4. Seminar 4

Exercițiul 4.1. Demonstrați că dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, atunci

(1) $([a, b], c) = [(a, c), (b, c)]$;
(2) $[(a, b), c] = ([a, c], [b, c])$;
(3) $[a, b, c](a, b)(a, c)(b, c) = abc(a, b, c)$.

Indicație. Se folosesc formulele pentru c.m.m.d.c și c.m.m.m.c care se obțin din descompunerile numerelor în produse de puteri de numere prime.

Soluție. Scriem $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ și $c = p_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \ldots, p_k$ sunt numere prime distincte două câte două, iar $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}$ pentru orice $i = \overline{1, k}$.

(1) Avem

$$([a, b], c) = p_1^{\min(\max(\alpha_1, \beta_1), \gamma_1)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(\max(\alpha_k, \beta_k), \gamma_k)}$$

și

$$[(a, c), (b, c)] = p_1^{\max(\min(\alpha_1, \gamma_1), \min(\beta_1, \gamma_1))} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(\min(\alpha_k, \gamma_k), \min(\beta_k, \gamma_k))}$$

și folosim egalitatea $\min(\max(\alpha, \beta), \gamma) = \max(\min(\alpha, \gamma), \min(\beta, \gamma))$, care este valabilă pentru orice trei numere reale α, β, γ.

Pentru demonstrarea acestei egalități, observăm în primul rând că ea este simetrică în α și β, deci putem presupune $\alpha \leq \beta$. Avem trei cazuri: (i) $\gamma \leq \alpha$, (ii) $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ și (iii) $\beta \leq \gamma$. Prin calcule directe se constată că întoate aceste cazuri egalitatea este adevărată.

(2) Analog cu (1).

(3) Analog cu (1), este suficient să demonstrăm că pentru orice 3 numere reale α, β, γ are loc egalitatea

$$\max(\alpha, \beta, \gamma) + \min(\alpha, \beta) + \min(\beta, \gamma) + \min(\gamma, \alpha) = \alpha + \beta + \gamma + \min(\alpha, \beta, \gamma).$$

Aceasta este simetrică în α, β și γ, deci putem presupune $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Se constată că în această ipoteză cei doi termeni ai egalității au valuarea $2\alpha + \beta + \gamma$ și demonstrația este completă.

Comentarii. (a) Chiar dacă cele trei numere au factori primi diferiți, putem presupune că ei aceeași factori primi dacă lăsă ca exponenții sa ia și valoarea 0 (vezi Corolarul 4.2.4). De exemplu pentru $a = 12$, $b = 45$ și $c = 250$, scriem $a = 2^2 3^1 5^0$, $b = 2^0 3^2 5^1$ și $c = 2^1 3^0 5^3$.

(b) Punctul (3) reprezintă versiunea pentru trei numere a Teoremei 3.3.3.

Exercițiul 4.2. Să se determine numerele prime care pot fi scrise ca sumă și ca diferență de câte două numere prime.

Indicaţie. Folosim faptul că singurul număr prim şi par este 2. Analog, singurul multiplu de 3 care este prim este 3.

Soluţie. Fie $a = p + q = m - n$ cu $a, p.q, m, n$ numere prime. Cum $a > 2$, rezultă că el este impar. Deci unul dintre numerele p sau q, respectiv m sau n, este par, iar celălalt este impar. Putem presupune că $p = 2$. Mai mult, $n = 2$ pentru că $a > 3$.

Avem aşadar $a = 2 + q = m - 2$. Din $a > 3$ rezultă $a = 3x + r$, cu $r \in \{1, 2\}$. Dacă $r = 1$, atunci $m = 3x + 3$, deci $m = 3$. Atunci am acea $a = 1$, ceea ce este imposibil pentru că a este prim. Rămâne cazul $r = 2$ şi găsim $q = 3$ şi $m = 7$.

Soluţia căutată este $a = 5 = 2 + 3 = 7 - 2$.

Exerciţiul 4.3. Dacă $n = 2^k + 1$ este un număr prim, atunci $n = 2$ sau $k = 2^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}^*$.

Indicaţie. Orice număr $k > 0$ care nu e o putere a lui 2 se poate scrie $k = 2^\ell a$ cu $a > 1$ impar.

