Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

Soós Anna

# A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ELEMEI

I. kötet

Egyetemi jegyzet

Egyetemi Kiadó, Kolozsvár
2001

Szaklektor: **dr. Dezső Gábor, adjunktus BBTE, Kolozsvár.**

Editat de Presa Universitară Clujeană

Tiparul executat la **GEWALD**

Eszternek és Tamásnak

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

A valószínűségszámításnak kb. háromszázéves múltja van. Születése a szerencsejátékokhoz kötődik. A XVII. század közepén, elsősorban Franciaországban a szerencsejátékok igen népszerűek voltak. Mivel igen nagy összegekről volt szó, felvetődött a nyerési esély problémája. A kor egyik közismert szerencsejátékosának, De Méré lovagnak jutott eszébe, hogy problémáival a zseniális matematikushoz, Blaise Pascalhoz forduljon. Pascal levelezni kezdett e kérdésekről más matematikusokkal, például Pierre Fermat-val. Ez a levelezés indította el a valószínűség matematikai kiépítését.

A valószínűségszámítás csak az 1930-as évektől vált a matematika egyik ágává Andrej Kolmogorov és Norbert Wiener tevékenysége során.

A mai matematika és számítástechnika, de mondhatni minden tudományág, igen gyakran alkalmazza a valószínűségszámítás eredményeit.

Jelen jegyzet a Babeş-Bolyai Tudományegyetem programozó és matematikus hallgatóinak tartott valószínűségszámítás előadásaim anyagát tartalmazza. Bár a jegyzetben szerepelnek kidolgozott feladatok, ezek nem pótolhatják az olvasó egyéni feladatmegoldásait.

# 1. Fejezet

# Halmazok és események

## 1.1. Események

A természet jelenségeit két részre oszthatjuk aszerint, hogy a véletlennek milyen szerepe van a bekövetkezésükben. Az egyik csoportba azok a jelenségek tartoznak, amelyek adott feltételek teljesülésekor *szükségszerűen* bekövetkeznek. A másik csoportot azok a jelenségek alkotják, amelyeket a feltételek összessége nem határoz meg egyértelműen. Ezek a *véletlen jelenségek*. A következőkben véletlen jelenségekkel foglalkozunk.

Valamely jelenség megfigyelését *kísérletnek* nevezzük. Egy kísérletnek több kimenetele lehet. Azt, hogy mit tekintünk egy kísérlet kimenetelének, minden esetben egyértelműen definiálni kell.

**1.1. Értelmezés.** *A kísérlet kimenetelét* **eseménynek** *nevezzük*

A kísérlet minden kimenetelekor eldönthető, hogy az esemény bekövetkezett vagy sem.

**1.2. Értelmezés. Eseménytér** *egy elképzelt kísérlet modellje. Ez tulajdonképpen a kísérlet kimeneteleinek halmaza.*

A kísérlet minden kimenetele leírható az eseménytér egy és csakis egy pontjával. Fordítva, eseménynek tekinthetjük az eseménytér egy részhalmazát. Az eseménytér jelölése: $\Omega$.

**1.3. Értelmezés. Elemi esemény** *az eseménytér egy egyelemű részhalmaza.*

Jelölése: $\omega \in \Omega$.

**1.4. Értelmezés. Biztos esemény** *az az esemény, amely a kísérlet minden elvégzésekor bekövetkezik.*

Jelölése: $\Omega$.

**1.5. Értelmezés. Lehetetlen esemény** *az az esemény, amely a kísérlet egyetlen elvégzésekor sem következik be.*

Jelölése: $\emptyset$.

**1.6. Értelmezés.** *Azt az eseményt, mely egy kísérlet során bekövetkezhet vagy sem* **véletlen eseménynek** *nevezzük.*

Jelölése: $A, B, ... \subset \Omega$.

Nézzünk néhány példát véletlen kísérletekre és adjuk meg a megfelelő eseményteret.

**1.1. Példa.** *Álljon a kísérlet egy játékkocka feldobásában. Jelöljük* $1, 2, 3, 4, 5, 6$*-tal a kocka oldalait. Tekintsük elemi eseményeknek a dobott számokat. Ekkor az eseménytér* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

**1.2. Példa.** *Ha az előbbi kísérletnél csak az érdekel, hogy hatost dobtunk vagy sem, akkor az elemi események lehetnek a hatos dobása illetve a nem hatos dobása. Ekkor* $\Omega = \{\{6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, \}\}$.

**1.3. Példa.** *Ha három golyót szeretnénk elhelyezni három dobozban, akkor elemi eseménynek tekinthető egy-egy elhelyezés. Ekkor az eseménytér pontjainak száma 27. Általánosítva ezt a feladatot helyezzünk el r golyót n dobozban. Ebben az esetben az eseménytér pontjainak száma* $r^n$*. Ezzel a kísérlettel nagyon sok feladatot modellezhetünk: r ember születésnapjainak eloszlását az év napjaira, a sugárhatás vizsgálatát a biológiában, vagy r számjegyből álló véletlen számok előállítását.*

**1.4. Példa.** *A valószínűségszámításban igen fontos az ún. mintavétel. Ha egy adott sokaságra szeretnénk bizonyos jellemzőket megállapítani, de a sokaság minden tagja nem elemezhető, akkor mintavételt végzünk és az adatokból vonunk le következtetéseket az egész sokaságra vonatkozóan. Például, ha 100 ember adataiból egy közösség dohányosainak a számát szeretnénk megbecsülni, akkor elemi eseményeknek a dohányosok számát tekintjük. Ha a férfiak és nők megoszlása is érdekel a dohányosok közt, akkor az elemi eseményeket jellemezhetjük egy számnégyessel* $(f_d, f_n, n_d, n_n)$*, ahol a dohányzó illetve nemdohányzó nők illetve férfiak számat jelöltük. 100 elemű mintavétel esetén az eseménytér 176851 elemet tartalmaz.*

**1.5. Példa.** *A biztosítótársaságokat életbiztosításkor a társkapcsolatok életkormegoszlása is érdekli. Ha x a nő és y a férfi életkora, akkor az eseménytér leírható* $(x, y)$ *valós számpárral. Nyílván, ekkor az eseménytér végtelen lesz.*

## 1.2. Események algebrája

A valószínűségszámítás fogalmainak bevezetésekor a halmazelmélet elemeit és jelöléseit fogjuk használni.

Legyen $\Omega$ egy eseménytér.

**1.7. Értelmezés.** *Azt mondjuk, hogy az* **A esemény bekövetkezik**, *ha a kísérlet kimenetele eleme az* $A$ *halmaznak.*

Értelmezzük a halmazelméletből ismert műveleteket az események nyelvén. A felsorolt tulajdonságok azonnal következnek az értelmezésből.

**1.8. Értelmezés.** $A$ *esemény* **implikálja** *a* $B$ *eseményt, ha az* $A$ *bekövetkezése maga után vonja a* $B$ *esemény bekövetkezését.*

Jelölése: $A \subset B$.

