CURS 6 03.04.2018

Subgrupuri normale. Grupuri factor

$(G,\cdot)$ grup, $H \leq G \longmapsto \begin{matrix} \rho_H \\ \rho'_H \end{matrix}$ – relații de echivalență pe G: $\begin{matrix} x\,\rho_H\, y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \\ x\,\rho'_H\, y \Leftrightarrow yx^{-1} \in H \end{matrix} \longmapsto$

$\longmapsto$ $G/_{\rho_H} = \{xH \mid x \in G\}$: $xH = yH \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$

$G/_{\rho'_H} = \{Hx \mid x \in G\}$: $Hx = Hy \Leftrightarrow yx^{-1} \in H$

În general: $G/_{\rho_H} \neq G/_{\rho'_H}$: $\exists\, x \in G$ a.î. $xH \neq Hx$

Def: Fie $(G,\cdot)$ grup și $N \leq G$. Spunem că N este subgrup normal în G dacă
$\forall\, x \in G$, $xN = Nx$

Exemple:

1) Orice subgrup al unui grup abelian este normal
$xN = \{x\cdot n \mid n \in N\} = \{nx \mid n \in N\} = Nx$

2) Subgrupurile triviale $\{1\}$ și G sunt normale.
$x\cdot\{1\} = \{x\} = \{1\}\cdot x$
$x\cdot G = G = G\cdot x$, $\forall\, x \in G$

3) $D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$
$N = \{1, r^2\} \leq D_4$
$1\cdot N = N = N\cdot 1$
$rN = \{r, r^3\} = Nr$
$r^2N = \{r^2, 1\} = Nr^2$
$r^3N = \{r^3, r\} = Nr^3$
$\forall\, k = \overline{0,3}$, $r^2 sr^k = sr^2r^k = sr^{k+2} = (sr^k)\cdot r^2$
$\Rightarrow sr^k\cdot N = \{sr^k, sr^kr^2\} = \{sr^k, r^2(sr^k)\} = N sr^k$
$\Rightarrow N$ este normal în G

$H = \{1, s\}$
$rH = \{r, rs\} = \{r, sr^3\}$
$Hr = \{r, sr\} \neq rH \Rightarrow H$ nu este normal în D_4

Notăm $N \trianglelefteq G$ faptul că N este subgrup normal al lui G

Propoziție
Fie $(G,\cdot)$ grup și $N \leq G$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $N \trianglelefteq G$

b) $\forall\, x \in G$, $\forall\, n \in N$, $x^{-1}nx \in N$

$\left(xN = x'N \Rightarrow xn \in x'N \Rightarrow \exists\, n_1 \in N \text{ a.î. } xn = x'n_1 \quad x'n_1 = xn \Rightarrow x^{-1}x'n_1 = n \mid \cdot n_1^{-1} \Rightarrow x^{-1}x' = nn_1^{-1} \Rightarrow x^{-1}x' \in N \right)$

Dem:

• a) $\Rightarrow$ b) Fie $x \in G$, $n \in N$
$\left.\begin{matrix} nx \in Nx \\ N \trianglelefteq G \end{matrix}\right\} \Rightarrow Nx = xN \Rightarrow nx \in xN \Rightarrow \exists\, n_1 \in N$ a.î. $nx = x\cdot n_1 \mid x^{-1}$

$\Rightarrow \exists\, n_1 \in N$ a.î. $x^{-1}nx = n_1 \Rightarrow x^{-1}nx \in N$

• b) $\Rightarrow$ a) Fie $x \in N$ # $xN \stackrel{?}{=} Nx$
Fie $g \in xN \Rightarrow \exists\, n \in N$ a.î. $g = x\cdot n$
Aplicăm b) pt. x^{-1} și $n \Rightarrow (x^{-1})^{-1}nx^{-1} \in N \Rightarrow \exists\, n_1 \in N$ a.î. $xnx^{-1} = n_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, n_1 \in N$ a.î. $xn = n_1x \in Nx \Rightarrow g = xn \in Nx$
$\left.\begin{matrix} g \text{ oarecare} \Rightarrow xN \subseteq Nx \\ \text{Analog } Nx \subseteq xN \end{matrix}\right\} \Rightarrow xN = Nx$, $\forall\, x \in G \Rightarrow N \trianglelefteq G$

Corolar
Fie $f: G \to H$ morfism de grupuri. Atunci:
$\ker f = \{g \in G \mid f(g) = 1\} \trianglelefteq G$

Dem:
$\ker f \leq G$ (s-a demonstrat la subgrupuri)
Fie $x \in G$, $m \in \ker f$
$f(x^{-1} m x) = f(x^{-1}) \cdot f(m) \cdot f(x) = [f(x)]^{-1} \cdot 1 \cdot f(x) = 1$
$\Rightarrow \forall x \in G, \forall m \in \ker f : x^{-1} m x \in \ker f \Rightarrow \ker f \trianglelefteq G$