Soluţie. Presupunem că $n > 2$ şi $k = 2^\ell a$ cu $a > 1$ număr impar. Atunci $1 < 2^\ell + 1 \mid (2^\ell)^a + 1^a = n$ şi $2^\ell + 1 < n$, ceea ce contrazice faptul că n este prim.

Exerciţiul 4.4. Găsiţi toate numerele prime de forma $n^n + 1$ care sunt mai mici decât 10^{10}.

Indicaţie. Se procedează ca în exerciţiul precendent ca să găsim forma lui n.

Soluţie. Se constată că $n = 2^\ell$. Rezolvăm inecuaţia

$$(2^\ell)^{2^\ell} < 10^{10}, \text{ adică } 2^{\ell 2^\ell} < 10^{10}.$$

Aceasta mai poate fi scrisă

$$2^{\ell 2^\ell - 10} < 5^{10} = 125^3 \cdot 5 < 128^3 \cdot 5 = 2^{21} \cdot 5,$$

aşadar $2^{\ell 2^\ell - 21} < 5$. Obţinem $\ell 2^\ell \leq 23$, deci $\ell \leq 2$.

Soluţiile posibile sunt $n = 1$, $n = 2$ sau $n = 4$. Toate aceste numere verifcă cerinţa.

Exerciţiul 4.5. Determinaţi numerele naturale n cu proprietatea că $n+1$, $n+5$, $n+7$, $n+11$, $n+13$, $n+17$ şi $n+23$ sunt simultan numere prime.

Indicaţie. Pentru un $a \in \mathbb{N}^*$ bine ales, scriem $n = qa + r$, $r \in \{0, \ldots, a-1\}$.

Soluţie. Scriem $a = 7q + r$, $q \in \mathbb{N}$, $r \in \{1, \ldots, 6\}$. Avem următoarele cazuri:

(i) Pentru $r = 0$, numărul $n + 7$ este prim doar dacă $q = 0$. In acest caz $n + 1 = 1$, nu este prim.

(ii) $r = 1 \Rightarrow n + 13$ nu e prim pentru că ese multiplu de 7 şi este > 7;

(iii) Pentru $r = 2$, numărul $n + 5$ este prim doar dacă $q = 0$. Avem $n = 2$, iar numărul $n + 13$ nu e prim;

(iv) $r = 3 \Rightarrow n + 11$ nu e prim;

(v) $r = 4 \Rightarrow n + 17$ nu e prim;

(vi) $r = 5 \Rightarrow n + 23$ nu e prim;

(vii) Pentru $r = 6$, numărul $n + 1$ este prim doar dacă $q = 0$. Avem $n = 6$. Numerele din enunţ au valorile $7, 11, 13, 19, 23, 29$, deci toate sunt numere prime.

Soluţie: $n = 6$.

Exerciţiul 4.6. Demonstraţi că dacă p şi $p^2 + 8$ sunt numere prime, atunci $p^3 + 4$ este număr prim.

Indicaţie. Împărţim p la un număr convenabil şi luăm toate resturile posibile.

Soluţie. Observăm că $p = 3$ sau $p = 3a \pm 1$, $a \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $p = 3a \pm 1$, avem $p^2 + 8 = \mathcal{M}_3 + 9$, nuăr > 3 si divizibil cu 3. Deci $p = 3$ şi rezultă că $p^3 + 4 = 31$ este nuăr prim.

Exerciţiul 4.7. Demonstraţi că există o infinitate de numere prime de forma $6k - 1$.

Indicaţie. Se aplică aceeaşi metodă ca în Teorema 4.3.3.

Soluţie. Dacă p este un număr prim, atunci el este de forma $\mathcal{M}_6 \pm 1$. Presupunem că $p_1, \ldots, p_n$ sunt numere prime de forma $\mathcal{M}_6 - 1$ şi considerăm numărul

$$N = 6p_1 \cdot \ldots \cdot p_n - 1.$$

Evident $N > 1$, deci el are o descompunere în factori primi $N = q_1 \cdot \ldots \cdot q_m$. Se constată uşor că cel puţin un factor q_i este de forma $\mathcal{M}_6 - 1$ şi că acest factor este relativ prim cu fiecare dintre numerele $p_1, \ldots, p_n$. Rezultă că oricum am lua un număr finit de numere prime de forma $\mathcal{M}_6 - 1$ putem sa construim încă un număr prim de această formă. Concluzia este acum evidentă.

