1. Seminar 3

Exerciţiul 1.1. Fie $n \in \mathbb{N}$ un număr natural care împărţit la 6, 8, 9, 12 şi 16 dă acelaşi rest 5.

(1) Determinaţi cel mai mic n cu această proprietate.
(2) Determinaţi cel mai mic $n > 10$ cu această proprietate.
(3) Determinaţi cel mai mic $n > 1000$ cu această proprietate.
(4) Determinaţi cel mai mic multiplu de 7 cu această proprietate.

Indicaţie. Se aplică teorema împărţirii cu rest (TIR) şi proprietăţile c.m.m.m.c.

Soluţie. Aplicăm TIR şi obţinem:

$$n = 6a + 5 = 8b + 5 = 9c + 5 = 12d + 5 = 16e + 5,$$

unde $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Rezultă că

$$n - 5 = 6a = 8b = 9c = 12d = 16e,$$

deci $n - 5$ este **multiplu comun de 6, 8, 9 şi 16**. Aşadar $144 = [6, 8, 9, 16] \mid n-5$ şi deducem că există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = 144x + 5$.

In continuare vom alege x convenabil astfel încât să satisfacă cerinţele din enunţ.

(1) $x = 0 \Rightarrow n = 5$.

(2) Din $n > 10$ rezultă $x > 0$, deci alegem $x = 1$ şi avem $n = 149$.

(3) Avem $n > 1000 \Leftrightarrow x > 6$, deci alegem $x = 7$ şi avem $n = 1013$.

(4) Din $7 \mid 144x+5 = \mathcal{M}_7+4x+5$ rezultă $7 \mid 4x+5$. Deci $7 \mid 8x+10$ şi obţinem $7 \mid x + 3$. Rezultă că $x = 7y - 3$ cu $y \in \mathbb{N}$ şi de aici avem $n = 144(7y - 3) + 5 = 1008y - 427$.

Cea mai mică valoare o obţinem pentru $y = 1$, deci $n = 581$.

Comentarii. Intrebarea (2) apare des în manuale. Există profesori care indică direct soluţia $n = [6, 8, 9, 16]+5$. Pe lânga faptul că lipseşte argumentare, indicarea soluţiei nu îi ajută pe elevi să răspundă la întrebări de tipul celor de la (3) şi (4). Mai mult, o rezolvare "direcă" nu atinge scopul unor astfel de exerciţii, şi anume să ne obişnuim că un multiplu (divizor) comun este multiplu (divizor) de c.m.m.m (d).c.

Exerciţiul 1.2. Să se determine toate numerele întregi n astfel încât n împărţit la 7 dă restul 3 şi n împărţit la 11 dă restul 2.

Soluţie. $\exists a, b \in \mathbb{Z} : n = 7a + 3 = 11b + 2$

Fie b ca mai sus. Rezultă $7 \mid 11b - 1$. Avem:

$$7 \mid 22b-2 \Rightarrow 7 \mid b-2 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : b = 7x+2 \exists x \in \mathbb{Z} : x = 11(7x+2)+2 = 77x+24$$

Soluţie: $n = 77x + 24$ cu $x \in \mathbb{Z}$.

Comentarii. Acest tip de problemă este de fapt un caz particular al lemei chineze a resturilor.

Exercițiul 1.3. Să se determine numerele $a, b \in \mathbb{N}^*$ ştiind că:

(1) $ab = 1200$, $(a, b) = 10$;
(2) $ab = 6300$, $(a, b) = 15$;
(3) $a + b = 96$, $(a, b) = 12$;
(4) $(a, b) = 18$, $[a, b] = 630$;
(5) $a + b = 18(a, b)$, $[a, b] = 1925$;
(6) $(a, b) = 13$, $[a, b] = 2382$;
(7) $a + b = 370$, $[a, b] = 270(a, b)$.

Indicaţie. Dacă $d = (a, b)$, scriem $a = dx$, $b = dy$ cu $(x, y) = 1$ şi $m = [a, b] = dxy$.

