Algebră II

21 mai 2020

Seminar 12
- Identități în inele -

① Fie $(R,+,\cdot)$ un inel cu unitate și $a,b \in R$. Dem. că $1-ab$ este inversabil $\Leftrightarrow$ $1-ba$ este inversabil.

<u>Rezolvare:</u> $1-ab$ este inversabil $\Leftrightarrow$

$\exists u \in R$ a.î. $(1-ab)u = u(1-ab) = 1$.

$(1-ab)u = 1 \Leftrightarrow u - abu = 1 \;|\, b\cdot \Rightarrow bu - babu = b \Rightarrow$

$\Rightarrow (1-ba)bu = b \Rightarrow (1-ba)bu - b = 0 \;|\cdot a \Rightarrow$

$(1-ba)bua - ba = 0 \;|+1 \Rightarrow (1-ba)bua + 1 - ba = 1 \Rightarrow$

$(1-ba)(bua+1) = 1$.

Analog din a 2-a egalitate $\Rightarrow (bua+1)(1-ba) = 1$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-ba$ este inversabil.

Din simetrie rezultă și afirmația reciprocă.

② Fie $(R,+,\cdot)$ un inel și $a,b \in R$ a.î. $ab = ba$. Dem. că are loc Binomul lui Newton:

$\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n$.

<u>Rezolvare:</u> temă (inducție matematică)

③ Fie $(R,+,\cdot)$ un inel cu unitate a.î. $\forall x\in R$, $x^{12}=x$.
Dem. că $\forall x\in R$, $x^2=x$.

Rezolvare: $\forall x\in R$, $x^{12}=x \Rightarrow \forall x\in R, \underbrace{(-x)^{12}}_{x^{12}=x}=-x \Rightarrow$

$\forall x\in R$, $x=-x \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow 2kx=0$, $(2k+1)x=x$, $\forall k\in\mathbb{Z}$

R inel cu unitate: Fie $x\in R$ avem $(x+1)^{12}=x+1$ și

$$(x+1)^{12}=C_{12}^{0}x^{12}+C_{12}^{1}x^{11}+\dots+C_{12}^{12}\cdot 1$$
$$=x^{12}+12\cdot x^{11}+\dots+1$$
$$=x^{12}+x^{8}+x^{4}+1.$$

Așadar $\underbrace{x^{12}}_{x}+x^8+x^4+\cancel{1}=x+\cancel{1} \Rightarrow x^8+x^4=0 \Rightarrow$

$x^8=-x^4=x^4 \;\big|\cdot x^4 \Rightarrow \underbrace{x^{12}}_{x}=x^8 \Rightarrow x=x^8 \Rightarrow x=x^4, \forall x\in R$

$\underset{x\to x^2}{\Rightarrow} x^2=(x^2)^4, \forall x\in R \Rightarrow x^2=x^8 \Rightarrow x=x^2, \forall x\in R$

④ Dacă „$*$" este o op. pe $\mathbb{Z}_n$ a.î. $(\mathbb{Z}_n,+,*)$ inel cu unitate, atunci $(\mathbb{Z}_n,+,*)\simeq(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$.

Rezolvare: Fie $\hat{e}$ unitatea din $(\mathbb{Z}_n,+,*)$

Construim un izomorfism de la $(\mathbb{Z}_n,+,*)$ la $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$

Fie $f:(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)\longrightarrow(\mathbb{Z}_n,+,*)$ a.î. $f(\hat{k})=k\cdot\hat{e}$.

Arătăm că f este bine definită. Fie $\hat{k},\hat{l}\in\mathbb{Z}_n$ a.î. $\hat{k}=\hat{l}$. Vrem $f(\hat{k})=f(\hat{l})$.

$\hat{k} = \hat{l} \Rightarrow n \mid k - l$ (1)

$f(\hat{k}) = f(\hat{l}) \Leftrightarrow k \cdot \hat{e} = l \cdot \hat{e} \Leftrightarrow \widehat{ke} = \widehat{le} \Leftrightarrow n \mid ke - le \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n \mid e(k-l)$ (2).

Din (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow f(\hat{k}) = f(\hat{l}) \Rightarrow f$ bine definită.

Arătăm că f este morfism: $f(\hat{k} + \hat{l}) = f(\hat{k}) + f(\hat{l})$
$f(\hat{k} \cdot \hat{l}) = f(\hat{k}) * f(\hat{l})$.

