1. Grupuri

Ex. 1.1. Fie p un număr prim şi $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi (folosind teoria grupurilor) că dacă există $a, b \in \mathbb{Z}$ relativ prime astfel încât

$$a^{2^n} + b^{2^n} \equiv 0 \pmod{p},$$

atunci $2^{n+1} \mid p - 1$.

Ex. 1.2. Fie G un grup finit. Notăm cu n_2 numărul elementelor de ordin 2 din G. Demonstraţi că numerele n_2 şi $|G|$ au parităţi diferite.

Ex. 1.3. Fie G un grup finit cu $|G| = 2n$, unde n este un număr impar. Demonstraţi că G are un subgrup de ordin n.

Ex. 1.4. Daţi un exemplu de grup cu $4n$ elemente, unde n este un număr impar convenabil ales, care nu are subgrupuri de ordin $2n$.

Ex. 1.5. Fie G un grup finit cu $|G| = 2n$. Arataţi că numărul subgrupurilor de ordin n ale lui G nu poate fi 2. (Incercaţi să găsiţi o soluţie care nu foloseşte subgrupurile normale).