Algebră II
12 martie 2020

Seminar 3
— Morfisme de grupuri —

(1) Fie p un număr prim și

$$G_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ pb & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \,\middle|\, a^2 - p\cdot b^2 \neq 0 \right\}$$

a) Demonstrați că G_p este grup în raport cu înmulțirea matricilor.

b) Determinați un morfism de la $(G_p, \cdot)$ la $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Soluție: a) 1) Demonstrăm că înmulțirea matricilor este o lege de compoziție internă pe G_p.

Fie $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ pb_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ pb_2 & a_2 \end{pmatrix} \in G_p$. Vrem $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ pb_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ pb_2 & a_2 \end{pmatrix} \in G_p$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ pb_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ pb_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a_1a_2 + pb_1b_2} & \underline{\underline{a_1b_2 + a_2b_1}} \\ p(\underline{\underline{a_1b_2 + a_2b_1}}) & \underline{a_1a_2 + pb_1b_2} \end{pmatrix}.$$

(vezi ~13~)

Pp. R.A. că $(a_1a_2 + pb_1b_2)^2 - p(a_1b_2 + a_2b_1)^2 = 0$

$\Rightarrow (a_1a_2 + pb_1b_2)^2 = p(a_1b_2 + a_2b_1)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{a_1a_2+pb_1b_2}_{\in\mathbb{Q}} = \underbrace{\sqrt{p}}_{\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\underbrace{(a_1b_2+a_2b_1)}_{\in\mathbb{Q}} \Rightarrow$$

pt că p este nr prim

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1a_2+pb_1b_2=0 & (2) \\ a_1b_2+a_2b_1=0. \Rightarrow a_1b_2=-a_2b_1 & (1) \end{cases}$$

- Dacă $a_2=0 \Rightarrow \begin{cases} pb_1b_2=0 \\ a_1b_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1=0 \text{ sau } b_2=0 \\ b_2=0 \text{ sau } a_1=0. \end{cases}$

  - Dacă $b_2=0 \Rightarrow a_2^2-pb_2^2=0$ contradicție cu $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ pb_2 & a_2 \end{pmatrix} \in G_p$.
  - Dacă $b_2\neq 0 \Rightarrow b_1=0$ și $a_1=0 \Rightarrow a_1^2-pb_1^2=0$ contradicție cu $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ pb_1 & a_1 \end{pmatrix} \in G_p$.

- Așadar $a_2\neq 0$. Analog $b_2\neq 0$.

  $(1)\ \Big|:a_2b_2 \Rightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=-\dfrac{b_1}{b_2}=\lambda\in\mathbb{Q} \Rightarrow \begin{cases} a_1=\lambda a_2 \\ b_1=-\lambda b_2. \end{cases}$

Înlocuind în (2) obținem $\lambda a_2^2-\lambda pb_2^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda\underbrace{(a_2^2-pb_2^2)}_{\neq 0 \text{ pt că } \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ pb_2 & a_2 \end{pmatrix}\in G_p}=0 \quad \Big| \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow a_1=b_1=0$ contradicție cu $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ pb_1 & a_1 \end{pmatrix}\in G_p$.

Așadar $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ pb_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ pb_2 & a_2 \end{pmatrix}\in G_p$.

2) Înmulțirea matricilor este asociativă pe $M_2(\mathbb{Q})$
$\Rightarrow$ este asociativă și pe $G_p \subseteq M_2(\mathbb{Q})$

3) $\cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{\underline{0}} \\ p\cdot\underline{\underline{0}} & \underline{1} \end{pmatrix}$, iar $1^2 - p\cdot 0^2 = 1 \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow I_2 \in G_p$. Prin urmare I_2 este elem. neutru în G_p.

4). Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ pb & a \end{pmatrix} \in G_p$. Vrem să $\exists A^{-1}$ și $A^{-1} \in G_p$.

$A \in G_p \Rightarrow \underbrace{a^2 - pb^2}_{\det A} \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 - pb^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -pb & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2-pb^2} & \frac{-b}{a^2-pb^2} \\ p\frac{-b}{a^2-pb^2} & \frac{a}{a^2-pb^2} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \in G_p.$$

Clar $\det A^{-1} \neq 0$. (și A^{-1} este inversabilă)

Prin urmare $(G_p, \cdot)$ este grup.

b) Fie $f : (G_p, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $f(A) = \det A$, $\forall A \in G_p$

Dacă $A \in G_p \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow f$ este bine definită.

