Def: Spunem că un grup G este prezentat de o submulțime S și de o mulțime de relații R dacă $G = \langle S \rangle$ și elementele lui S satisfac relațiile din R.
Notație: $G = \langle S \mid R \rangle$

Ex 1) $K = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$

$a^2 = 1 \Rightarrow a^{-1} = a$

$b^2 = 1 \Rightarrow b^{-1} = b$

$\Rightarrow$ elementele din K pot fi scrise ca produse de a și b

$(ab)^2 = 1 \Rightarrow a\,|abab|\,b = 1 \Rightarrow ba = ab$

$\Rightarrow \forall x \in K,\ x = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n,\ x_i \in \{a, b\},\ ba = ab \Rightarrow \forall x \in K,\ x = a^k \cdot b^l,\ k, l \in \mathbb{N}$

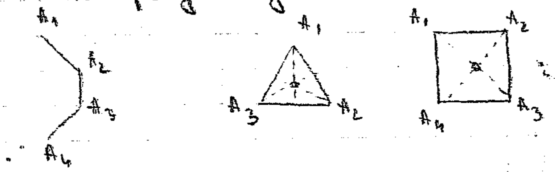
$$a^k = \begin{cases} 1, & k \text{ par} \\ a, & k \text{ impar} \end{cases} \qquad b^l = \begin{cases} 1, & l \text{ par} \\ b, & l \text{ impar} \end{cases}$$

$\Rightarrow K = \{1, a, b, \overbrace{a \cdot b}^{c}\} \Rightarrow K$ este izomorf cu grupul lui Klein

Obs: Reprezentările cu ajutorul relațiilor pot fi înșelătoare. de exemplu, Grupul $\langle a, b \mid a^3 = b^3 = (ab)^3 = 1 \rangle$ este un grup infinit

3) Grupuri diedrale

Fie P un poligon regulat cu n laturi $A_1, A_2, \ldots, A_n$



$\Delta A_1A_2A_3$ echil

$A_1A_2A_3A_4$ pătrat

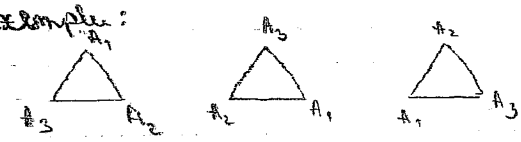
Prin simetrie a poligonului P înțelegem o transformare a lui P în el însuși, transformare realizată într-unul din următoarele moduri:

a) o rotație în jurul centrului O

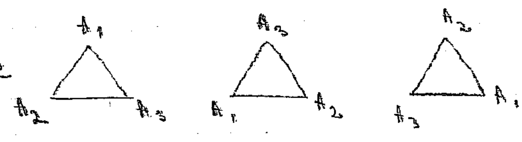
b) o simetrie față de o axă de simetrie a poligonului.

Exemple:

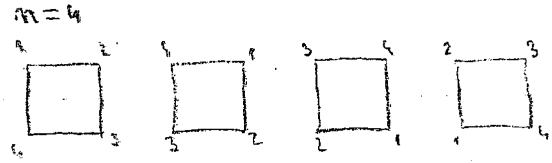
rotații

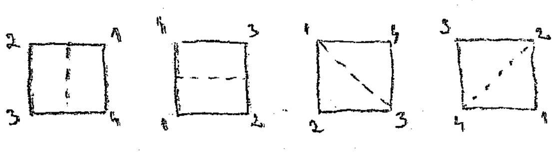


simetrie



$n = 4$





Teoremă

Mulțimea simetriilor unui poligon regulat formează un grup în raport cu operația de compunere

Def: Grupul simetriilor unui poligon regulat cu n laturi se numește GRUPUL DIEDRAL de grad n. (notație D_n)

Fixăm r rotația cu $\frac{2\pi}{n}$ în jurul lui O.
s o simetrie față de o axă de simetrie.