**1.1. Tulajdonság.** *Ha* $A$, $B$ *és* $C \in \Omega$ *tetszőleges esemény, akkor*

$(i)$ $A \subset \Omega$,

$(ii)$ $A \subset A$,

$(iii)$ *ha* $A \subset B$ *és* $B \subset C$, *akkor* $A \subset C$.

**1.9. Értelmezés.** *Az* $A$ *és a* $B$ *esemény* **egyenlő**, *ha* $A \subset B$ *és* $B \subset A$.

**1.2. Tulajdonság.** *Ha* $B$ *elemi esemény és* $A \subset B$, *akkor* $A = \emptyset$ *vagy* $A = B$.

Legyen $I$ egy tetszőleges, legfennebb megszámlálható indexhalmaz, és $A_i \subset \Omega$, $i \in I$ tetszőleges esemény.

**1.10. Értelmezés.** *Az* $A_i$ *események* **egyesítése** *az az esemény, amely akkor következik be, ha valamelyik esemény bekövetkezik.*

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I : \ \omega \in A_i\} \tag{1.1}$$

**1.3. Tulajdonság.** *Ha* $A,\ B\ \subset \Omega$, *akkor igazak a következő tulajdonságok:*

$(i)\quad A \cup A = A,$

$(ii)\quad A \subset A \cup B,$

$(iii)\quad A \cup \Omega = \Omega,$

$(iv)\quad A \cup \emptyset = A.$

**1.11. Értelmezés.** *Az* $A_i$ *események* **metszete** *az az esemény, amely akkor következik be, ha mindenik esemény bekövetkezik.*

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_i, \quad \forall i \in I\} \tag{1.2}$$

**1.4. Tulajdonság.** *Ha* $A,\ B\ \subset \Omega$, *akkor igazak a következő tulajdonságok:*

$(i)\quad A \cap A = A,$

$(ii)\quad A \cap B \subset A,$

$(iii)\quad A \cap \emptyset = \emptyset,$

$(iv)\quad A \cap \Omega = A,$

$(v)\quad$ *Ha* $A$ *és* $B$ *elemi esemény és* $A \neq B$, *akkor* $A \cap B = \emptyset$.

**1.12. Értelmezés.** *Az* $\{A_i : i \in I\}$ *halmazcsalád* **páronként diszjunkt**, *vagy* **egymást kizáró esemény***ekből áll, ha*

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \textit{minden}\ i, j \in I, \quad i \neq j - re. \tag{1.3}$$

**1.13. Értelmezés.** *Két esemény* **különbsége** *az az esemény, amely akkor következik be, ha az első bekövetkezik, a második pedig nem.*

Jelölése: $A \setminus B$.

**1.5. Tulajdonság.** *Ha* $A$, $B$, $C$, $D$ $\subset \Omega$, *akkor igazak a következő tulajdonságok:*

$(i)$ $\quad A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,

$(ii)$ $\quad A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$,

$(iii)$ $\quad A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$,

$(iv)$ $\quad (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$,

$(v)$ $\quad A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)) = A \cup (B \setminus A)$,

$(vi)$ $\quad A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,

$(vii)$ $\quad (A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.

Az (v) tulajdonság a következőképpen általánosítható

**1.6. Tulajdonság.** *Adott* $n$ *esemény* $A_i \subset \Omega$, $i = \overline{1,n}$ *esetén*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j), \tag{1.4}$$

*ahol* $(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j)$, $i = \overline{1,n}$, *egymást kizáró események.*

**Bizonyítás.** A bizonyítást a matematikai indukció módszerével végezzük. $n = 2$ esetén az előbbi tulajdonság (v) pontját kapjuk.

Feltételezve, hogy (1.4) igaz $n \geq 2$ esetén, írhatjuk

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i &= (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \bigcup (A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \\ &= \left( \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j) \right) \bigcup \left( A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n+1} (A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j). \end{aligned}$$

Tehát az (1.4) összefüggés igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

A tulajdonság második részének igazolásához legyen $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$. Az $A_{i_1} \subset \bigcup_{j=1}^{i_2-1} A_j$ miatt

$$(A_{i_1} \setminus \bigcup_{j=1}^{i_1-1} A_j) \bigcap (A_{i_2} \setminus \bigcup_{j=1}^{i_2-1} A_j) = \emptyset. \tag{1.5}$$

vagyis $(A_{i_1} \setminus \bigcup_{j=1}^{i_1-1} A_j)$ és $(A_{i_2} \setminus \bigcup_{j=1}^{i_2-1} A_j)$ egymást kizáró események.
■

**1.14. Értelmezés.** *Az $A$ és $B$ események* **szimmetrikus különbsége** *az az esemény, amely akkor következik be, ha az egyik bekövetkezik, de a másik nem:*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \tag{1.6}$$

**1.7. Tulajdonság.** *Ha $A$, $B \subset \Omega$, akkor*

(*i*) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

(*ii*) $(A \triangle B) \cap (A \triangle C) = A \triangle (B \cup C)$.

**1.15. Értelmezés.** *Egy $A$ esemény* **tagadása** *vagy* **ellentettje** *vagy* **komplementere** *az $\overline{A} = \Omega \setminus A$ esemény.*

**1.8. Tulajdonság.** *Ha $AA_i \subset \Omega$ és $A_i \subset \Omega$, $i \in I$, akkor*

(*i*) $A \cup \overline{A} = \Omega, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$,

(*ii*) $\overline{\overline{A}} = A, \quad \overline{\emptyset} = \Omega, \quad \overline{\Omega} = \emptyset$,

(*iii*)
$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

*(***de Morgan összefüggések***).*

**Bizonyítás.** Az (i) és (ii) tulajdonságok az értelmezés alapján következnek. A (iii) tulajdonságot az események közti egyenlőség értelmezése alapján bizonyítjuk be. Az értelmezés alapján

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \Omega \setminus \bigcup_{i\in I} A_i,$$

ahonnan következik, hogy

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \subset \overline{A_j}$$

minden $j \in I - re$, vagyis

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$

A fordított implikáció igazolásához felhasználjuk, hogy $\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$ akkor következik be, ha egyetlen $\mathrm{A}_i$ esemény sem következik be, tehát egyesítésük sem. Így

$$\bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}.$$

A kétirányú implikációból következik az egyenlőség. ■

Felhasználva az eseményekkel végzett műveletek tulajdonságait, igazolhatjuk a következő tételt:

**1.1. Tétel.** *Ha $\Omega$ egy eseménytér és $A$, $B$, $C \subset \Omega$, akkor teljesülnek a következő összefüggések:*

($i$) *az egyesítés és a metszet kommutatív:*

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A;$$

(*ii*) *az egyesítés és a metszet asszociatív:*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

(*iii*) *a metszet disztibutív az egyesítésre nézve, és az egyesítés a metszetre nézve:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

(*iv*) *abszorbciós tulajdonság:*

$$(A \cap B) \cup B = B, \qquad A \cap (A \cup B) = A;$$

(*v*) *komplementarítási tulajdonság:*

$$(A \cap \overline{A}) \cup B = B, \qquad (A \cup \overline{A}) \cap B = B.$$

**1.16. Értelmezés.** *Legyen $A \subset \Omega$. Az $A$ esemény* **indikátor függvénye** *az $1_A : \Omega \to \{0, 1\}$ függvény, melyet az*

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & ha \quad \omega \in A, \\ 0, & ha \quad \omega \notin A \end{cases} \tag{1.7}$$

*képlet értelmez.*

**1.17. Értelmezés.** *Az $A_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ végtelen eseménysorozat* **felső határértéke** *az az esemény, amely akkor következik be, ha végtelen sok esemény bekövetkezik.*

Jelölése: $A^* = \limsup_{n\to\infty} A_n$.

