Seminar 8

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $S \leq G$ un subgrup. Reamintim definiţiile:

$C_G(S) = \{g \in G \,/\, gs = sg, \forall s \in S\}$ (centralizatorul lui S)

$N_G(S) = \{g \in G \,/\, gS = Sg\}$ (normalizatorul lui S)

a) Demonstraţi că $C_G(S) \trianglelefteq N_G(S) \leq G$

b) Demonstraţi că $S \trianglelefteq N_G(S)$ şi $N_G(S)$ este cel mai mare subgrup al lui G în care S este subgrup normal.

Soluţie. a) $1 S = S = S \cdot 1 \implies 1 \in N_G(S)$

Dacă $g, h \in N_G(S)$ atunci $ghS = g(hS) = g(Sh) = (gS)h = Sgh$ şi

$g^{-1} \,/\, gS = Sg \,/\, \cdot g^{-1} \implies S\cdot g^{-1} = g^{-1}S$ deci $gh \in N_G(S)$ şi $g^{-1} \in N_G(S)$.

Deci $N_G(S) \leq G$.

Mai departe este clar că dacă $gs = sg$, $\forall s \in S$ atunci $gS = Sg$ deci

$C_G(S) \subseteq N_G(S)$.

Mai mult $1s = s\cdot 1$, $\forall s \in S \implies 1 \in C_G(S)$ şi dacă $g, h \in C_G(S)$

atunci $(gh)s = g(hs) = g(sh) = (gs)h = (sg)h = s(gh)$ şi

$g^{-1} \,/\, gs = sg \,/\, g^{-1} \implies sg^{-1} = g^{-1}s$ pt. orice $s \in S$

$\implies gh \in C_G(S)$, $g^{-1} \in C_G(S)$

În plus pt. orice $g \in N_G(S)$ şi orice $x \in C_G(S)$ avem $gS = Sg$ deci

dacă $s \in S$ atunci $\exists s' \in S$: $gs = s'g \implies s\cdot g^{-1} = g^{-1}s'$. Atunci

$g^{-1}xgs = g^{-1}xs'g = g^{-1}s'xg = sg^{-1}xg$ deci $g^{-1}xg \in C_G(S)$.

ceea ce arată că $C_G(S) \trianglelefteq N_G(S)$.

Obs. Până aici nu am folosit faptul că S este subgrup, ci doar că $S \subseteq G$ este o submulţime

b) Este clar că $\forall s \in S$ avem $sS = S = Ss$ (aici se foloseşte $S \leq G$)

deci $s \in N_G(S)$ ceea ce arată că $S \leq N_G(S)$.

Mai departe pt. orice $g \in N_G(S)$ avem prin definiţie $gS = Sg$ deci

$S \trianglelefteq N_G(S)$; dacă $H \leq G$ astfel încât $S \trianglelefteq H$ atunci pentru orice $h \in H$ avem $hS = Sh$ deci $h \in N_G(S)$, ceea ce arată că $H \subseteq N_G(S)$.

2. Demonstrați că intersecția a două subgrupuri normale este subgrup normal.

Soluție. Știm că intersecția a două subgrupuri este subgrup. Fie $H \trianglelefteq G$ și $K \trianglelefteq G$ două subgrupuri normale. Dacă $x \in H \cap K$ și $g \in G$ atunci $g^{-1}x \cdot g \in H$ și $g^{-1}xg \in K$ deci $g^{-1}x \cdot g \in H \cap K$ ceea ce arată că $H \cap K \trianglelefteq G$.

Întrebare: Rămâne proprietatea de mai sus adevărată pentru intersecția unei familii oarecare de subgrupuri normale?

Grupuri finite

3. Să se arate că dacă G este un grup cu $|G| = p^2$, unde p este un număr prim atunci G este comutativ.

<u>Soluție</u> Știm că $Z(G) \neq \{1\}$ pentru că G este un p-grup (a se vedea o consecință a ecuației claselor prezentată în curs). Așadar teorema lui Lagrange ne spune că $|Z(G)| \in \{p, p^2\}$.