$\Rightarrow D_n = \langle r, s \mid r^n = 1,\ s^2 = 1,\ r\cdot s = s\cdot r^{n-1}\rangle$ – descrierea grupului diedral cu generatori și relații

$\Rightarrow D_n = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

Ex: $r^2(sr) = r\cdot r\cdot s\cdot r = r\cdot s\cdot r^{n-1}\cdot r = r\cdot s\cdot 1 = r\cdot s = s\cdot r^{n-1}$

Obs: $|D_n| = 2n$

Exemple

$n=3$

$D_3 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$

	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1						
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1		

$r\cdot s\cdot r = s\cdot r^2\cdot r = s$

$r^2 s = r\cdot s\cdot r^2 = sr^2 = sr$

Propoziție: În D_n are loc relația $r^k\cdot s = s\cdot r^{n-k}$

Def Fie $(G,\cdot)$ grup și $g\in G$. Spunem că ordinul lui g este un număr $n\in\mathbb{N}$ dacă: i) $g^n=1$
ii) $m\in\mathbb{N}^*$ și $g^m=1$, atunci $n\le m$

Spunem că ordinul lui g este infinit dacă: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $g^n\neq 1$

Not: $ord(g)$ = ordinul lui g

Exemple: 1) În D_3 ordinul lui r: $ord(r)=3$
$ord(s)=2$ $\quad sr\cdot sr=1$
$ord(sr)=2$

2) În $(\mathbb{C}^*,\cdot)$, $ord(i)=4$
$ord(2)=+\infty$
$ord(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})=3$

FORMULA LUI MOIVRE: $[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

Propoziție

Fie $(G,\cdot)$ grup și $g\in G$ cu $ord\, g = n\in\mathbb{N}^*$.
Atunci pentru orice $k\in\mathbb{Z}$ cu $g^k=1$ avem $n\mid k$.

Dem:

Fie $k\in\mathbb{Z}$ a.î. $g^k=1$

$n\neq 0 \Rightarrow \exists\, q,r\in\mathbb{Z}$ a.î. $k=nq+r$ și $0\le r<n$

$\Rightarrow 1=g^k=(g^n)^q\cdot g^r = 1^q\cdot g^r = g^r \Rightarrow g^r=1,\ r<n \ \Big|\ \xRightarrow{def} \left.\begin{matrix} r\notin\mathbb{N}^* \\ r\geq 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow r=0$

Teoremă (Lagrange)

• Dacă $(G,\cdot)$ grup finit, atunci:
a) $\forall\, g\in G$, $ord(g)\in\mathbb{N}^*$
b) $\forall\, g\in G$, $ord(g)\mid |G|$

Def: Dacă $(G,\cdot)$ grup finit, atunci $|G|$ se mai numește și ordinul lui G.

CURS 3

4) Grupul permutărilor unei mulțimi

Fie X o mulțime, $X^X = \{f : X \to X \mid f \text{ funcție}\}$

Ob: $(X^X, \circ)$ este un monoid

Elementele inversabile: $U(X^X) = \{f : X \to X \mid f \text{ inversabilă}\}$

$S_X \overset{not}{=\!=} \{f : X \to X \mid f \text{ funcție bijectivă}\}$

$\Rightarrow (S_X, \circ)$ formează un grup

Def: Dacă X este o mulțime, atunci grupul $(S_X, \circ)$ s.n. GRUPUL PERMUTĂRILOR mulțimii X.

Dacă $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $S_X \overset{not}{=} S_n$ și se numește GRUPUL PERMUTĂRILOR de grad n.

Propoziție:

Dacă X, Y sunt mulțimi a.î. $\exists\ \alpha : X \to Y$ funcție bijectivă, atunci $S_X \simeq S_Y$

Dem: (temă)

funcție $f : X \to X$

$\phi : S_X \to S_Y$; $\phi(f) = \alpha \cdot f \cdot \alpha^{-1}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & X \arrow[d, "\alpha"] \\ Y \arrow[u, "\alpha^{-1}"] \arrow[r, dashed, "\phi(f)"] & Y \end{tikzcd}$$

Se dem. că ϕ - izomorfism

Obs: Studiul permutărilor oricărei mulțimi finite se reduce la studiul grupului $(S_n, \circ)$.

Teoremă:

$n \in \mathbb{N}^*$, $|S_n| = n!$

Notație: $\sigma \in S_n \Rightarrow \sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ este o funcție bijectivă

$\Rightarrow \sigma$ poate fi reprezentată sub forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Fie $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(j) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} \in S_n$

$$\sigma \cdot \tau = \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ & & & \sigma(i) & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & n \\ & & & \tau(j) & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & j & \dots \\ \sigma(\tau(1)) & \dots & \sigma(\tau(j)) & \dots \end{pmatrix}$$

Exemplu: În S_5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Def: Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\sigma \in S_n$

Spunem că σ este un CICLU de lungime k $(2 \le k \le n)$ dacă:

$\exists\ a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$ diferite 2 câte 2 a.î.:

i) $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3$, $\sigma(a_{k-1}) = a_k$, $\sigma(a_k) = a_1$

ii) $\forall\ j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$: $\sigma(j) = j$

Notație: $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ - ciclul de lungime k descris în definiție.

