Seminar 11

Ideale

$(R,+,\cdot)$ inel, $I \subseteq R$

I se numește ideal dacă $\begin{cases} (i) & 0 \in I \\ (ii) & x, y \in I \Rightarrow x - y \in I \\ (iii) & x \in I,\ r \in R \Rightarrow xr \in I \text{ (drept)},\ rx \in I \text{ (stâng)} \end{cases}$

I ideal bilateral = ideal drept și stâng ⇝ inelul factor $(R/I, +, \cdot)$ (deoarece $(R,+)$ este abelian orice subgrup e normal!)

$R/I = \{r + I \mid r \in R\}$, $\quad r_1 + I = r_2 + I \iff r_1 = r_2$

$(r_1 + I) + (r_2 + I) = (r_1 + r_2) + I$

$(r_1 + I)(r_2 + I) = r_1 r_2 + I$

Exerciții 1). Să se determine idealele inelului $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ și inelele factor corespunzător.

Soluție. Știm că mulțimea subgrupurilor lui $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ este $\{n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$, unde $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Este clar că dacă $I \trianglelefteq R$ atunci I este subgrup în $(\mathbb{Z},+)$ deci $I = n\mathbb{Z}$ pt. un anumit $n \in \mathbb{N}$.

Reciproc dacă $I = n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ atunci arătăm că I este ideal:

- $0 = n \cdot 0 \in n\mathbb{Z}$
- $x, y \in n\mathbb{Z} \Rightarrow x = nk,\ y = nt,\ k, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - y = n(k-t) \in n\mathbb{Z}$
- $x \in n\mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = nk,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow rx = xr = n(kr) \in n\mathbb{Z}$

Deci mulțimea idealelor coincide cu mulțimea subgrupurilor și anume $\{n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Inelele factor corespunzătoare sunt

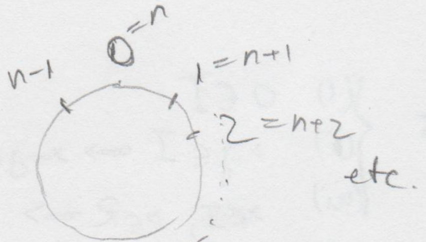
$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{r + n\mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{Z}\} = \{\hat{r} \mid r \in \mathbb{Z}\} = \{\hat{r} \mid 0 \le r \le n-1\} = \mathbb{Z}_n$$

(se știe de la grupuri că gr. factor ale lui $\mathbb{Z}$ sunt de această formă). În plus ele sunt și inele factor pt. că idealele coincid cu subgrupurile.

Obs 1) Notăm ca de obicei $\hat{a} = a + n\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$ și atunci $\hat{a} = \hat{b} \iff a - b \in n\mathbb{Z} \iff a$ și b dau același rest prin împărțirea la n. Atunci avem pt $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b} \quad \text{și} \quad \hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b}$$

(operațiile sunt bine definite!). Ele se pot reprezenta pe un "inel"



și pt. $a \in \mathbb{Z}$ plecăm de la 0 și parcurgem cercul în sensul acelor de ceasornic făcând a pași ($a > 0$) etc.

2) dacă $n = 0$ obținem $0\mathbb{Z} = \{0\}$, deci $a + 0\mathbb{Z} = b + 0\mathbb{Z}$ ddacă $a = b$ și $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z} = \{a + \{0\} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$.

3) dacă $n = 1$ obținem $1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ deci $a + 1\mathbb{Z} = b + 1\mathbb{Z}$ pt. orice $a, b \in \mathbb{Z}$ și $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}\} \cong 0$.

4) dacă $n \geq 2$ obținem $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$ (mulțimea resturilor posibile prin împărțirea la n)

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definim operațiile

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac, bd)$$

a) Demonstrați că $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ este un inel comutativ cu unitate

b) Care dintre următoarele submulțimi sunt ideale în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$A = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{(2a, 2b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{(2a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

$D = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$?

Pentru idealele găsite să se determine inelul factor.

<u>Soluție</u> a) temă

b) $A = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}\} \ntrianglelefteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Într-adevăr pentru $(1,2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ și $(1,1) \in A$ avem $(1,2)(1,1) = (1,2) \notin A$

Analog $C \ntrianglelefteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $D \ntrianglelefteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Temă: Arătați că A, C, D sunt subgrupuri în $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$.