Propoziție
Fie $(G, \cdot)$ grup și $N \leq G$ a.î. $|G : N| = 2 \Longrightarrow N \trianglelefteq G$
$$\underset{\displaystyle |G/\rho_N| = |G/\rho'_N|}{\overset{\shortparallel}{|G:N|}}$$

Dem:
$\forall x \in N$, $xN = N = Nx$ (temă)
Fie $x \notin N \Rightarrow x = x1 \in xN \Rightarrow N \neq xN$, $|G : N| = 2$ $\Big\} \Rightarrow G/\rho_N = \{N ; xN\}$

$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \Rightarrow G = N \cup xN \\ N \cap xN = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow xN = G \setminus N \\ \text{Analog} \Rightarrow Nx = G \setminus N \end{array}\right\} \Rightarrow Nx = xN \Rightarrow \forall x \in G, Nx = xN \Rightarrow N \trianglelefteq G$

Exemple
1) D_4, $N = \langle r \rangle = \{1, r, r^2, r^3\}$
$8 = |D_4| = \underbrace{|N|}_{4} \cdot |D_4 : N| \Rightarrow |D_4 : N| = 2 \Rightarrow N \trianglelefteq G$

2) Analog, $\{\pm 1, \pm i\}$ este normal în grupul cuaternionilor)

Teoremă (definirea grupurilor factor)
Fie $(G, \cdot)$ grup și $N \trianglelefteq G$. Pe mulțimea $G/\rho_N = \{xN \mid x \in G\}$ definim operația:
$(xN)(yN) = (xy)N$. Atunci:
a) operația „·" pe G/ρ_N este bine definită
b) $(G/\rho_N, \cdot)$ grup în care N este elementul neutru
c) funcția $p_N : G \to G/\rho_N$, $p_N(x) = xN$ este un morfism de grupuri surjectiv și $\ker(p_N) = N$

Dem:
a) Dem că · e independentă de alegerea reprezentanților.
$xN = x'N$ și $yN = y'N \overset{?}{\Rightarrow} (xN)(yN) = (x'N)(y'N)$
$xN = x'N \Leftrightarrow x^{-1} \cdot x' \in N$
$yN = y'N \Leftrightarrow y^{-1} \cdot y' \in N$
$(xN)(yN) = (x'N)(y'N) \Leftrightarrow (xy)N = (x'y')N \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (xy)^{-1} \cdot x'y' \in N \Leftrightarrow y^{-1} \cdot \underbrace{x^{-1} x'}_{\in N} \underbrace{y y^{-1}}_{1} y' \in N$

$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x^{-1} x' \in N \\ N \trianglelefteq G \end{array}\right\} \Rightarrow y^{-1}(x^{-1} x') y \in N \\ y^{-1} \cdot y' \in N \\ N \leq G \end{array}\right\} \Rightarrow y^{-1} x^{-1} x' y y^{-1} y' \in N$

$\Rightarrow (xN)(yN) = (x'N)(y'N) \Rightarrow$ · e bine definită

Obs: În demonstrație am folosit efectiv faptul că $N \trianglelefteq G$.

b) · asociativă (evident)

$\forall x \in G : (xN)(1N) = (x \cdot 1)N = xN = (1N)(xN)$

$\Rightarrow N = 1N$ este element neutru

$\forall x \in G : (xN)(x^{-1}N) = 1 \cdot N = N = (x^{-1}N)(xN)$

$\Rightarrow \forall\, xN \in G/_{\rho_N}, \exists\, (xN)^{-1} = x^{-1}N$ a.î. $(xN)(xN)^{-1} = N$

$\Rightarrow (G/_{\rho_N}, \cdot)$ grup

c) ρ_N morfism surjectiv (temă)

$\operatorname{Ker} \rho_N = \{g \in G \mid \rho_N(g) = N\} = \{g \in G \mid gN = N\}$

$gN = N \Leftrightarrow 1 \cdot N = g \cdot N \Leftrightarrow 1^{-1} g \in N \Leftrightarrow g \in N$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} \rho_N = \{g \in G \mid g \in N\} = N$

Def: Grupul $(G/_{\rho_N}, \cdot)$ s.n. grupul factor (grupul cât) indus de N și se notează cu G/N.

Exemple

1) $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$

$m\mathbb{Z} \trianglelefteq (\mathbb{Z}, +)$

$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \,\rho_{m\mathbb{Z}}\, y \Leftrightarrow -x+y \in m\mathbb{Z} \Leftrightarrow m \mid y-x \overset{not}{\Longleftrightarrow} x \equiv y \pmod m$

Relația $\rho_{m\mathbb{Z}}$ s.n. relația de congruență modulo m.

$\mathbb{Z}/_{\rho_{m\mathbb{Z}}} = \{m\mathbb{Z}, 1+m\mathbb{Z}, 2+m\mathbb{Z}, \ldots, (m-1)+m\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}_m$ → mulțimea claselor de resturi modulo m.