Fie $A, B \in G_p$.

$f(A\cdot B) = \det(AB) = \det A \cdot \det B = f(A)\cdot f(B)$

$\Rightarrow f$ morfism de grupuri. ▲

② Demonstrați că rezultatul compunerii a două morfisme este morfism.

Soluție: Fie $(G_1, *_1), (G_2, *_2), (G_3, *_3)$ 3 grupuri.

Fie $f: G_1 \to G_2$ și $h: G_2 \to G_3$ morfisme.

Vrem $h \circ f : G_1 \to G_3$ morfism.

Fie $x, y \in G_1$

$$(h\circ f)(x *_1 y) = h(f(x *_1 y)) \overset{f \text{ morfism}}{=\!=} h(f(x) *_2 f(y))$$

$$\overset{h \text{ morfism}}{=\!=} h(f(x)) *_3 h(f(y)) = (h\circ f)(x) *_3 (h\circ f)(y)$$

Așadar $h\circ f$ este morfism. ▲

③ Demonstrați că următoarele perechi de grupuri NU sunt izomorfe:

(a) $(\mathbb{C}, +)$ și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

(b) $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{R}^*, \cdot)$

(c) $(\mathbb{Q}, +)$ și $(\mathbb{Q}^*_+, \cdot)$

(d) $(\mathbb{Q}, +)$ și $(\mathbb{Z}, +)$

(e) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

(f) $(\mathbb{Q}, +)$ și $(\mathbb{R}, +)$.

Soluție: (a) Pp. că $\exists\, f: (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ izomorfism.

$$\left.\begin{array}{l} -1 \in \mathbb{C}^* \\ f \text{ surjectivă} \end{array}\right| \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{C} \text{ a.î. } f(x) = -1$$

$f(2x) = f(x+x) \xlongequal{f \text{ morf.}} f(x)\cdot f(x) = (-1)\cdot(-1) = 1$

dar 1 este elem. neutru în $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

$f : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ izomorfism $\Rightarrow f$ inj și $f(0) = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x$ este elem. neutru în $(\mathbb{C}, +) \Rightarrow 2x = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$f(x) = -1$ $\Rightarrow f(0) = -1$, dar $f(0) = 1$ contradicție.

(b) Analog (a).

(c) Pp că $\exists\, f : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$ izomorfism $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{Q}$ și $f(x) = 2$.

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{x}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) \in \mathbb{Q}_+^*$. (1)

$2 = f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \xlongequal{f \text{ morf}} f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \xRightarrow{f \to \mathbb{Q}_+^*}$

$f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2} \xRightarrow{(1)} \sqrt{2} \in \mathbb{Q}_+^*$ contradicție

(d) Singurul morfism de la $(\mathbb{Q}, +)$ la $(\mathbb{Z}, +)$ este cel constant nul $\Rightarrow$ NU poate fi injectiv $\Rightarrow$ NU $\exists$ izomorfism

Explicație: Fie $f : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ morfism. Fie $a \in \mathbb{Q}$.

$f(a) \xlongequal{not} z \in \mathbb{Z}$. Pp. RA că $z \neq 0 \Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{N}^*$ a.î. $b \nmid z$.

$f\left(\frac{a}{b}\right) \xlongequal{not} k \in \mathbb{Z} \Rightarrow bk = b\, f\left(\frac{a}{b}\right) = \underbrace{f\left(\frac{a}{b}\right) + \ldots + f\left(\frac{a}{b}\right)}_{b \text{ ori}} \xlongequal{f \text{ morf}}$

$= f\left(\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ldots+\frac{a}{b}}_{b \text{ ori}}\right) = f\left(b\,\frac{a}{b}\right) = f(a) = z \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\in \mathbb{N}^* \in \mathbb{Z}}{bk} = \underset{\in \mathbb{Z}}{z} \Rightarrow b \mid z$ contradicție cu $b \nmid z$.

Așadar $z = 0 \Rightarrow f(a) = 0,\ \forall a \in \mathbb{Q}$.

