langle a_1, \dots, a_n \rangle.$$

PROBLEMA 7.8. *Să se determine rangul unui sistem de vectori.*

SOLUŢIE. Se aplică algoritmul furnizat de lema substitţiei până când acesta se blochează. Numărul de vectori mutaţi reprezintă rangul sistemului de vectori. Sistemul format din vectorii mutaţi este o bază a subspaţiului generat. $\square$

EXAMPLE 7.9. a) Exemplul 7.6

b) $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (2, 4, -2)$, $v_3 = (-1, 0, 2)$, $v_4 = (2, 6, -1)$.