**1.9. Tulajdonság.** *Egy eseménysorozat felső határértéke a következő képlettel számíható ki:*

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \tag{1.8}$$

**Bizonyítás.** Ha A$^*$ bekövetkezik, akkor létezik egy $(A_{i_k})_{k\in\mathbf{N}}$ részsorozat, amelynek minden eleme bekövetkezik. Adott $n$ természetes szám esetén találunk olyan $i_{k_n}$ természetes számot, amelyre $i_{k_n} > n$ és $A_{i_{k_n}} \in (A_{i_k})_{k\in\mathbf{N}}$. Viszont $A_{i_{k_n}} \subset \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$, tehát

$$A^* \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i.$$

A fordított implikáció igazolásához tételezzük fel, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$ bekövetkezik. Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ esetén $\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$ bekövetkezik, tehát végtelen sok esemény következik be, ezért

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \subset A^*.$$

A kétirányú implikációból következik az (1.8) két oldalának egyenlősége. ■

**1.18. Értelmezés.** *Az $A_n \subset \Omega$, $n\in \mathbb{N}$ végtelen eseménysorozat* **alsó határértéke** *az az esemény, amely akkor következik be, ha a sorozatból legfennebb véges darab esemény nem következik be.*

Jelölése: $A_* = \liminf_{n\to\infty} A_n$.

**1.10. Tulajdonság.** *Egy eseménysorozat alsó határértéke a következő képlettel számíható ki:*

$$A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \tag{1.9}$$

**Bizonyítás.** Ha A$_*$ bekövetkezik, akkor létezik egy $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy bármely $i > n_0$ esetén $A_i$ megtörténik, tehát $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$ bekövetkezik. Ekkor

$$A^* \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i.$$

Fordítva, tételezzük fel, hogy $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$ bekövetkezik. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, amelyre $\bigcap_{i=n_0}^{\infty} A_i$ teljesül, tehát legfennebb véges darab esemény nem következik be, vagyis

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \subset A_*.$$

A kétirányú implikációból következik az (1.9) két oldalának egyenlősége. ■

Az alsó és felső határérték kapcsolatát a következő tétel jellemzi:

**1.2. Tétel.** *Tetszőleges $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eseménysorozat esetén igazak a következő összefüggések:*

$$\limsup_{n\to\infty} \overline{A}_n = \overline{\liminf_{n\to\infty} A_n} \tag{1.10}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \overline{A}_n = \overline{\limsup_{n\to\infty} A_n} \tag{1.11}$$

**Bizonyítás.** A bizonyításban az alsó és felső határértékre vonatkozó (1.9) illetve (1.8) összefüggéseket használjuk fel. Ezek alapján

$$\limsup_{n\to\infty} \overline{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} \overline{A}_i = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\overline{\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i}\right) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}} A_i = \overline{\liminf_{n\to\infty} A_n}, \tag{1.12}$$

illetve

$$\liminf_{n\to\infty} \overline{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} \overline{A}_i = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i}\right) = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i} = \overline{\limsup_{n\to\infty} A_n}. \tag{1.13}$$

■

**1.11. Tulajdonság. (Borel-Catelli lemma)** *Legyen* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy eseménysorozat. Ha*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) < \infty, \quad \textit{akkor} \quad P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

**Bizonyítás.** A valószínűség monotonítását és szubadditívítását felhasználva, írhatjuk

$$P(A^*) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) \leq P(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i)) \leq \sum_{i=n}^{\infty} P(A_j).$$

Feltevés szerint $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) < \infty$, ahonnan következik, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i) = 0,$$

és így $P(A^*) = 0$. ■

A Borel-Catelli lemma nem feltételezi az események függetlenségét.

**1.3. Tétel. (Borel 0-1 törvénye)** *Ha* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *független események sorozata, akkor*

(*i*) $P(A^*)$ *pontosan akkor* 0*, ha* $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) < \infty$*,*

(*ii*) $P(A^*)$ *pontosan akkor* 1*, ha* $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = \infty$

**Bizonyítás.** Az $(i)$ tulajdonság a Borel-Catelli (1.11) lemma alapján következik.

Legyen most $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = \infty$, és számítsuk ki az ellentett események alsó határértékének valószínűségét:

$$P(\liminf_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} \overline{A}_i) = P(\overline{A^*}).$$

Ha az $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, események függetlenek, akkor az $\overline{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, események is függetlenek, tehát, ha $n > m$, akkor

$$P(\bigcap_{i=n}^{\infty} \overline{A}_i) \leq P(\bigcap_{i=n}^{m} \overline{A}_i) = \prod_{i=n}^{m} P(\overline{A}_i) = \prod_{i=n}^{m} [1 - P(A_i)].$$

Elég igazolnunk, hogy

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{i=n}^{m} [1 - P(A_i)] = 0.$$

Ehhez felhasználjuk az

$$1 - x \leq e^{-x}, \quad 0 < x < 1$$

ismert egyenlőtlenséget:

$$P(\bigcap_{i=n}^{\infty} \overline{A}_i) \leq \prod_{i=n}^{m} [1 - P(A_i)] \leq \prod_{i=n}^{m} e^{-P(A_i)} = e^{-\sum_{i=n}^{m} P(A_i)}.$$

A $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = \infty$ miatt $\lim_{m\to\infty} \sum_{i=n}^{m} P(A_i) = \infty$, tehát

$$\lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{i=n}^{m} P(A_i)} = 0,$$

ahonnan

$$P(\bigcap_{i=n}^{\infty} \overline{A}_i) = 0, \quad \text{minden} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{esetén.}$$

Ezért $P(\overline{A^*}) = 0$ és így $P(A^*) = 1$. ∎

**1.19. Értelmezés.** *Az* $A_i \subset \Omega$, $i = \overline{1, n}$, *események* **teljes eseményrendszert** *alkotnak, ha*

(*i*) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$,

(*ii*) $\quad A_i \cap A_j = \emptyset$, *bármely* $i,\ j = \overline{1,n},\ \ i \neq j$ *esetén.*

Ha $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ teljes eseményrendszer és $B \subset \Omega$ egy tetszőleges esemény, akkor

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i), \qquad (B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset.$$

**1.20. Értelmezés.** *Legyen* $B \subset \Omega$. *Egy* $A_i \subset \Omega$, $i$=$\overline{1,n}$, *eseményrendszer B-nek egy* **felbontása**, *ha*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = B \qquad \text{és} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \text{bármely}\ i \neq j - re.$$

## 1.3. Eseménymező

Legyen $\Omega$ egy eseménytér, $\mathcal{P}(|omega)$ az $\Omega$ részhalmazainak sokasága és $I$ egy indexhalmaz.