Presupunem că $|Z(G)| = p$. Cum $Z(G) \trianglelefteq G$, există grupul factor $G/Z(G)$ și $|G/Z(G)| = \frac{p^2}{p} = p$, deci $G/Z(G)$ este ciclic. În acest caz G este comutativ (a se vedea exercițiul 5 din seminarul 7), deci $G = Z(G)$ ceea ce contrazice $|Z(G)| = p$.

Prin urmare singurul caz posibil este $|Z(G)| = p^2$, deci $Z(G) = G$, adică G este comutativ.

4. Să se determine toate grupurile cu 6 elemente (până la un izomorfism).

<u>Soluție</u>. Fie G un grup cu $|G| = 6$.

Conform teoremei lui Cauchy $\exists x \in G$ cu $ord(x) = 3$ și $\exists y \in G$ cu $ord(y) = 2$. Atunci $\langle x \rangle = \{1, x, x^2\}$ cu $ord(x^2) = 3$ deci $y \notin \langle x \rangle$ și $\langle x \rangle \trianglelefteq G$ (fiind un subgrup de indice 2). Deci

$G = \langle x \rangle \cup y\langle x \rangle = \{1, x, x^2, y, yx, yx^2\}$.

Deoarece $\langle x \rangle$ este normal $xy \in y\langle x \rangle$ deci avem trei cazuri

I. $xy = y \;|\cdot y^{-1} \Rightarrow x = 1$ imposibil

II. $xy = yx \Rightarrow G$ este comutativ și deci $x^i y^j \cdot x^k y^t = x^{i+k} y^{j+t}$ unde suma exponenților lui x se face modulo 3 iar a exponenților lui y modulo 2. Atunci $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6$

Alt argument $ord(x \cdot y) = c.m.m.m.c(2,3) = 6 \Rightarrow x \cdot y$ este un generator pt. $G \Rightarrow G$ ciclic $\Rightarrow G \cong (\mathbb{Z}_6, +)$

III. $xy = yx^2$; în acest caz $G = \langle x, y \mid x^3 = 1 = y^2, xy = yx^2 \rangle \cong D_3$.
Deci am obținut două grupuri de ordin 6 și anume: $(\mathbb{Z}_6, +)$ și D_3.

5 Să se determine toate grupurile cu 9 elemente.

Soluție Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $|G| = 9 = 3^2$; am văzut că orice astfel de grup este comutativ.

Din teorema lui Cauchy există $x \in G$ cu $ord(x) = 3$. Atunci $\langle x \rangle = \{1, x, x^2\}$ este un subgrup normal al lui G pentru că orice subgrup al unui grup comutativ este normal

$$\left.\begin{array}{l} |G/\langle x \rangle| = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow G/\langle x \rangle \cong (\mathbb{Z}_3, +) \\ \text{Pentru orice } y \in G \text{ avem } y\langle x \rangle \in G/\langle x \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow (y\langle x \rangle)^3 = \langle x \rangle.$$

Deci $y^3 \in \langle x \rangle = \{1, x, x^2\}$

Dacă există $y \in G$ a.î. $y^3 = x$ sau $y^3 = x^2$ atunci $ord(y) \neq 3$ deci $ord(y) = 9$ (pt. că $ord(y) \in \{1, 3, 9\}$ și $y \neq 1$ deci $ord(y) \neq 1$)

Prin urmare $|\langle y \rangle| = 9 \Rightarrow \langle y \rangle = G \Rightarrow G$ este ciclic $\Rightarrow G \cong (\mathbb{Z}_9, +)$

Dacă pt. orice $y \in G$ avem $y^3 = 1$ atunci fixăm $y \in G \setminus \langle x \rangle$ și $G/\langle x \rangle = \{\langle x \rangle, y\langle x \rangle, y^2\langle x \rangle\}$ de unde

$$G = \langle x \rangle \cup y\langle x \rangle \cup y^2\langle x \rangle = \{1, x, x^2, y, yx, yx^2, y^2, y^2x, y^2x^2\}$$

Este clar că $x^i y^j \cdot x^k y^t = x^{i+k} y^{j+t}$ unde adunările exponenților se fac modulo 3 (grupul este comutativ) deci

$$G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

Prin urmare există două grupuri cu 9 elemente și anume $(\mathbb{Z}_9, +)$ și $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, +)$.