Soluţie. (1) Din $d^2xy = 1200$ rezultă $xy = 12$. Folosim condiţia $(x, y) = 1$ şi găsim soluţiile

$$(x, y) \in \{(1, 12), (3, 4), (4, 3), (12, 1)\}.$$

Deci

$$(a, b) \in \{(10, 120), (30, 40), (40, 30), (210, 10)\}.$$

(3) Analog se obţine $x + y = 8$, deci

$$(x, y) \in \{(1, 7), (3, 5), (5, 3), (7, 1)\}$$

şi

$$(a, b) \in \{(12, 84), (36, 60), (60, 36), (84, 12)\}.$$

Comentarii. Atenţie, condiţia $(x, y) = 1$ este esenţială. La (1) "soluţia" $(2, 6)$ nu este corectă. Analog, la (3), nu luăm în considerare posibila vaiantă $(2, 6)$ pentru (x, y).

Exerciţiul 1.4. Demonstraţi că oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$ numerele $3k + 1$ şi $14k + 5$ sunt relativ prime. Aceeaşi problemă pentru numerele $3k + 13$ şi $k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$.

Indicaţie. Se consideră un divizor comun şi se demonstrează că el divide pe 1.

Soluţie. Din $d \mid 3k+1$ şi $d \mid 14k+5$ rezultă că $d \mid 42k+14$ şi $d \mid 42k+15$. Prin scădere rezultă $d \mid 1$.

Exerciţiul 1.5. Să se calculeze $(3k - 1, 14k + 5)$ în funcţie de $k \in \mathbb{Z}$.

Indicaţie. Se consideră un divizor comun d şi se caută un multiplu (numeric) x al său. Se consideră apoi toate cazurile posibile.

Soluţie. Din $d \mid 3k-1$ şi $d \mid 14k+5$ rezultă că $d \mid 42k-14$ şi $d \mid 42k+15$. Prin scădere rezultă $d \mid 29$. Deci $d \in \{1, 29\}$.

Studiem ce se întâmplă când $d = 29$. Obţinem $29 \mid 3k-1$, deci $29 \mid 30k-10$. Obţinem $29 \mid k-10$ şi avem $k = 29n+10$.

Pentru $k = 29n+10$ se constată prin calcule că $29 \mid 3k-1$ şi $29 \mid 14k+5$. Din ceea ce am demonstrat anterionr rezultă că $(3k-1, 14k+5) = 29$.

Rezultă că pentru celelalte cazuri, adică $k \neq \mathcal{M}_{29} + 10$, avem $(3k-1, 14k+5) = 1$.

Exerciţiul 1.6. Demonstraţi că pentru orice $k, n \in \mathbb{N}$ avem

$$(2^k 5^{k+1} + 1, 2^{n+1} 5^n + 1) \neq 1.$$

Indicaţie. Căutăm un divizor comun, eventual folosind criterii de divizibilitate.

Soluţie. Se constată că 3 este un divizor comun.

Exerciţiul 1.7. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $(5^n + 1, 39) = 1$.

Indicaţie. Trebuie să studiem când divizorii lui 39 divide $5^n + 1$.

Soluţie. Divizorii posibili sunt 1, 3, 13 şi 39. Luăm d una dintre aceste valori şi încercăm să obţinem informaţii noi.

Pt $d = 1$ nu gămsim nimic nou.

Pt $d = 39$ constatăm că este suficent să studiem cazurile $d = 3$ şi $d = 13$.

(I) $3 \mid 5^n + 1 \Leftrightarrow 3 \mid (6-1)^n + 1 \Leftrightarrow 3 \mid (-1)^n + 1 \Leftrightarrow n$ este impar.

(II) Scriem $n = 2k + r$ cu $r \in \{0, 1\}$.

Avem $13 \mid 5^n + 1 \Leftrightarrow 13 \mid (26-1)^k 5^r + 1 \Leftrightarrow 13 \mid (-1)^k 5^r + 1 \Leftrightarrow r = 0$ şi k este impar $\Leftrightarrow n = 4\ell + 2,\ \ell \in \mathbb{N}$.

Constatăm că

$$(5^n + 1, 39) = \begin{cases} 3 & \text{dacă } n \text{ este impar;} \\ 13 & \text{dacă } n = 4\ell + 2; \\ 1 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Temă

Exerciţiul 1.8. Găsiţi trei numere aflate în progresie aritmetică a, b, c astfel încât $(a, b, c) = 4$, $[a, b, c] = 240$.

Exerciţiul 1.9. Aflaţi numărul $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că 1333 dă restul 13 prin împărţire la n, iar 351 dă restul 15 prin împărţire la n.

Exerciţiul 1.10. Demonstraţi că dacă $d = (a_1, \ldots, a_n)$, unde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}^*$, atunci există $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $d = u_1 a_1 + \cdots + u_n a_n$.