(e) P.p. că $\exists\, f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ izomorfism $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}^*$ ai $f(x) = i$

$f(x^2) = f(x \cdot x) \xlongequal{f \text{ morf}} f(x) f(x) = i \cdot i = -1$.

$f(-1) \xlongequal{\text{not}} k \Rightarrow [f(-1)]^2 = k^2 \xRightarrow{f \text{ morf}} f((-1)^2) = k^2 \Rightarrow$

$f(1) = k^2$

f morf $\Rightarrow f(1) = 1$ $\Big| \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k \in \{\pm 1\}$.

f inj, $f(1) = 1 \Rightarrow f(-1) \neq 1 \Rightarrow k \neq 1$. $\Big/ \Rightarrow k = -1$.

Așadar $f(-1) = -1$, dar și $f(x^2) = -1 \xRightarrow{f \text{ inj}} x^2 = -1$.

, dar $x \in \mathbb{R}^*$ contradicție

(f) P.p. că $\exists\, f : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ izomorfism. (vezi ~13~)

$f(1) \xlongequal{\text{not}} c$

Fie $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n) = f(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ ori}}) \xlongequal{f \text{ morf}} \underbrace{f(1) + \ldots + f(1)}_{n \text{ ori}} = n f(1) = n \cdot c$

$(*) \begin{cases} f(0) \xlongequal{\text{morf}} 0 = 0 \cdot c \\ 0 = f(0) = f(n-n) \xlongequal{f \text{ morf}} f(n) + f(-n) = nc + f(-n) \Rightarrow f(-n) = -n \cdot c \end{cases}$

Așadar $f(z) = z \cdot c,\ \forall z \in \mathbb{Z}$.

$c = f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ ori}}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ ori}} =$

$= n f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot c.$

Fie $m \in \mathbb{N}^*$.

$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{\text{de } m \text{ ori}}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{n}\right)}_{m \text{ ori}} = m f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} \cdot c$

$\Rightarrow f(q) = q \cdot c, \forall q \in \mathbb{Q}^*_+$

Analog $(*) \Rightarrow f(q) = q \cdot c, \forall q \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \xrightarrow{f \text{ surj}} \exists x \in \mathbb{Q}$ ai $f(x) = \sqrt{2}$ $\Bigg/ \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\in \mathbb{Q}}{x} \cdot c = \underbrace{\sqrt{2}}_{\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \Bigg| \Rightarrow c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$

$1 \in \mathbb{R} \xrightarrow{f \text{ surj}} \exists y \in \mathbb{Q}$ ai $f(y) = 1 \Rightarrow \underset{\in \mathbb{Q}}{y} \cdot c = \underset{\in \mathbb{Q}}{1} \Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow c \in \mathbb{Q}$ contradicție. ▲

4) a) Fie $(G, \cdot)$ un grup. Demonstrați că o funcție $f : (\mathbb{Z}, +) \to (G, \cdot)$ este un morfism de grupuri dacă și numai dacă $\exists g \in G$ a.î. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k) = g^k$

b) Dem. că $f : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}, +)$ este morfism de grupuri $\Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Q}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = \alpha \cdot x$.

Soluție:

a) „$\Longrightarrow$" Notăm $g = f(1)$

Fie $k \in \mathbb{Z}$

Caz I $k > 0 \Rightarrow f(k) = f(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{k \text{ ori}}) \overset{f \text{ morf}}{=\!=} \underbrace{f(1) \cdot \ldots \cdot f(1)}_{k \text{ ori}} =$

$= [f(1)]^k = g^k$.

Caz II $k = 0 \Rightarrow f(k) = 1 = g^0 = g^k$

Caz III $k < 0 \Rightarrow f(k) = f(-(-k)) = [f(\underbrace{-k}_{>0})]^{-1} = [g^{-k}]^{-1} = g^k$

Așadar $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $f(k) = g^k$.

„$\Longleftarrow$" Fie $x, y \in \mathbb{Z}$

$f(x+y) = g^{x+y} = g^x \cdot g^y = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow f$ morfism.

b) „$\Longrightarrow$" Notăm $\alpha = f(1)$

Analog cu ex. 3 (f) $\Rightarrow f(x) = \alpha x$, $\forall\, x \in \mathbb{Q}$.