6. Demonstrați că dacă H și K sunt subgrupuri finite ale lui G, și $(|H|,|K|)=1$ atunci $H\cap K=\{1\}$.

Soluție Din teorema lui Lagrange $|H\cap K| \mid |H|$ (pentru că $H\cap K\leq H$) și analog $|H\cap K| \mid |K|$. Deci

$$|H\cap K| \mid (|H|,|K|)=1 \Rightarrow |H\cap K|=1 \Rightarrow H\cap K=\{1\}.$$

7. Determinați toate grupurile cu 8 elemente (până la un izomorfism).

Soluție Fie G un grup cu 8 elemente. G are un singur elem. de ordin 1, anume elem. neutru deci $ord(x)\in\{2,4,8\}$ pt. orice $x\in G\setminus\{1\}$. (am aplicat teorema lui Lagrange care spune că $ord(x)=|\langle x\rangle|$ divide $|G|=8$)

Dacă $\exists x\in G$ cu $ord(x)=8$ atunci $|\langle x\rangle|=8$ deci $\langle x\rangle=G$. Atunci grupul G este ciclic, de unde $G\cong(\mathbb{Z}_8,+)$.

Dacă $ord(x)=2$, $\forall x\in G\setminus\{1\}$ atunci G este comutativ (vezi un exercițiu din seminarul 1). Mai mult $G\cong\mathbb{Z}_2^3$ ca $\mathbb{Z}_2$-sp. vectoriale (v. exercițiul 6 din seminarul 5) deci $G\cong\mathbb{Z}_2^3$ ca grupuri.

Rămâne de studiat cazul în care $\exists x\in G$ cu $ord(x)=4$ dar $\nexists x\in G$ cu $ord(x)=8$ (deci G nu este ciclic). Atunci

$|\langle x\rangle|=ord(x)=4$ și $|G:\langle x\rangle|=2 \Rightarrow \langle x\rangle\trianglelefteq G$ (orice subgrup de indice 2 este normal).

Este clar că $\langle x\rangle=\{1,x,x^2,x^3\}$. Fie $y\in G\setminus\langle x\rangle$. Atunci

$G=\langle x\rangle\cup y\langle x\rangle=\{1,x,x^2,x^3,y,yx,yx^2,yx^3\}$ (pentru că reuniunea tuturor claselor de echivalență modulo $\rho_{\langle x\rangle}$ acoperă G) și $y\langle x\rangle=\langle x\rangle y$ (pt. că $\langle x\rangle\trianglelefteq G$). Deci

$$xy\in y\langle x\rangle=\{y,yx,yx^2,yx^3\}.$$

Observăm în plus că din $y^2=yx^i$, $0\leq i\leq 3$ ar rezulta prin înmulțire cu y^{-1} la stânga $y=x^i\in\langle x\rangle$ ceea ce contrazice $y\in G\setminus\langle x\rangle$.

Deci $y^2\in\langle x\rangle$. Dacă am avea $y^2\in\{x,x^3\}$ atunci $ord(y)=8$ ceea ce contrazice faptul că G nu este ciclic.

Deci $y^2\in\{1,x^2\}$ și pentru $y^2=1$ avem $ord(y)=2$ și pt. $y^2=x^2$ avem $ord(y)=4$.

