Algebră II
30 aprilie 2020

Seminar 9
— Inele —

Recapitulare:

- $(R, +, \cdot)$ este inel dacă:
  i) $(R, +)$ grup abelian
  ii) $(R, \cdot)$ semigrup
  iii) „$\cdot$" este distributivă față de „+": $\forall a, b, c \in R$:
$$\begin{cases} a(b+c) = ab + ac \\ (b+c)a = ba + ca \end{cases}$$
- Dacă, în plus, $(R, \cdot)$ este monoid, atunci R este inel cu unitate.
- Notație: 0 = el. neutru față de „+"
  1 = el. neutru față de „$\cdot$" (dacă $\exists$)
- Dacă $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ grup, atunci $(R, +, \cdot)$ este corp.
- Dacă „$\cdot$" este comutativă, atunci R este inel comutativ.

• $(R,+,\cdot)$ este un domeniu de integritate dacă: R este inel comutativ cu unitate și are loc implicația: $x, y \in R$ și $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$.

• Exemple: 1) Orice corp comutativ este d.i.

2) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ este d.i. care NU este corp.

3) $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ este inel comutativ cu unitate, dar NU este d.i. $(\hat{2}\cdot\hat{3} = \hat{0},\ \hat{2} \neq \hat{0} \neq \hat{3})$.

1 Fie p un nr. prim și $\mathbb{Z}_{(p)} \overset{\text{not.}}{=} \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ și } \text{c.m.m.d.c}(p; b) = 1 \right\}$

Dem. că $\mathbb{Z}_{(p)}$ este d.i. care NU este corp, în rap. cu op. „+" și „·".

Soluție: 1. Dem că $(\mathbb{Z}_{(p)},+)$ este grup abelian.

$\mathbb{Z}_{(p)} \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow$ este suficient să dem. că $\mathbb{Z}_{(p)} \leq \mathbb{Q}$.

• $0 = \frac{0}{1} \in \mathbb{Z}_{(p)}$ $(\text{cmmdc}(p;1) = 1)$

• fie $x, y \in \mathbb{Z}_{(p)}$, $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{a'}{b'}$, $(p;b) = (p;b') = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} x - y = \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{ab' - a'b}{bb'} \\ \text{Din } (p;b) = (p;b') = 1 \Rightarrow (p;bb') = 1 \end{array}\right| \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z}_{(p)}$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_{(p)} \leq \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ grup abelian.

2. Dem că $(\mathbb{Z}_{(p)}, \cdot)$ este semigrup.

Fie $x, y \in \mathbb{Z}_{(p)}$, $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{a'}{b'}$, $(p;b) = (p;b') = 1$

$\Downarrow$

$(p; bb') = 1$

$x \cdot y = \frac{aa'}{bb'}$

$\Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{Z}_{(p)}$

„$\cdot$" este asociativă în $\mathbb{Q}$, deci și în $\mathbb{Z}_{(p)}$ $\Bigg| \Rightarrow$

$(\mathbb{Z}_{(p)}, \cdot)$ semigrup.

3. „$\cdot$" este distributivă față de „$+$" în $\mathbb{Q}$, deci și în $\mathbb{Z}_{(p)} \Longrightarrow (\mathbb{Z}_{(p)}, +, \cdot)$ inel.

4. $1 = \frac{1}{1} \in \mathbb{Z}_{(p)}$ $(\text{cmmdc}(1;p) = 1) \Rightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ are unitate

5. „$\cdot$" este comutativă în $\mathbb{Q}$ deci și în $\mathbb{Z}_{(p)} \Rightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ com.

6. Fie $x, y \in \mathbb{Z}_{(p)}$ a.î. $x \cdot y = 0$

$\Downarrow$

$x, y \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ este d.i.

7. $p = \frac{p}{1} \in \mathbb{Z}_{(p)}$

Dacă $p \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{p}$. Dacă $\frac{1}{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow pa = b$ $\Rightarrow p \mid b \Rightarrow (p;b) = p \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{p} \notin \mathbb{Z}_{(p)} \Rightarrow p$ NU este inversabil în $\mathbb{Z}_{(p)} \Rightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ NU este corp.

(2*) Fie $(R,+,\cdot)$ un inel a.î. $\forall x \in R, x^3 = x$. S.s.a.c.

a) $\forall x \in R,\ 6x = 0$

b) $\forall x, y \in R,\ 2(xy - yx) = 0$

c) $\forall x \in R,\ 3(x^2 + x) = 0$

d) $\forall x, y \in R,\ 3(xy + yx) = 0$

e) R inel comutativ.

(3) Dem. că $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ este un d.i. în rap. cu op „+" și „·" și că $(A,+,\cdot)$ NU este corp.

Rezolvare:

1. $(A,+)$ grup ab. $\Leftrightarrow (A,+) \leq (\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),+)$.

• $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{pmatrix} \in A$.

• Fie $X, Y \in A$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$

$X - Y = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -(b-d) & a-c \end{pmatrix} \in A \Rightarrow (A,+)$ grup abelian.

2. Dem că $(A,\cdot)$ este semigrup.

Fie X, Y ca mai sus. $X \cdot Y = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} \in A$

„·" este asociativă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, deci și în A.

3. „·" este distributivă față de „+" în $M_2(\mathbb{Z})$ deci și în A.

4. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} \in A$ este el neutru față de „·".