„$\Longleftarrow$". Fie $x, y \in \mathbb{Q}$.

$f(x+y) = \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y = f(x) + f(y) \Rightarrow$

f morfism.

▲

5 a) Demonstrați că grupurile $(\mathbb{Z}_{12},+)$ și $(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4,+)$ sunt izomorfe.

b) Generalizare: Dacă $m,n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ și $(m;n)=1$ atunci $(\mathbb{Z}_{mn},+)\simeq(\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n,+)$.

Soluție: a) Fie $f:\mathbb{Z}_{12}\to\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4$

$$f(\hat{x})=(\bar{x},\tilde{x}),\ \forall\, x\in\mathbb{Z}.$$

1) Demonstrăm că f este bine definită.

Fie $\hat{x}=\hat{y}\in\mathbb{Z}_{12}$ Vrem $f(\hat{x})=f(\hat{y})$.

$\Downarrow$

$12\mid x-y$, dar $3,4\mid 12\Rightarrow 3\mid x-y$ și $4\mid x-y\Rightarrow$

$\bar{x}=\bar{y}$ și $\tilde{x}=\tilde{y}\Rightarrow(\bar{x},\tilde{x})=(\bar{y},\tilde{y})\Rightarrow f(\hat{x})=f(\hat{y})$.

2). Fie $\hat{x},\hat{y}\in\mathbb{Z}_{12}$.

$$f(\hat{x}+\hat{y})=f(\widehat{x+y})=(\overline{x+y},\widetilde{x+y})=(\bar{x}+\bar{y},\tilde{x}+\tilde{y})$$

$$=(\bar{x},\tilde{x})+(\bar{y},\tilde{y})=f(\hat{x})+f(\hat{y})\Rightarrow f\text{ morfism}.$$

3). Vrem f bijectivă.

- Fie $\hat{x},\hat{y}\in\mathbb{Z}_{12}$ a.î. $f(\hat{x})=f(\hat{y})\Rightarrow(\bar{x},\tilde{x})=(\bar{y},\tilde{y})$

$$\Rightarrow\begin{cases}\bar{x}=\bar{y}\\ \tilde{x}=\tilde{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\mid x-y\\ 4\mid x-y\end{cases}\xrightarrow{(3,4)=1}3\cdot4=12\mid x-y\Rightarrow\hat{x}=\hat{y}$$

$\Rightarrow f$ injectivă.

- $f: \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ injectivă
  $|\mathbb{Z}_{12}| = 12 = |\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4|$ $\Rightarrow f$ bijectivă.

b) Analog a) $\blacktriangle$

(6) Determinați morfismele de grupuri:

a) $(\mathbb{Z}_6, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_9, +)$

b) $(\mathbb{Z}_6, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_3, +)$

c) $(\mathbb{Z}_6, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_5, +)$

d) Generalizare: $(\mathbb{Z}_n, +) \to (\mathbb{Z}_m, +)$.

Soluție: a) Fie $f: (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{Z}_9, +)$ morfism.

Notăm $\bar{a} = f(\hat{1})$.

$f(\hat{k}) = ?$, $k = \overline{0,5} = \overline{1,6}$.

$f(\hat{k}) = f(\widehat{k \cdot 1}) = f(k \cdot \hat{1}) = f(\underbrace{\hat{1} + \hat{1} + \ldots + \hat{1}}_{k \text{ ori}}) \overset{f \text{ morf}}{=} \underbrace{f(\hat{1}) + \ldots + f(\hat{1})}_{k \text{ ori}} = k \cdot f(\hat{1}) = k \cdot \bar{a} = \overline{ka}$

Așadar $f(\hat{k}) = \overline{k \cdot a}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

f este bine definită $\Rightarrow$ [din $\hat{k} = \hat{r} \in \mathbb{Z}_6 \Rightarrow f(\hat{k}) = f(\hat{r})$]

În particular $f(\hat{0}) = f(\hat{6}) \Leftrightarrow \overline{0 \cdot a} = \overline{6 \cdot a} \Leftrightarrow$
$\overline{6a} = \overline{0} \Leftrightarrow 9 \mid 6a \Leftrightarrow 3 \mid 2a \xLeftrightarrow{(2,3)=1} 3 \mid a \Leftrightarrow$
$\exists b \in \mathbb{Z}$ a.î. $a = 3b$.