**1.21. Értelmezés.** *A* $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{K} \neq \emptyset$, *eseménycsalád* $\sigma$-**algebrát** *alkot, ha:*

(*i*) $\quad$ *minden* $A \in \mathcal{K}$ *esetén* $\overline{A} \in \mathcal{K}$;

(*ii*) $\quad$ *minden* $A_i \in \mathcal{K}$, $i \in I$ *esetén* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{K}$.

*Az* $(\Omega, \mathcal{K})$ *párt* **eseménymezőnek** *nevezzük. Ha I véges, akkor az eseménymező is véges, különben végtelen.*

A következő tétel az eseménymezőket jellemzi:

**1.12. Tulajdonság.** *Legyen* $(\Omega, \mathcal{K})$ *egy végtelen eseménymező. Akkor igazak a következő kijelentések:*

$(i)$ $\emptyset, \Omega \in \mathcal{K}$;

$(ii)$ *ha* $A_i \in \mathcal{K}$ , $i \in I$, *akkor* $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{K}$;

$(iii)$ *ha* $A, B \in \mathcal{K}$, *akkor* $A \setminus B \in \mathcal{K}$;

$(iv)$ *ha* $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ , $A_n \in \mathcal{K}$, *akkor* $A^* \in \mathcal{K}$ *és* $A_* \in \mathcal{K}$.

**Bizonyítás.**

(i) Mivel $\mathcal{K} \neq \emptyset$, létezik $A \in \mathcal{K}$ , ezért az eseménymező értelmezése alapján $\overline{A} \in \mathcal{K}$.

Viszont $A \cup \overline{A} = \Omega \in \mathcal{K}$ , tehát $\overline{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{K}$.

(ii) A *de Morgan* összefüggések szerint

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Mivel $A_i \in \mathcal{K}$, következik, hogy $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \in \mathcal{K}$ , tehát $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \in \mathcal{K}$ és így

$$\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{K}.$$

(iii) Tudjuk, hogy $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Figyelembe véve, hogy $A, B \in \mathcal{K}$ és így $\overline{B} \in \mathcal{K}$, következik, hogy $A \setminus B \in \mathcal{K}$.

(iv) Ha $A_i \in \mathcal{K}$, minden $i \in \mathbb{N}$-re, akkor, mivel

$$A^* = \bigcap_{i=1}^{\infty} (\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i)$$

következik, hogy $A^* \in \mathcal{K}$. Hasonlóan $A_* \in \mathcal{K}$. ■

**1.1. Megjegyzés.** *Az előbbi tulajdonságok alapján, az eseménymező értelmezésben az egyesítés helyettesíthető a metszettel.*

**1.2. Megjegyzés.** *Az (1.12) tétel első három kijelentése véges eseménymező esetén is igaz.*

# 2. Fejezet

# A valószínűség matematikai fogalma

Ebben a fejezetben a valószínűség Kolmogorov-féle axiómatikus felépítésével foglalkozunk.

Legyen $(\Omega, \mathcal{K})$ egy eseménymező és $I$ egy indexhalmaz.

**2.1. Értelmezés.** *A* $P : \mathcal{K} \to \mathbf{R}$ *függvényt* **valószínűségnek** *nevezzük, ha teljesíti a következő feltételeket:*

*(i)* $P(A) \geq 0$, *minden* $A \in \mathcal{K}$ *esetén;*

*(ii)* $P(\Omega) = 1$;

*(iii)* *ha* $A_i \in \mathcal{K}$, $i \in I$ *és* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *ha* $i, j \in I$, $i \neq j$, *akkor*

$$P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

*Az* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *hármast* **valószínűségi mezőnek** *nevezzük.*

**2.1. Megjegyzés.** *1. Ha az $(\Omega, \mathcal{K})$ véges eseménymező, akkor a hozzá tartozó valószínűségi mezőt* **véges valószínűségi mező***nek nevezzük.*

*2. Egy eseménymező több valószínűségi mezőt is meghatározhat.*

**2.1. Tulajdonság.** *Legyen $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ egy véges valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{K}$ két tetszőleges esemény. Ekkor igazak a következő kijelentések:*

*(i)* $P(\emptyset) = 0$;

*(ii)* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

*(iii)* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$;

*(iv) ha $A \subset B$, akkor $P(A) \leq P(B)$;*

*(v)* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

*(vi)* $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$;

*(vii) ha $A_i \in \mathcal{K}$, $i = \overline{1, n}$, akkor*

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \\ &+ \ldots + (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k}^{n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) + \\ &+ \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n); \end{aligned}$$

*Ha $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i, j = \overline{1, n}$ , $i \neq j - re$, akkor*

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

**Bizonyítás.**

$(i)$ Figyelembe véve, hogy $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ és $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$ következik, hogy

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset), \quad \text{és így} \quad P(\emptyset) = 0.$$

$(ii)$ Tudjuk, hogy $A \cup \overline{A} = \Omega$ és $A \cap \overline{A} = \emptyset$. Tehát

$$P(\Omega) = 1 = P(A) + P(\overline{A}), \quad \text{ahonnan } P(\overline{A}) = 1 - P(A);$$

$(iii)$ Az eseményekre adott tulajdonságok alapján B felírható

$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

alakban, ahol $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$. Ezért

$P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$ vagyis $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$;

$(iv)$ Az $A \subset B$ implikáció miatt $P(B) - P(A) = P(B \setminus A) \geq 0$;

$(v)$ Ha az $A \cup B$ eseményt az $A$ és $B \setminus A$ egymást kizáró események egyesítéseként írjuk, akkor

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$$

$(vi)$ Az $(v)$ pontból következik.