Arătăm că $B \trianglelefteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

- $(0,0) = (2\cdot 0, 2\cdot 0) \in B$
- $x, y \in B \Rightarrow x = (2a, 2b),\ y = (2c, 2d),\ a,b,c,d \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$$x - y = (2(a-c), 2(b-d)) \in B$$
- $x \in B,\ z \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \Rightarrow x = (2a, 2b),\ z = (c, d),\ a,b,c,d \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$$xz = zx = (2ac, 2bd) \in B$$

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/B = \{(a,b) + B \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ unde

$(a,b) + B = (c,d) + B \Leftrightarrow (a-b, c-d) \in B \Leftrightarrow 2 \mid a-b$ și $2 \mid c-d$

$\Leftrightarrow$ (a și b au aceeași paritate) și (c și d au aceeași paritate)

Atunci pt. $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ avem patru cazuri:

I. $a, b \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow (a,b) + B = (0,0) + B = B$.

II. $a \in 2\mathbb{Z},\ b \in 2\mathbb{Z}+1 \Rightarrow (a,b) + B = (0,1) + B$.

III. $a \in 2\mathbb{Z}+1,\ b \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow (a,b) + B = (1,0) + B$.

IV. $a \in 2\mathbb{Z}+1,\ b \in 2\mathbb{Z}+1 \Rightarrow (a,b) + B = (1,1) + B$.

Așadar $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/B = \{(0,0)+B, (0,1)+B, (1,0)+B, (1,1)+B\} \simeq \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

3. Fie $T_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix} \mid a,b,d \in \mathbb{R}\right\}$, $I = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d\end{pmatrix} \mid b,d \in \mathbb{R}\right\}$, $J = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0\end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\right\}$.

Demonstrați că $T_2(\mathbb{R})$ este subinel în $M_2(\mathbb{R})$ dar nu este ideal. Verificați dacă I și J sunt ideale în $M_2(\mathbb{R})$ sau în $T_2(\mathbb{R})$, iar atunci când este posibil determinați inelul factor.

<u>Soluție</u>. Temă: $T_2(\mathbb{R})$ subinel în $M_2(\mathbb{R})$, dar

$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ $A\cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix} \notin T_2(\mathbb{R})$

deci $T_2(\mathbb{R}) \ntrianglelefteq M_2(\mathbb{R})$

Temă: Găsiți $B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X\cdot B \notin T_2(\mathbb{R})$

<u>Pentru</u> I: $\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \in I$

- $X, Y \in I \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y\end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & y'\end{pmatrix} \Rightarrow X - Y = \begin{pmatrix} 0 & x-x' \\ 0 & y-y'\end{pmatrix} \in I$
- pt. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \in I$ și $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ avem $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \notin I$

deci $I \not\trianglelefteq M_2(\mathbb{R})$.

• pt $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \in I$ oarecare și $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R})$ oarecare avem

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & ax+by \\ 0 & dy \end{pmatrix} \in I, \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & xd \\ 0 & yd \end{pmatrix} \in I \quad \text{deci } I \trianglelefteq T_2(\mathbb{R})$$

În acest caz $T_2(\mathbb{R})/I = \{ A + I \mid A \in T_2(\mathbb{R}) \}$ și pentru

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$ avem $A + I = A' + I \iff$

$A - A' \in I \iff a - a' = 0$. Deci

$A + I = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I$ și $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I \iff a = a'$

de unde $T_2(\mathbb{R})/I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I \mid a \in \mathbb{R} \right\} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}$.

<u>Temă</u> Verificați că $f : T_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = a$ este un morf. surjectiv de inele și aplicați Teorema I de izomorfism ($\operatorname{Ker} f = I$).

<u>Pentru</u> J: • $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$

• $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J \Longrightarrow X - Y = \begin{pmatrix} 0 & x-y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$

• $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ dar $AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin J$

deci $J \not\trianglelefteq M_2(\mathbb{R})$

• $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$ arbitrar $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R})$

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & ax \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J \text{ și } XA = \begin{pmatrix} 0 & xd \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$$

deci $J \trianglelefteq T_2(\mathbb{R})$

Mai departe $T_2(\mathbb{R})/J = \{ A + J \mid A \in T_2(\mathbb{R}) \}$

şi $A\cdot A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d'\end{pmatrix}\in T_2(\mathbb{R})$ avem

$$A+J=A'+J \Leftrightarrow A-A'\in J \Leftrightarrow a-a'=0=d-d'.$$

Deci $A+J=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}+J$ şi $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}+J=\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d'\end{pmatrix}+J \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ d=d'\end{cases}$.

Deci $T_2(\mathbb{R})/J \cong \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}+J \,/\, a,d\in\mathbb{R}\right\} \cong \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix} \,/\, a,d\in\mathbb{R}\right\} \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

<u>Temă</u>. Arătaţi că $f: T_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix}=(a,d)$ este un morfism surj. de inele, $\operatorname{Ker} f \cong J$ şi aplicaţi Th. I. $\cong$.