$f(\hat{k} + \hat{l}) = f(\widehat{k+l}) = (k+l)\hat{e} = k \cdot \hat{e} + l \cdot \hat{e} = f(\hat{k}) + f(\hat{l})$.

$$\left.\begin{aligned} f(\hat{k} \cdot \hat{l}) &= f(\widehat{k \cdot l}) = (k \cdot l)\hat{e} \\ f(\hat{k}) * f(\hat{l}) &= (k \cdot \hat{e}) * (l \cdot \hat{e}) = (k \cdot l)\hat{e} \end{aligned}\right| \Rightarrow f(\hat{k} \cdot \hat{l}) = f(\hat{k}) * f(\hat{l})$$

Arătăm că f este bijectivă.

$f: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, iar $|\mathbb{Z}_n| = n \Rightarrow$ este de ajuns să arătăm că f este injectivă $\Leftrightarrow \ker f = \{\hat{0}\}$.

Fie $\hat{k} \in \mathbb{Z}_n$ a.î. $f(\hat{k}) = \hat{0} \Rightarrow k \cdot \hat{e} = \hat{0} \mid * \hat{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (k \cdot \hat{e}) * \hat{1} = \underbrace{\hat{0} * \hat{1}}_{\hat{0}} \Rightarrow (\underbrace{\hat{e} + \hat{e} + \ldots + \hat{e}}_{k \text{ ori}}) * \hat{1} = \hat{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\hat{e} * \hat{1} + \ldots + \hat{e} * \hat{1}}_{k \text{ ori}} = \hat{0} \Rightarrow \underbrace{\hat{1} + \hat{1} + \ldots + \hat{1}}_{k \text{ ori}} = \hat{0} \Rightarrow k \cdot \hat{1} = \hat{0}$

$$\Rightarrow \hat{k} = \hat{0} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \ker f = \{\hat{0}\} \Rightarrow f &\text{ injectivă} \\ \mathbb{Z}_n &\text{ finită} \end{aligned}\right| \Rightarrow f \text{ bijectivă}.$$

Așadar f este un izomorfism $\Rightarrow (\mathbb{Z}_n, +, *) \simeq (\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.

⑤ Fie $(R,+,\cdot)$ un inel cu unitate. Un element $e \in R$ s.n. idempotent dacă $e^2 = e$. Dem. că:

a) e este idempotent $\Leftrightarrow$ $1-e$ este idempotent

b) Dacă nr-ul elem. idempotente din R este finit, at. el e par.

c) Calculați produsul elem. idemp. nenule din R.

d) Determinați elem. idemp. din $(\mathbb{Z}_{30},+,\cdot)$ și $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3),+,\cdot)$.

Rezolvare: a) Dacă e este idempotent $\Rightarrow e^2 = e$.

$$(1-e)^2 = (1-e)(1-e) = 1-e-e+\underbrace{e^2}_{e} = 1-e \Rightarrow 1-e \text{ idemp.} \quad (*)$$

Dacă $f = 1-e$ este idempotent $\xRightarrow{(*)}$ $\underbrace{1-f}_{}$ este idempotent

$= 1-(1-e) = 1-1+e = e.$

b) Fie $M = \{e \in R \mid e \text{ idempotent}\}$

Cnf a) avem că $M = \bigcup_{e \text{ idemp.}} \{e, 1-e\}$.

Dacă $\{e,1-e\} \cap \{f,1-f\} \neq \emptyset \xRightarrow{\text{cazuri}} \{e,1-e\} = \{f,1-f\}$

Dacă $e = 1-e \Rightarrow 2e = 1 \mid \cdot e \Rightarrow 2\underbrace{e^2}_{e} = e \Rightarrow 2e = e$

$\Rightarrow e = 0 \Rightarrow 0 = 1-0 \Rightarrow 0 = 1$ fals

$\Rightarrow$ concluzia

c) $e(1-e) = e-e^2 = e-e = 0$

I Dacă $\exists\, e \in R$ idempotent $e \notin \{0,1\} \Rightarrow 1-e \notin \{0,1\}$ $\Rightarrow$

$e(1-e) = 0$ va fi factor în produs (am dem că $e \neq 1-e$) $\Rightarrow$ produsul este 0.

$\underline{II}$ Dacă $\forall e \in R$ idempotent avem $e \in \{0,1\} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ produsul este 1.

d) Fie $\hat{k} \in \mathbb{Z}_{30}$ idempotent $\Leftrightarrow \hat{k}^2 = \hat{k} \Leftrightarrow 30 \mid k(k-1)$

$k \in \overline{0,29}$

dar $(k;k-1)=1$.