$(vii)$ Indukcióval bizonyítjuk. $n = 2$-re az e) pontot kapjuk. Feltételezzük, hogy az állítás igaz $n$-re, és igazoljuk $n + 1$-re. Ehhez írhatjuk, hogy

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P(A_{n+1}) - P\left(A_{n+1} \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) +$$

$$+ P(A_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} P(A_{n+1} \cap A_i) + \sum_{i<j}^{n} P(A_{n+1} \cap A_i \cap A_j) + \ldots +$$

$$+ (-1)^n P(A_{n+1} \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n+1} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n),$$

amit igazolni kellett. ■

**2.2. Tulajdonság.** *Legyen $A_i \in \mathcal{K}$, ahol $i \in I$. Akkor*

$$P(\bigcup_{i \in I} A_i) \leq \sum_{i \in I} P(A_i).$$

**Bizonyítás.** Ha $I$ véges, akkor az egyenlőtlenséget indukcióval bizonyítjuk.

Ha $I$ végtelen, akkor legyen $I = \mathbb{N}$, és szerkesszük meg a $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eseménysorozatot a következőképpen: $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, ha $n \geq 2$. Ekkor azonnaliak a következő tulajdonságok

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \, ha \, i \neq j,$$

és $B_n \subset A_n$, minden $n \in \mathbb{N} - re$. Felhasználva az előbbi tulajdonságokat, írhatjuk

$$P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(B_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n),$$

amit igazolni kellett. ■

A következő tulajdonság a Boole-féle egyenlőtlenséget tartalmazza.

**2.3. Tulajdonság.** *Ha* $A_i \in \mathcal{K}, \;\; i \in I$, *akkor*

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) \geq 1 - \sum_{i\in I} P(\overline{A_i}).$$

**Bizonyítás.** A de Morgan képletek felhasználásával és a valószínűség tulajdonságai alapján kapjuk, hogy

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) = P(\overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}}) = 1 - P(\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}) \geq 1 - \sum_{i\in I} P(\overline{A_i}).$$

■

A következőkben végtelen eseménysorozatok folytonossági tulajdonságait adjuk meg.

**2.2. Értelmezés.** *Az* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{K}$ *eseménysorozatot* **növekvőnek** *(illetve* **csökkenőnek)** *nevezzük, ha* $A_{n+1} \subset A_n$ *(illetve* $A_n \subset A_{n+1}$*), minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén.*

**2.1. Tétel.** *Legyen* $(A_n)_{n\in I}$ *egy eseménysorozat, ahol* $A_n \in \mathcal{K}$ *és* $n \in \mathbb{N}$.

*(i) Ha* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *növekvő sorozat, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \tag{2.1}$$

*(ii) Ha* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *csökkenő sorozat, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \tag{2.2}$$

**Bizonyítás.** a) Legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ növekvő eseménysorozat, és jelöljük $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Ekkor $A \subset A_n$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Szerkesszük meg a $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eseménysorozatot a következőképpen: $B_n = A_n \setminus A$. Ekkor

$$B_{n+1} \subset B_n, \qquad P(B_n) = P(A_n \setminus A) = P(A_n) - P(A), \quad ha\ n \in \mathbf{N},$$

és

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap \overline{A}) =$$

$$= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n})) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{m\in\mathbb{N}} (A_n \cap \overline{A_m})) = \emptyset.$$

Innen $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n} = \Omega$, így

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n} = \Omega$$

és $\overline{B_n} \subset \overline{B_{n+1}}$, $n \in \mathbf{N}$. Az előbbiek felhasználásával

$$\Omega = \overline{B_1} \cup (\overline{B_2} \setminus \overline{B_1}) \cup \ldots,$$

ahonnan

$$P(\Omega) = 1 = P(\overline{B_1}) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\overline{B_i} \setminus \overline{B_{i-1}}) = P(\overline{B_1}) + \sum_{i=2}^{\infty} [P(\overline{B_i}) - P(\overline{B_{i-1}})].$$

és

$$\lim_{n\to\infty} P(\overline{B_n}) = 1, \ \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A) = P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

vagyis a (2.1) összefüggést igazoltuk.

A (2.2) igazolásához tekintsük az $(\overline{A_n})_{n\in\mathbf{N}}$ sorozatot. Ez növekvő sorozat, így az előbbi bizonyítás alapján

$$\lim_{n\to\infty} P(\overline{A}_n) = P(\cap_{n\in\mathbf{N}} \overline{A}_n) = P(\overline{\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n}) = 1 - P(\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n),$$

ahonnan

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

Ezzel a tételt igazoltuk. ∎

## 2.1. Diszkrét valószínűségi mező

**2.3. Értelmezés.** *Azt az* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *valószínűségi mezőt, amelyre* $\Omega$ *véges vagy megszámlálhatóan sok elemből áll és* $\mathcal{K}$ *az* $\Omega$ *összes részhalmazából képzett algebra, illetve* $\sigma$*-algebra,* **diszkrét valószínűségi mezőnek** *nevezzük.*

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy $\Omega$ elemei a természetes számok, tehát $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$, illetve $\Omega = \{1, 2, ...\}$. Ebben az esetben a $P(A)$ valószínűség megadható úgy, hogy a Kolmogorov-féle axiómák teljesüljenek.

**2.2. Tétel.** *Diszkrét valószínűségi mező esetén elég megadni az elemi események valószínűségét, vagyis a* $P(B_i) = p_i$ *számokat úgy, hogy*

(*i*) $p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ...$

(*ii*) $\sum_i p_i = 1.$

*Ekkor tetszőleges* $A \in \mathcal{K}$*-ra megadható a* $P(A)$ *valószínűség úgy, hogy a Kolmogorov-féle axiómák teljesüljenek.*

**Bizonyítás.** Jelöljük $B_1, B_2, ...$-nel az elemi eseményeket. Akkor tetszőleges $A \in \mathcal{K}$-ra $A = \cup_j B_{i_j}$, és így a $P(A) = \sum_j p_{i_j}$-vel megadott valószínűségekre teljesülnek az axiómák. Valóban, $p_{i_j} \geq 0$, így $P(A) \geq 0$.

$$P(\Omega) = P(\cup_i B_i) = \sum_i P(B_i) = 1.$$

Az egymást páronként kizáró $A_1, A_2, ...$ események egyesítése csupa olyan eseményt tartalmaz, amelyek az összeg egyik és csak az egyik tagjában fordulnak elő, tehát

$$P(\bigcup_i A_i) = P(\bigcup_i \bigcup_{j(i)} B_{i_{j(i)}}) = \sum_i \sum_{j(i)} p_{i_{j(i)}} = \sum_i P(A_i),$$

amivel a tételt bizonyítottuk. ■

Egyik leggyakrabban használt valószínűségi mező a **klasszikus valószínűségi mező**.

Ha a véges valószínűség mező esetén az elemi események valószínűsége mind egyenlő, akkor a **klasszikus vagy kombinatórikus valószínűségi mezőt** kapjuk. Minthogy $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, így ebben az esetben $p_1 = ... = p_n = \frac{1}{n}$. Ekkor egy tetszőleges A esemény valószínűsége egyenlő az A előállításában szereplő elemi események számának és az összes elemi esemény számának hányadosával:

$$P(A) = \frac{k}{n}, \quad ha \quad A = \bigcup_{j=1}^{k} B_{i_j}.$$

Ezt az arányt az A esemény **relatív gyakoriságának** nevezzük.

Ilyen egyformán valószínű kimenetelekkel leggyakrabban a szerencsejátékoknál találkozunk. Szabályos érme dobása esetén mindkét oldal egyformán valószínű, szabályos kocka esetén a hat lapra esés is egyformán valószínű. Ez volt az első modell, amelyből a valószínűségszámítás kifejlődött.