Exerciţiul 4.8. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţiile:

(1) $xy + x + y = 20$;

(2) $xy - x - y = 22$;
(3) $xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 2$.
(4) $x^2(y-1) + y^2(x-1) = 0$;
(5) $(x+y)(x^2+y^2) = 4xy + 3$;
(6) $(x^2+y)(x+y^2) = (x-y)^3$;
(7) $(x+y) - 2(xy)^2 = 1$;

Indicaţie. Principala metodă constă în căutarea unor exuaţii echivalente de forma $E(x,y)F(x,y) = G(x,y)$, unde $E(x,y)$, $F(x,y)$ şi $G(x,y)$ sunt expresii prolinomiale de x şi/sau y sau sunt constante numerice. Apoi se folosesc proprietăţile relaţiei de divizibilitate sau descompunerile în factori primi.

Soluţie. (1) Ecuaţia se mai scrie $(x+1)(y+1) = 21$. Avem variantele $\begin{cases} x+1=1 \\ y+1=21 \end{cases}$, $\begin{cases} x+1=-1 \\ y+1=-21 \end{cases}$, $\begin{cases} x+1=3 \\ y+1=7 \end{cases}$ etc.

Sau: $x = \frac{22+y}{y-1} \in \mathbb{Z}$, deci $y-1 \mid 22+y$. Din $y-1 \mid y-1$, rezultă $y-1 \mid 23$, deci $y-1 \in \{\pm1, \pm23\}$ şi obţinem $y \in \{0, 2, -22, 24\}$. Avem multţimea soluţiilor:

$$(x,y) \in \{(-22,0), (24,2), (0,-22), (2,24)\}.$$

(4) Observăm o primă soluţie (banală) $x = y = 0$ şi că din $x = 0$ rezultă şi $y = 0$ (şi reciproc).

Presupunem $x, y \neq 0$. Ecuaţia se mai scrie $x^2(y-1) = y^2(1-x)$. Pentru că $(x^2, x-1) = 1$, rezultă $x^2 \mid y^2$. Analog obţinem $y^2 \mid x^2$, deci $x = \pm y$. Rezultă şi $x - 1 = 1 - y$. Aşadar $x = \pm y$ şi $x + y = 2$. Avem $x = y = 1$.

(6) Observăm că $(x,y) = (a,0)$ este soluţie pentru orice $a \in \mathbb{Z}$.

Pentru $y \neq 0$, explicită termenii şi obţinem ecuaţia de gradul 2 în y:

$$2y^3 + (x^2 - 3x)y + 3x^2 + x = 0.$$

Pentru ca această ecuaţie să aibă soluţii întregi trebuie ca discriminantul său să fie pătrat perfect. După calcule se obţine $x(x+1)^2(x-8)$ e pătrat perfect, deci $x(x-8)$ e pătrat perfect. Rezultă că exisă $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^2 - 8x - k^2 = 0$. Şi discriminantul acestei exuaţii în x trebuie să fie pătrat perfect, deci $16 + k^2$ este pătrat perfect. Rezultă că $16 + k^2$ este egal cu unul dintre numerele $(k+1)^2$, $(k+2)^2$ sau $(k+3)^2$.

Se obţine soluţiile

$$(x,y) \in \{(-1,-1), (8,-10), (9,-6), (9,-21)\}.$$

Comentarii. Ecuaţiile în $\mathbb{Z}$ se numesc ecuaţii diofantice. Există o mare varietate de astfel de ecuaţii şi de metode de rezolvare. Cei interesaţi pot consulta In Cucurezeanu, Ecuaţii in $\mathbb{Z}$, Editura Aramis.

Exerciţiul 4.9. (Temă) Fie $n = \prod_{k\geq 1} p_k^{\alpha_k} \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă numerele α_i sunt pare pentru orice $i > 0$.

Indicaţie. Pentru început demonstraţi că $\sqrt{12}$ şi $\sqrt{24}$ sunt numere iraţionale.