$= \{k + m\mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\hat{i} + \hat{j} = \widehat{i+j}$

$(i + m\mathbb{Z}) + (j + m\mathbb{Z}) = (i+j) + m\mathbb{Z}$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_m, +)$ – grupul factor al lui $\mathbb{Z}$ indus de $m\mathbb{Z}$

2) D_4, $N = \{1, r^2\}$

$D_4/_N = \{\{1, r^2\}, \{r, r^3\}, \{s, sr^2\}, \{sr, sr^3\}\}$

$N = r^2N \quad rN = r^3N \quad sN = sr^2N \quad srN = sr^3N$

$\Rightarrow (D_4/_N, \cdot)$ grup cu 4 elemente

$rN \cdot rN = r^2N = N \Rightarrow \operatorname{ord}(rN) = 2$

Toate elementele $\neq$ de identitate (N) au ordinul 2 $\Rightarrow D_4/_N \simeq$ grupul lui Klein

$\{r, r^3\} \cdot \{s, sr^2\} = rN \cdot sN = (rs)N = sr^3N = srN$

3) $G \trianglelefteq G$

$G/_G = \{G\}$ – grup cu un element

4) $\{1\} \trianglelefteq G$

$G/_{\{1\}} = \{g\{1\} \mid g \in G\} = \{\{g\} \mid g \in G\}$

Fie $f: G \to H$ un morfism de grupuri. Atunci:

a) $\ker f \trianglelefteq G$

b) funcția $\bar{f}: G/_{\ker(f)} \to f(G)$, $\bar{f}(g \cdot \ker(f)) = f(g)$ este bine definită și este un izomorfism de grupuri.

Dem:

a) s-a demonstrat anterior

b) $\forall\, g \cdot \ker f = g' \cdot \ker f \overset{?}{\Rightarrow} \bar{f}(g \ker f) = \bar{f}(g' \cdot \ker f)$

$g \cdot \ker f = g' \cdot \ker f \Rightarrow g^{-1} g' \in \ker f \Rightarrow f(g^{-1} g') = 1 \Rightarrow [f(g)]^{-1} \cdot f(g') = 1 \Rightarrow f(g) = f(g')$

$\Rightarrow \bar{f}(g \ker f) = \bar{f}(g' \ker f)$

$\Rightarrow \bar{f}$ bine definită

$\bar{f}$ morfism: $\bar{f}((g_1 \cdot \ker f)(g_2 \cdot \ker f)) = \bar{f}((g_1 g_2) \ker f) = f(g_1 g_2) \underset{\text{morfism}}{\overset{f}{=}} f(g_1) \cdot f(g_2)$

$= \bar{f}(g_1 \ker f) \cdot \bar{f}(g_2 \ker f)$

$\Rightarrow \bar{f}$ morfism

$\bar{f}$ surjectivă (evident)

$\bar{f}$ injectivă $\Leftrightarrow \ker \bar{f} = \{\ker f\}$

$\bar{f}(g \ker f) = 1 \Rightarrow f(g) = 1 \Rightarrow g \in \ker f \Rightarrow g \cdot \ker f = \ker f$

$\Rightarrow \bar{f}$ injectivă

$\Rightarrow \bar{f}$ izomorfism

Exemplu

Fie $f: (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_6, +)$, $f(k) = \widehat{2k}$ $\quad \hat{0} = \hat{6}$ $\quad \widehat{2k} = \hat{6} \Rightarrow 6 \mid 2k \Rightarrow 3 \mid k$

$\ker f = \{k \in \mathbb{Z} \mid \widehat{2k} = \hat{0}\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid 3 \mid k\} = 3\mathbb{Z}$

$f(\mathbb{Z}) = \{\widehat{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$

$\bar{f}: \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \to \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$

$\bar{f}: \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} \to \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$, $\bar{f}(\bar{i}) = f(i) = \widehat{2i}$

Teorema II de izomorfism

Fie $(G, \cdot)$ grup, $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$. Atunci:

a) $HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\} \leq G$

b) $N \trianglelefteq HN$ și $H \cap N \trianglelefteq H$

c) $H/_{H \cap N} \simeq HN/_N$

Teorema III de izomorfism

Fie $(G, \cdot)$ grup, $H, N \trianglelefteq G$ a.î. $N \subseteq H$. Atunci:

a) $H/_N = \{hN \mid h \in H\} \trianglelefteq G/_N$

b) $(G/_N)/_{(H/_N)} \simeq G/_H$

Teorema de corespondență

Fie $(G, \cdot)$ grup și $N \trianglelefteq G$.

a) $\forall\, K \leq G/_N$, $\exists!\, H \leq G$ a.î. $\begin{cases} N \subseteq H \\ H/_N = K \end{cases}$

b) $K \trianglelefteq G/_H \Leftrightarrow H \trianglelefteq G$