## 2.2. Végtelen valószínűségi mező

**2.4. Értelmezés.** *Az* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *valószínűségi mezőt* **végtelennek** *nevezzük, ha* $\Omega$ *nem megszámlálható halmaz.*

A **geometriai valószínűség** végtelen eseménymezőn értelmezett valószínűség.

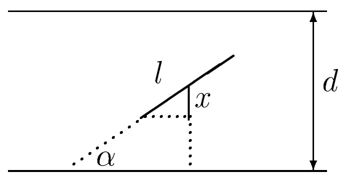
Legyen $(\Omega, \mathcal{K})$ egy olyan végtelen eseménymező, ahol $\mathcal{K}$ elemei *Lebesgue értelemben mérhető*ek és $\mu(\Omega) > 0$.

**2.5. Értelmezés.** *A*

$$P : \mathcal{K} \to \mathbf{R},\ P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

*függvényt, ahol $A \in \mathcal{K}$, geometriai valószínűségnek nevezzük.*

**2.1. Példa. (Buffon féle tűfeladat)** *Egy síkban párhuzamos egyenesek vannak egymástól $d$ távolságra. Ha egy $l\,(l < d)$ hosszúságú tűt leejtünk a síkra, akkor mi a valószínűsége annak, hogy a tű metszeni fogja valamelyik egyenest?*




*A tű helyzetét jellemezhetjük például a középpontjának az egyik egyenestől való távolságával (legyen ez $x$) és az egyenessel bezárt szög ($\alpha$) segítségével:*

$0 \le x \le \frac{d}{2}$, $0 \le \alpha < \pi$.

*Ekkor az eseménytér*

$$\Omega = \{(x, \alpha) \mid 0 \le x \le \frac{d}{2},\ 0 \le \alpha < \pi\}$$

*és a kedvező esetek halmaza*

$$A = \{(x, \alpha) \in \Omega |\ \ 0 \le x \le \frac{l}{2} \sin \alpha\}.$$

*Innen az $A$ esemény valószínűsége*

$$P(A) = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\alpha d\alpha}{\frac{\pi d}{2}} = \frac{\frac{l}{2}\cdot 2}{\frac{\pi d}{2}} = \frac{2l}{\pi d}.$$

*Ez az összefüggés felhasználható a $\pi$ értékének becslésére. Tegyük fel, hogy az előbbi kísérletet elvégezzük $n$-szer és ebből a tű $k$-szor metszett egy egyenest. Ekkor az $A$ esemény relatív gyakorisága $\frac{k}{n}$, ami elég nagy $n$ esetén, megközelíti a $P(A)$ értéket, tehát*

$$\frac{2l}{\pi d} \approx \frac{k}{n}.$$

*Innen a $\pi$ megközelítő értéke*

$$\pi \approx \frac{2l}{d}\frac{n}{k}.$$

## 2.3. Feltételes valószínűség

Ha egy esemény bekövetkezésének valószínűségét egy másik esemény függvényében vizsgáljuk, akkor feltételes valószínűséget kapunk.

Legyen $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ egy valószínűségi mező és $B \in \mathcal{K}$, $P(B) > 0$.

**2.6. Értelmezés.** *A*

$$P : \mathcal{K} \to \mathbf{R},\ P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

*függvényt, ahol $A \in \mathcal{K}$, az $A$* **esemény $B$-re vonatkozó feltételes valószínűségének** *nevezzük.*

**2.4. Tulajdonság.** *A feltételes valószínűség egy valószínűség, vagyis*

(i) $\quad P(A|B) \geq 0$, *minden $A \in \mathcal{K}$ esetén;*

$(ii)$ $\quad P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = 1;$

$(iii)$ $\quad$ *ha* $A_i \in \mathcal{K}$, $i \in I$:

$$P(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i | B) = \sum_{i \in I} P(A_i|B), \quad ha\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

**Bizonyítás.** Az első két tulajdonság az értelmezés alapján következik. A harmadik igazolásához írhatjuk, hogy

$$P(\bigcup_{i \in I} A_i | B) = \frac{P((\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_{i \in I}(A_i \cap B))}{P(B)} =$$

$$= \frac{\sum_{i \in I} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i \in I} P(A_i|B),$$

mivel $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset$, ha $i \neq j$. ■

**2.5. Tulajdonság.** *A feltételes valószínűség rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

$(i)$ $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$;

$(ii)$ *Ha* $A_i \in \mathcal{K}$, $i = \overline{1, n}$, *akkor*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

$(iii)$ ***Teljes valószínűség tétele.*** *Ha* $A_i$, $i = \overline{1, n}$ *pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak és* $A \in \mathcal{K}$, *akkor:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} [P(A|A_i) \cdot P(A_i)].$$

(*iv*) ***Bayes képlet.*** *Ha $A \in \mathcal{K}$, $P(A) > 0$, és az $A_i \in \mathcal{K}$, $i = \overline{1,n}$, pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor:*

$$P(A_k|A) = \frac{P(A|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}[P(A|A_i) \cdot P(A_i)]}, \; k = \overline{1,n}.$$

**Bizonyítás.**

(i) Az értelmezésből azonnal következik.

(ii) A jobb oldali kifejezésre alkalmazzuk a feltételes valószínűség értelmezését:

$$P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)}{P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)} =$$

$$= P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

(iii) Tudjuk, hogy $A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n}(A \cap A_i)$, és, mivel

$(A \cap A_i) \bigcap (A \cap A_j) = \emptyset,\; i \neq j$, ezért:

$$P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n}[P(A|A_i) \cdot P(A_i)].$$

(iv) Alkalmazzuk a tulajdonság ($i$)-pontját és a teljes valószínűség tételét:

$$P(A_k|A) = \frac{P(A_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}[P(A|A_i) \cdot P(A_i)]},$$

minden $k = \overline{1,n}$ esetén. ■

## 2.4. Események függetlensége

**2.7. Értelmezés.** *Két $A, B \in \mathcal{K}$ eseményt* **függetlennek** *nevezünk, ha,* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**2.6. Tulajdonság.** *(i) Ha $P(A) = 0$ vagy $P(A) = 1$, akkor bármely $B \in \mathcal{K}$ eseményre $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$*

*(ii) Ha $A, B \in \mathcal{K}$ két független esemény, akkor $P(A \mid B) = P(A)$ és $P(B \mid A) = P(B)$*

*(iii) Ha $A, B \in \mathcal{K}$ két független esemény, akkor $A$ és $\bar{B}$, $\bar{A}$ és $B$, $\bar{A}$ és $\bar{B}$ is független események lesznek.*

**Bizonyítás.**

(i) $P(A) = 0$, tehát $P(A) \cdot P(B) = 0$, ezért

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = 0.$$

(ii) $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A) \cdot P(B)/P(B) = P(A)$. Hasonlóan k¨vetkezik a második összefüggés is.