Def: Un ciclu de lungime 2 s.n. TRANSPOZIȚIE

Exemple

S_5

$$(1,2,3)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}$$

$$(3,5,1,4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&5&3&1\end{pmatrix}=(1,4,3,5)$$

Def: Spunem că două cicluri $(a_1,a_2,\dots,a_k)$ și $(b_1,b_2,\dots,b_m)$ din S_n sunt disjuncte dacă mulțimile $\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ și $\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$ sunt disjuncte

Ex: În S_5 : $(1,2,3)$ și $(4,5)$ sunt disjuncte.

Propoziție

1. Dacă σ este un ciclu de lungime k din S_n $\Longrightarrow$ $\operatorname{ord}(\sigma)=k$
2. Dacă σ și τ sunt cicluri disjuncte din S_n $\Longrightarrow$ $\sigma\circ\tau=\tau\circ\sigma$ și $\operatorname{ord}(\sigma\circ\tau)=[\operatorname{ord}\sigma,\operatorname{ord}\tau]$
3. Orice ciclu este un produs de transpoziții
$(a_1,a_2,\dots,a_k)=(a_k,a_{k-1})(a_k,a_{k-2})\cdots(a_k,a_1)$

Obs: Descompunerea în produs de transpoziții NU este unică.

Teoremă

Orice permutare diferită de permutarea identică se descompune într-un produs de cicluri disjuncte.
Mai mult, această descompunere este unică, dacă facem abstracție de ordinea factorilor.

Procedeu pentru obținerea descompunerii

$\sigma\in S_n$

Pas 1: alegem i, cel mai mic a.î. $\sigma(i)\neq i$

Pas 2: considerăm ciclul $(a_1,a_2,\dots,a_k)$ unde $a_1=i$, $a_2=\sigma(i)$

$a_3=\sigma(a_2)=\sigma(\sigma(i))$

$\vdots$

$a_k=\sigma(a_{k-1})=\sigma^{k-1}(i)$

$\sigma(a_k)=i$

Pas 3: scriem $\sigma=(a_1,a_2,\dots,a_k)\cdot\tau$, unde:

$$\tau(j)=\begin{cases}\sigma(j) & ,j\notin\{a_1,\dots,a_k\}\\ j & ,j\in\{a_1,\dots,a_k\}\end{cases}$$

Pas 4: aplicăm 1-3 pt. τ și așa mai departe

Exemplu:

În S_{14}, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14\\1&6&14&9&5&4&13&3&2&7&10&11&12&8\end{pmatrix}$

$=(2,6,4,9)\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14\\1&2&14&4&5&6&13&3&9&7&10&11&12&8\end{pmatrix}$

$=(2,6,4,9)\cdot(3,14,8)\cdot(7,13,12,11,10)$

$\operatorname{ord}\sigma=[4,3,5]=60$

Corolar:

Orice permutare este un produs de transpoziții.

Obs: Descompunerile permutărilor în produse de transpoziții NU sunt unice.

Obs: Dacă G este finit și considerăm tabla operației lui G
$\Rightarrow \forall g \in G$, t_g este permutarea mulțimii G descrisă de linia lui g

	h
	$\vdots$
g	$\dots\ gh$

Exemplu:
$D_3 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$

	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2

$rsr = sr^2 \cdot r = s$
$rsr^2 = sr^2 \cdot r^2 = sr$

$t_r = (1, r, r^2)(s, sr^2, sr)$

$t_s = (1, s)(sr, r)(r^2, sr^2)$

Aplicație (15-puzzle)

(1)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	GOL

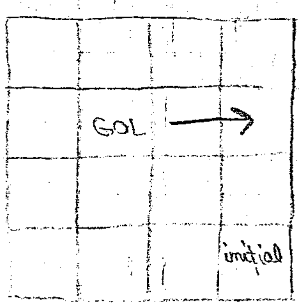
?

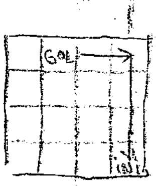
(2)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	GOL

NU se poate ajunge de la (2) la

GOL := 16
Orice aranjament este văzut ca o permutare din S_{16}
Definim:
n_S = distanța de la spațiul gol (GOL) la poziția lui inițială calculată astfel
- numerotăm numărul pătratelor de la GOL la dreapta și apoi în jos până ajungem la poziția inițială



S = 

$n_S = 5$

Observăm că la orice mutare, numărul:
$(-1)^{sgn S + n_S}$ rămâne constant