$30 = 2\cdot 3\cdot 5$

$\underline{I}$ $1 \mid k$ și $30 \mid k-1 \Rightarrow k-1=0 \Rightarrow k=1$.

$\underline{II}$ $\left.\begin{array}{l} 2 \mid k \Rightarrow k \in \{0,2,4,6,\dots,28\} \\ 15 \mid k-1 \Rightarrow k-1 \in \{0,15\} \Rightarrow k \in \{1,16\} \end{array}\right| \Rightarrow k = 16$.

$\underline{III}$ $3 \mid k$
$10 \mid k-1$ ...

$\underline{IV}$ $5 \mid k$
$6 \mid k-1$ ...

$\underline{V}$ $6 \mid k$
$5 \mid k-1$ ...

$\underline{VI}$ $10 \mid k$
$3 \mid k-1$ ...

$\underline{VII}$ $15 \mid k$
$2 \mid k-1$ ...

$\underline{VIII}$ $30 \mid k$
$1 \mid k-1$ ...

Temă $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

6 Fie R un inel și $Z(R)=\{x\in R \mid \forall y\in R: xy=yx\}$.

a) $Z(R)$ este un subinel în R (numit centrul lui R)

b) Dc $\forall x\in R$, $x^2-x\in Z(R)$, at. R este comutativ.

Rezolvare: a) temă

b) Fie $x,y\in R$.

Avem că $(x+y)^2-(x+y)\in Z(R)$

$$(x+y)^2-(x+y)=x^2+xy+yx+y^2-x-y$$

$$=\underbrace{x^2-x}_{\in Z(R)}+\underbrace{y^2-y}_{\in Z(R)}+xy+yx\in Z(R)$$

$\Rightarrow xy+yx\in Z(R) \Rightarrow (xy+yx)x=x(xy+yx)\Rightarrow$

$xyx+yx^2=x^2y+xyx \Rightarrow yx^2=x^2y,\ \forall y\in R\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow x^2\in Z(R)\\ x^2-x\in Z(R)\end{array}\right| \Rightarrow x^2-(x^2-x)\in Z(R)\Rightarrow x\in Z(R),\ \forall x\in R$$

$\Rightarrow R$ comutativ.

7 Fie R un inel. Un elem. $x\in R$ s.n. nilpotent dc. $\exists\, n\in\mathbb{N}^*$ a.î. $x^n=0$. Dem. că

a) Dacă x nilpotent și R inel cu unitate, at. $1\pm x$ este inv.

b) Dacă x,y nilpotente și $xy=yx$, at. $x+y$ și xy nilpotente

c) afirmațiile de la b) NU sunt valabile dc. $xy\neq yx$.

Rezolvare:

a) $(1-x)(1+x+\dots+x^{n-1}) = 1-x^n$

Dacă $x^n=0 \Rightarrow \begin{cases}(1-x)\cdot(1+x+\dots+x^{n-1})=1\\(1+x+\dots+x^{n-1})(1-x)=1\end{cases} \Rightarrow 1-x$ inv. $(*)$

x nilpotent $\Rightarrow -x$ nilpotent $\xRightarrow{(*)} 1-(-x)$ inv $\Rightarrow 1+x$ inv.

(deoarece x nilpotent $\Rightarrow x^n=0$ iar $(-x)^n=(-1)^n\cdot x^n=(-1)^n\cdot 0=0$).

b) Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$ a.î. $x^m=y^n=0$.

$(xy)^m \overset{xy=yx}{=} x^m\cdot y^m = 0\cdot y^m=0 \Rightarrow xy$ nilpotent

$(x+y)^k = x^k + C_k^1\cdot x^{k-1}\cdot y + C_k^2\cdot x^{k-2}\cdot y^2+\dots+C_k^{k-1}\cdot x\cdot y^{k-1}+y^k.$

Pt. $k=n+m \Rightarrow (x+y)^{n+m}=0+0+\dots+0=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+y)$ nilpotent.

c) În inelul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ luăm $x=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ și $y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

Avem $x^2=O_2=y^2 \Rightarrow x,y$ nilpotente.

$xy=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ și $yx=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow xy\neq yx$

$x+y=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $(x+y)^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+y)^n=\begin{cases}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, & \text{dc } n \text{ impar}\\ I_2, & \text{dc } n \text{ par}\end{cases} \Rightarrow (x+y)^n\neq O_2, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow x+y$ NU este nilpotent

$(xy)^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow (xy)^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq O_2, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow xy$ NU este nilpotent.