(iii) $P(\bar{A} \cap B) = P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot (1 - P(A)) = P(B) \cdot P(\bar{A})$ tehát $\bar{A}$, $B$ is függetlenek.

A másik két összefüggés hasonlóan igazolható. ■

**2.8. Értelmezés.** *Az $A_i, i \in I, A_i \in \mathcal{K}$ eseményrendszert abban az esetben nevezzük* **teljesen függetlennek**, *ha akárhogyan választva belőle k eseményt, teljesül a következő összefüggés*

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot ... \cdot P(A_{i_k}),$$

*ahol* $i_1 < i_2 < ... < i_k$, $i_j \in I$, $k = \overline{1, n}$.

**2.2. Megjegyzés.** *Ha $A_i$, $i \in I$. teljesen független események, akkor az $A_i$ események függetlenek is, de fordítva a kijelentés nem igaz. Ennek igazolására, legyen*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

*és*

$$A = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad B = \{\omega_1, \omega_3\}, \quad C = \{\omega_1, \omega_4\}.$$

*Ekkor*

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2},$$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$ *tehát $A$ és $B$; és ugyanúgy $A$ és $C$ illetve $B$ és $C$ is függetlenek. Viszont $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$ és $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$, tehát $A$, $B$ és $C$ nem teljesen független.*

## 2.5. Valószínűségi modellek

Bizonyos események valószínűségének kiszámítására matematikai modelleket használunk. A kapott képletek paramétereinek változtatásával sok valószínűségi feladat megoldható. A következőkben áttekintjük a legfontosabb valószínűségi modelleket.

### 2.5.1. Visszatevéses Bernoulli modell két állapottal (Binomiális modell)

Ez a modell akkor alkalmazható, ha egy kísérletet ugyanolyan körülmények közt ismétlünk meg $n$ - szer és mindenik ismétléskor ugyanazt az A eseményt figyeljük. Az érdekel, hogy mi a valószínüsége annak, hogy az esemény $k$ - szor következik be .

A matematikai modell felépítéséhez tekintsünk egy urnát, amelyben fehér és lila színű golyó helyeztünk el. Szeretnénk meghatározni, annak a valószínüségét, hogy $n$ húzásból $k$ fehéret húzunk, ha minden húzás után a golyót visszatesszük az urnába. Legyen $B_{n,k}$ a kért esemény.

A $P(B_{n,k})$ valószínűségnek a meghatározásához vezessük be a következő jelöléseket: tételezzük fel, hogy a kísérlet során az $A$ esemény $p$ valószínűséggel kövelkezik be, $P(A) = p$ és $P(\bar{A}) = 1-p = q$. Mivel visszatevéssel történik a húzás, ez a valószínűség az ismétlések során nem változik. Legyen $A_i$ az az esemény, hogy az i - edik húzáskor fehér golyót húzunk. Ekkor $P(A_i) = p$. Felírhatjuk:

$$B_{n,k} = \bigcup_{i_1<i_2<\ldots<i_k} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n})$$

Az egyesítés tagjai egymást kizáró események, tehát

$$(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n}) \cap (A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k} \cap \overline{A}_{j_{k+1}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{j_n}) = \emptyset.$$

A metszet tagjai pedig független események , tehát

$$P(B_{n,k}) = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}) \cdot P(\overline{A}_{i_{k+1}}) \cdots P(\overline{A}_{i_n}) =$$

$$= C_n^k p^k \cdot q^{n-k}.$$

Ez utóbbi egyenlőség azért igaz, mert az összegben minden tag $p^k \cdot q^{n-k}$ -nal egyenlő és az összegnek $C_n^k$ darab tagja van (ahány féle képpen az $n$ ismétlésből $k$-szor fehéret húzhatunk).

**2.3. Megjegyzés.** *Ezt a modellt* **binomiális modellnek** *is nevezzük, mert ha tekintjük a $(p+q\cdot x)^n$ binomot, akkor a kért valószínűség meghatározható az $x$ változó $k$-adik hatványának együtthatójából.*

*Az előbbi megjegyés alapján kapjuk a*

$$\sum_{k=0}^{n} P(B_{n,k}) = 1$$

*összefüggést, ha $x = 1$ helyettesítést végzünk. Másként is eljuthatunk ehhez az eredményhez, ha figyelembe vesszük, hogy $B_{n,k}$, $k = \overline{0,n}$, teljes eseményrendszert alkot.*

### 2.5.2. Visszatevéses Bernoulli modell több állapottal

Ez a modell az előbbi általánosítása. Olyan esetben alkalmazzuk, amikor egy kísérlet során $r$ teljes eseményrendszet alkotó esemény bekövetkezését figyeljük. Feltételezzük, hogy a kísérlet minden ismétlése során az egyes események bekövetkesésének a valószínűsége nem változik. Szeretnénk meghatározni, annak a valószínűségét, hogy a kísérlet $n$- szeri ismétlésekor az események meghatározott számszor következzenek be.

Legyen $A_1$, $A_2$, ..., $A_r$ a teljes eseményrendszert alkotó $r$ esemény. A kisérletet $n$-szer végezzük el és keressük annak a valószínűségét, hogy az $A_1$ esemény $k_1$ - szer, $A_2$ esemény $k_2$ - ször, ..., $A_r$ esemény $k_r$ - szer következzen be, $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$.

A matematikai modell egy $r$ színű golyót tartalmazó urna. Visszatevéssel húzunk az urnából $n$-szer. $A_i$ jelöli azt az eseményt, hogy az i-edik húzáskor az i-edik színű golyót húztuk. Ismerjük az $A_i$ bekövetkezésének valószínűségét $P(A_i) = p_i$ és $P(\bar{A}_i) = 1 - p_i = q_i$. A kért eseményünket jelöljük $B_{n,k_1,k_2,...,k_r}$-rel.

Legyen $A_j^i$ - az az esemény, hogy a $j$ -edik húzáskor az $A_i$ következik be. Ekkor írhatjuk

$$B_{n,k_1,k_2,...,k_r} = \bigcup (A_{i_1}^1 \cap ... \cap A_{i_{k_1}}^1) \cap ... \cap (A_{l_1}^r \cap ... \cap A_{l_{k_r}}^r) \qquad (2.3)$$

Az egyesítés tagjai egymást kizáró események, a metszet tagjai viszont függetlenek, tehát írhatjuk:

$$P(B_{n,k_1,k_2,...,k_r}) = \sum p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r} \qquad (2.4)$$

ahol az összeg tagjainal száma

$$C_n^{k_1}\cdot C_{n-k_1}^{k_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-\sum_{i=1}^{r-1}k_i}^{k_r}=\frac{n!}{k_1!\cdot(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!\cdot(n-k_1-k_2)!}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\frac{(n-\sum_{i=1}^{r-1}k_i)!}{k_r!\cdot 0!}=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}.$$

Így annak a valószínűsége, hogy $n$ húzásból $k_i$ legyen $i$ színű, $i=\overline{1,r}$, a következő képlettel számítható ki:

$$P(B_{n,k_1,k_2,\ldots,k_r})=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}.$$

**2.4. Megjegyzés.** *Ezt a modellt* **multinomiális modellnek** *is hívják, mert a kért valószínűség a* $(p_1x_1+\ldots+p_rx_r)^n$ *kifejtésében az* $x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_r^{k_r}$ *kifejezést tartalmazó tag együtthatója.*

**2.5. Megjegyzés.** *Az előbbi megjegyzésből következik, hogy*

$$\sum_{k_1+\ldots+k_r=n}P(B_{n,k_1,k_2,\ldots,k_r})=1.$$

*Ugyanerre a következtetésre úgy is eljuthatunk, hogy figyelembe vesszük, hogy* $B_{n,k_1,k_2,\ldots,k_r}$ *teljes eseményrendszert alkotnak, ha* $\sum_{i=1}^{r}k_i=n$.