Din $xy \in y\langle x\rangle$ obținem 4 cazuri:

I. $xy = y \mid \cdot y^{-1} \Rightarrow x=1$ nu convine

II. $xy=yx$. Atunci G este comutativ.

II a). Dacă $y^2=1$ atunci putem completa tabla grupului G astfel $x^i y^j \cdot x^s y^t = x^{i+s} \cdot y^{j+t}$ unde adunarea exponenților lui x se face modulo 4 iar cea a exponenților lui y se face modulo 2. Deci $G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

II b). Dacă $y^2 = x^2$ atunci notăm $z = xy \in G \setminus \langle x\rangle$ și avem $xz = zx$, $z^2 = x^2y^2 = x^4 = 1$, deci z joacă exact același rol ca și y din cazul II a). Așadar $G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ și în acest caz.

III. $xy = y^2x$. Cum $y^2 \in \{1, x^2\} \in \langle x\rangle$ rezultă $xy \in \langle x\rangle$ ceea ce este imposibil.

IV. $xy = y^3x$.

IV a) Dacă $y^2=1$ atunci $G = \langle x,y \mid x^4=1=y^2,\ xy=y^3x\rangle \cong D_4$.

IV b) Dacă $y^2=x^2$ atunci notăm $i=x$, $j=y$, $k=xy$, $-1=i^2=j^2$ și completăm tabla $\Longrightarrow G \cong H$ (gr. quaternionilor).

In concluzie există 5 grupuri diferite cu 8 elemente:
- trei comutative $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2^3 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$
- două necomutative D_4 și H.

8. Demonstrați că orice grup de ordin 15 este ciclic.

<u>Soluție</u>. $15 = 5\cdot 3$ cu 5 și 3 numere prime deci dacă G este un grup cu 15 elemente atunci $\exists\, x, y \in G$ cu $ord(x) = 5$, $ord(y) = 3$. (din prima teoremă a lui Sylow)

Este clar atunci că $|G : \langle x\rangle| = \frac{15}{5} = 3$.

Dacă notăm cu n_5 numărul subgrupurilor cu 5 elemente, atunci a doua teoremă a lui Sylow ne spune că $n_5 \equiv 1 \pmod 5$ și că $n_5 \mid 15$. Prin urmare $n_5 = 1$. Așadar G are un singur subgrup de ordin 5, care subgrup este obligatoriu normal (pentru că toate subgrupurile Sylow sunt conjugate). Este clar că $\langle x\rangle = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ nu conține elemente de ordin 3,

deci $y \notin \langle x \rangle$ și $y^2 \notin \langle x \rangle$, deci $y\langle x \rangle \neq \langle x \rangle$ și $y^2\langle x \rangle \neq \langle x \rangle$.
Mai mult dacă am presupune $y^2\langle x \rangle = y\langle x \rangle$ înmulțind cu y la stânga am obține $\langle x \rangle = y^2\langle x \rangle$ ceea ce este fals.
Deci $G = \langle x \rangle \cup y\langle x \rangle \cup y^2\langle x \rangle$ cu $x^5 = 1 = y^3$.
Repetând raționamentul anterior $n_3 \equiv 1 \pmod 3$ și $n_3 \mid 15$
deci $n_3 = 1$ ceea ce arată că $\langle y \rangle \trianglelefteq G$. Atunci

$$\left.\begin{array}{l} xy \in \langle x \rangle y = y\langle x \rangle = \{y, yx, yx^2, yx^3, yx^4\} \\ xy \in x\langle y \rangle = \langle y \rangle x = \{y, yx, y^2x\} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$xy \in \{y, yx, yx^2, yx^3, yx^4\} \cap \{y, yx, y^2x\}.$$

Am văzut că $y^2x \notin y\langle x \rangle$, deci $xy \in \{y, yx\}$. Este clar că $xy = y$, conduce la contradicția $x = 1$. Deci $xy = yx$, de unde grupul G este comutativ. Mai mult

$$G \cong \{x^i y^j \mid 0 \le i \le 4,\ 0 \le j \le 2\}$$

iar adunarea exponenților se face modulo 5, respectiv 3.
Deci $G \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$ iar $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{15}$ (v. seminarul 6)