$\Rightarrow f(\hat{k}) = \overline{3kb}$, $\overline{b} \in \mathbb{Z}_9$.

Se verifică că $\underbrace{f \text{ este bine def}}_{①}$ și că $\underbrace{f \text{ morfism}}_{②}$.

① Fie $\hat{k} = \hat{r} \in \mathbb{Z}_6 \Rightarrow 6 \mid k - r$. Vrem $f(\hat{k}) = f(\hat{r})$
$\Leftrightarrow \overline{3kb} = \overline{3rb} \in \mathbb{Z}_9 \Leftrightarrow 9 \mid 3kb - 3rb \Leftrightarrow$
$9 \mid 3b(k-r) \Leftrightarrow 3 \mid b(k-r)$.
Dar $6 \mid k - r \Rightarrow 3 \mid k - r$. Așadar f bine definită

② Fie $\hat{k}, \hat{r} \in \mathbb{Z}_6$.
$f(\hat{k} + \hat{r}) = f(\widehat{k+r}) = \overline{3(k+r)b} = \overline{3kb + 3rb} = \overline{3kb} + \overline{3rb}$
$= f(\hat{k}) + f(\hat{r}) \Rightarrow f$ morfism.

b) Fie $f : (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{Z}_3, +)$ morfism.
Notăm $\bar{a} = f(\hat{1})$. Analog a) avem $f(\hat{k}) = \overline{k \cdot a}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.
Similar a) se verifică că f este bine def și morfism.

c) Fie $f:(\mathbb{Z}_6,+)\to(\mathbb{Z}_5,+)$ morfism.

Notăm $\bar{a}=f(\hat{1})$. Analog a) avem $f(\hat{k})=\overline{ka}, \forall k\in\mathbb{Z}$

f este bine def $\Rightarrow$ [din $\hat{k}=\hat{r}\in\mathbb{Z}_6 \Rightarrow f(\hat{k})=f(\hat{r})\in\mathbb{Z}_5$]

În particular $f(\hat{0})=f(\hat{6}) \Rightarrow \overline{0\cdot a}=\overline{6\cdot a} \Rightarrow$

$\bar{0}=\overline{6a} \Rightarrow 5\mid 6a \xRightarrow{(5,6)=1} 5\mid a \Rightarrow f(\hat{1})=\bar{0}$.

Așadar $f(\hat{k})=k\cdot\bar{0}=\bar{0}, \forall k\in\mathbb{Z}$. (morfismul ctnul)

d) Fie $f:(\mathbb{Z}_m,+)\to(\mathbb{Z}_n,+)$ morfism.

Notăm $\bar{a}=f(\hat{1})$ Analog a) avem $f(\hat{k})=\overline{ka}, \forall k\in\mathbb{Z}$.

Din bine-definire vom avea în particular

$f(\hat{0})=f(\hat{m}) \Rightarrow \overline{0\cdot a}=\overline{m\cdot a} \Rightarrow \overline{ma}=\bar{0} \Rightarrow n\mid ma$

Fie $d=\text{cmmdc}(m,n) \Rightarrow \exists\, m',n'\in\mathbb{Z}$ aî

$(m',n')=1$ și $m=dm'$, $n=dn'$.

$n\mid ma \Rightarrow dn'\mid dm'a \Rightarrow n'\mid m'a \xRightarrow{(n',m')=1} n'\mid a$.

$\Rightarrow \exists\, b\in\mathbb{Z}$ aî $a=n'b$. $\Rightarrow f(\hat{k})=\overline{n'bk}=\overline{\frac{n}{(n,m)}\cdot b\cdot k}$

$, \bar{b}\in\mathbb{Z}_m$. $\forall \hat{k}\in\mathbb{Z}_m$

Se verifică f bine def și f morfism analog a).

Observații:

1) Pentru problema ① a) 1) partea cu reducerea la absurd, se poate rezolva mai rapid pe ideea că $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

2) Pentru problema ③ f) se poate demonstra că $(\mathbb{Q}, +)$ și $(\mathbb{R}, +)$ NU sunt izomorfe pe ideea că au cardinalități diferite și prin urmare NU pot exista funcții bijective între cele 2.