5. Fie X, Y ca mai sus.

Calculăm $X \cdot Y$ și $Y \cdot X$ și constatăm $X \cdot Y = Y \cdot X$, $\forall X, Y \in A$

$\Rightarrow (A, +, \cdot)$ inel comutativ cu unitate.

6. Fie X, Y ca mai sus a.î. $X \cdot Y = O_2 \Rightarrow$

$\det(XY) = 0 \Rightarrow \underset{\in \mathbb{R}}{\det X} \cdot \underset{\in \mathbb{R}}{\det Y} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det X = 0$ sau $\det Y = 0$

Dacă $\det X = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0$, dar $a^2, b^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow X = O_2$.

Analog $\det Y = 0 \Rightarrow Y = O_2$.

Așadar $(A, +, \cdot)$ este un d.i.

7. Fie $X \in A$ P.p. că $\exists\, Y \in A$ a.î. $XY = I_2 \Rightarrow$

$\det(XY) = 1 \Rightarrow \underset{\in \mathbb{N}}{\det X} \cdot \underset{\in \mathbb{N}}{\det Y} = 1 \Rightarrow \det(X) = 1$.

Astfel, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in A$ NU este inv. în A (are det $5 \neq 1$)

$\Rightarrow$ A NU este corp.

④ a) Dem. că $C=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$ este un corp com. față de op „+" și „·".

b) Dem că $Q=\left\{\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \middle| u,v\in\mathbb{C}\right\}$ este un corp necom.

Rezolvare:

a) $(C,+,\cdot)$ inel comutativ cu unitate analog cu probl. ③

Rămâne să dem că $\forall X\in C\setminus\{O_2\}$, X este inversabil și $X^{-1}\in C\setminus\{O_2\}$.

Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\neq O_2 \Rightarrow a\neq 0$ sau $b\neq 0$

X inversabil $\Leftrightarrow \det X\neq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0$ sau $b\neq 0$. (A)

$$X^{-1}=\frac{1}{\det X}\cdot X^{*}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ -\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right) & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}\in C\setminus\{O_2\}$$

$\Rightarrow (C,+,\cdot)$ corp comutativ.

<u>Obs.</u> a) Notăm $I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall X\in C$ avem că $\exists!\, a,b\in\mathbb{R}$ a.î. $X=a\cdot I_2+b\cdot I$, iar $I^2=-I_2 \Rightarrow$

$C\simeq$ corpul nr. complexe.

b) $I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\in Q$

$\forall X\in Q$ avem că $\exists!\, a,b,c,d\in\mathbb{R}$ a.î. $X=aI_2+bI+cJ+dK$

$\{\pm I_2, \pm I, \pm J, \pm K\}$ este un grup izomorf cu gr. cuaternionilor $\{\pm 1, \pm i; \pm j, \pm k\}$. Q s.n. corpul cuaternionilor. $\{a+bi+cj+dk \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$

(5) Fie $(R,+,\cdot)$ un inel a.î. $\forall x \in R$, $x^2 = x$. (inel Boole)

Dem că a) $\forall x \in R$, $2x = 0$

b) R este comutativ.

Rezolvare:

a) $(2x)^2 = 2x$

$(2x)^2 = (x+x)^2 = x^2 + x\cdot x + x\cdot x + x^2 = 4x^2 = 4x$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 4x \Rightarrow 2x = 0$.

b) Vrem $\forall x,y \in R$, $xy = yx$.

Fie $x,y \in R$ arbitrare. $(x^2 = x,\ y^2 = y)$

$(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$

$(x+y)^2 = x + y$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow xy + yx = 0$

a) $\Rightarrow 2yx = 0 \Rightarrow yx = -yx$ $\Big| \Rightarrow xy - yx = 0 \Rightarrow xy = yx$

$\Rightarrow R$ comutativ

2* Rezolvare: $\forall x \in R, \ x^3 = x$

a) $\forall x \in R, \ 6x = 0$?

$$\left.\begin{array}{l}(2x)^3 = 8x^3 = 8x \\ (2x)^3 = 2x\end{array}\right| \Rightarrow 8x = 2x \Rightarrow 6x = 0, \forall x \in R.$$

b) $2(xy - yx) = 0, \ \forall x \in R$?

$$(x+y)^3 = (x+y)(x^2 + xy + yx + y^2) =$$

$$= \underline{x^3} + x^2y + xyx + xy^2 + yx^2 + yxy + y^2x + \underline{\underline{y^3}}$$

$$(x+y)^3 = x + y = \underline{x^3} + \underline{\underline{y^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2y + xyx + xy^2 + yx^2 + yxy + y^2x = 0 \quad (1)$$

$$(x-y)^3 = (x-y)(x^2 - xy - yx + y^2)$$

$$= \underline{x^3} - x^2y - xyx + xy^2 - yx^2 + yxy + y^2x \underline{\underline{- y^3}}$$

$$(x-y)^3 = x - y = \underline{x^3} - \underline{\underline{y^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2y - xyx + xy^2 - yx^2 + yxy + y^2x = 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ și } (2) \xRightarrow{(+)} 2(xy^2 + yxy + y^2x) = 0 \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} y \cdot | \ (*) \Rightarrow 2(yxy^2 + \underline{y^2xy} + yx) = 0 \\ (*) \ | \cdot y \Rightarrow 2(xy + \underline{yxy^2} + \underline{y^2xy}) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow 2(xy - yx) = 0$$

...