4. Fie $R=\{f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R} \,/\, f$ funcţie$\}$. Definim operaţiile $+$ şi $\cdot$ pe R astfel:

$f+g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$f\cdot g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ $(fg)(x)=f(x)\cdot g(x)$

Notăm $C=\{f\in R \,/\, f$ este continuă$\}$.

a) $(R,+,\cdot)$ este inel comutativ cu unitate.

b) C subinel în R dar nu este ideal

c) Verificaţi dacă $A=\{f\in R \,/\, f(q)=0,\ \forall q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\}$ şi $B=\{f\in C \,/\, \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0\}$ sunt ideale în R resp. C.

<u>Soluţie</u>. a) Indicaţie: Operaţiile în inelul funcţiilor $R=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sunt induse de operaţiile în $\mathbb{R}$, deci verificarea unei anumite proprietăţi în R se reduce la respectiva proprietate în $\mathbb{R}$.

Atenţie: Elementul neutru pt. $\cdot$ este funcţia constantă

$e:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $e(x)=1$

(deci nu $1_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}}(x)=x$ care este elem. neutru pt. compunere).

Temă: Completaţi detaliile!

b) • $0:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, $0(x)=0$ este continuă (acesta este elem. neutru pt. adunarea funcţiilor) deci $0\in C$.

• $f,g\in C \Rightarrow f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue $\Rightarrow f+g, f\cdot g$ continue deci $f+g, f\cdot g\in C$.

Dar $e:[0,1]\to\mathbb{R}$, $e(x)=1$ este continuă și $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$f(x)=\begin{cases}1 & \text{pt. } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{pt. } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ este discontinuă (în orice punct $x_0\in[0,1]$)

iar $ef=f=fe$ este discontinuă. Deci $C\notin\mathcal{R}$.

c) ~~Pt. A~~

- $O(q)=0,\ \forall q\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \Rightarrow O\in A$
- $f,g\in A \Rightarrow f(q)=g(q)=0,\ \forall q\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \Rightarrow$

  $(f+g)(q)=f(q)+g(q)=0,\ \forall q\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \Rightarrow f+g\in A$
- $f\in A,\ h\in R \Rightarrow f(q)=0,\ \forall q\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \Rightarrow$

  $(f\cdot h)(q)=f(q)\cdot h(q)=0,\ \forall q\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \Rightarrow f\cdot h(=hf)\in A$

Deci $A\trianglelefteq R$.

Pt. B:

- $\lim\limits_{x\nearrow 1} O(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1} 0=0 \Rightarrow O\in B$
- $f,g\in B \Rightarrow \lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=0=\lim\limits_{x\nearrow 1} g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\nearrow 1}(f(x)+g(x))=0+0=0$

  $\Rightarrow f+g\in B$
- $f\in B,\ h\in C \Rightarrow \lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\nearrow 1}(f\cdot h)(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)\cdot\lim\limits_{x\nearrow 1} h(x)$

  $=0\cdot\lim\limits_{x\nearrow 1} h(x)\underset{h\text{ cont}}{=}0\cdot h(1)=0 \Rightarrow f\cdot h\in B$

Deci $B\trianglelefteq C$.

Obs. Dacă în ~~ex~~ ... de mai sus înlocuim $[0,1]$ cu $[0,1)$ atunci subinelul definit ca și în cazul lui B nu mai este ideal.

Într-adevăr $f:[0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x$ este cont și $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=0$

$h:[0,1)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ este cont.

Dar $\lim\limits_{x\nearrow 1}(fh)(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}(1-x)\cdot\dfrac{1}{(1-x)^2}=\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{1}{1-x}=\infty\neq 0.$

5. Fie $a \in [0,1]$ și R, C definite ca în ex. 4. Notăm

$M_a = \{f \in R \mid f(a) = 0\}$

$N_a = \{f \in C \mid f(a) = 0\}$

Demonstrați că:

a) $M_a \trianglelefteq R$, $N_a \trianglelefteq C$

b) există $f \in R$ astfel încât $M_a = fR$ (M_a este ideal principal)

c) N_a nu este principal adică $N_a \neq fC$ pentru orice $f \in C$

d) Un ideal I în R este <u>maximal</u> dacă și numai dacă $\exists a \in [0,1]$ a.i. $I = M_a$

($I \trianglelefteq R$ se numește maximal dacă $I \neq R$ și dacă $U \trianglelefteq R$ astfel încât $I \subseteq U \subseteq R$ atunci $U = I$ sau $U = R$).

<u>Soluție</u> (temă).