### 2.5.3. Visszatevés nélküli Bernoulli modell két állapottal (Hipergeometrikus modell)

Ezt a modellt akkor alkalmazzuk, amikor az esemény bekövetkezése függ attól, hogy hányadszor végezzük a kísérletet. A matematikai modell felépítéséhez tekintsünk egy urnát, amelyben $a$ darab fehér és $b$ darab lila golyó van. Visszatevés nélkül kihúzunk $n$ darab golyót és annak a valószínűségét szeretnénk kiszámítani, hogy ebből $k$ darab lesz fehér színű, ha $n \leq a+b$ és $k \leq a$.

Legyen $A_i$ az az esemény, hogy az $i$ - edik húzásnál fehéret húztunk és jelöljük $B_{n,k}$-val a kért eseményt. Ekkor írhatjuk:

$$B_{n,k} = \bigcup_{i_1<i_2<...<i_k} (A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap ... \cap \overline{A}_{i_n})$$

Figyelembe véve, hogy

$$(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap ... \cap \overline{A}_{i_n}) \cap (A_{j_1} \cap ... \cap A_{j_k} \cap \overline{A}_{j_{k+1}} \cap ... \cap \overline{A}_{j_n}) = \emptyset$$

kapjuk:

$$P(B_{n,k}) = \sum_{i_1<i_2<...<i_k} P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap ... \cap \overline{A}_{i_n})$$

Az események nem függetlenek, ezért a metszetre és a feltételes valószínűségre vonatkozó (2.5) (ii) tulajdonságot kell alkalmaznunk:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap ... \cap \overline{A}_{i_n}) =$$

$$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)...P(A_k \mid A_1 \cap ... \cap A_{k-1})$$

$$P(\overline{A}_{k+1} \mid A_1 \cap ... \cap A_k)...P(\overline{A}_n \mid A_1 \cap ... \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap ... \cap \overline{A}_{n-1}) =$$

$$= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} \cdot ... \cdot \frac{a-k+1}{a+b-k+1} \cdot \frac{b}{a+b-k} \cdot ... \cdot \frac{b-n+k+1}{a+b-n+1}.$$

Ez utóbbi valószínűségeket a relatív gyakoriság képlete alapján írtuk fel. Innen, ha figyelembe vesszük, hogy az összegnek $C_n^k$ darab tagja van, akkor

$$P(B_{n,k}) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{a!}{(a-k)!} \cdot \frac{b!(a+b-n)!}{(b-n+k)!(a+b)!} = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

**2.6. Megjegyzés.** *Ugyanehhez az összefüggéshez jutottunk volna akkor is, ha a relatív gyakoriság képletét alkalmazzuk.*

**2.7. Megjegyzés.** *$B_{n,k}$, $k = \overline{0,n}$, események teljes eseményrendszert alkotnak, tehát*

$$\sum_{k=0}^{n} P(B_{n,k}) = 1.$$

*Ezt az össefüggést algebrai úton is megkaphatjuk.*

### 2.5.4. Visszatevés nélküli Bernoulli modell több állapottal

Ez az előbbi modell általánosítása arra az esetre, amikor $r$ színű golyót tekintünk az urnában. Legyen az első színűből $a_1$ darab, a másodikból $a_2$ darab,...,az $r$-edik színből pedig $a_r$ darab. Az urnából $n$ golyót húzunk, anélkül, hogy a kihúzott golyót visszatennénk. Keressük annak a valószínűségét, hogy az első színből $k_1$ darabot, ... , az $r$- edikből $k_r$ darabot húzunk, ha tudjuk, hogy $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$. Ha $B_{n,k_1,k_2,...,k_r}$-rel jelöljük a vizsgált eseményt, akkor, a klasszikus képlet alapján

$$P(B_{n,k_1,k_2,...,k_r}) = \frac{C_{a_1}^{k_1} C_{a_2}^{k_2} ... C_{a_r}^{k_r}}{C_{\sum_{i=1}^{r} a_i}^{n}}$$

**2.8. Megjegyzés.** *Feltételezzük, hogy $n \leq \sum_{i=1}^{r} a_i$ és $k_i \leq a_i$, minden $i = \overline{1,n}$ esetén.*

### 2.5.5. Poisson modell

Abban az esetben alkalmazzuk, ha egy $A$ esemény bekövetkezése a kísérlet ismétlésének sorszámától függ. Ha $n$ - szer ismételjük meg a kisérletet, szeretnénk meghatározni annak a valószínűségét, hogy az

$A$ esemény $k$ - szor következik be. A matematikai modell $n$ urnából áll, ahol minden urna kétszínű golyót tartalmaz (fehéret és lilát), de különböző arányban. Mindegyik urnából húzunk egy golyót és keressük annak a valószínűségét, hogy $n$ urnából $k$ - szor fehéret húzunk. Jelölje $A_i$ azt az eseményt, hogy az $i$ - edik urnából fehéret húzunk. Ekkor $P(A_i) = p_i$, $P(\overline{A}_i) = 1 - p_i = q_i$, $p_i + q_i = 1$ minden $i = \overline{1, n}$ esetén. Ha $B_{n,k}$ a keresett esemény, akkor

$$B_{n,k} = \bigcup_{i_1<i_2<...<i_k} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap ... \cap \overline{A}_{i_n}).$$

Figyelembe véve, hogy az egyesítés tagjai egymást kizáró események és a metszetben független események szerepelnek, következik, hogy

$$P(B_{n,k}) = \sum p_{i_1} p_{i_2} ... p_{i_k} q_{i_{k+1}} ... q_{i_n}$$

**2.9. Megjegyzés.** *A $P(B_{n,k})$ valószínűséget a $(p_1 x + q_1)...(p_n x + q_n)$ polinom $x^k$-t tartalmazó tagjának együtthatójából is meghatározhatjuk.*

**2.10. Megjegyzés.** *Tipikus Poisson modellbe illő feladat az, amikor céllövők ugyanazt a táblát célozzák és azt szeretnénk meghatározni, hogy mi annak a valószínűsége, hogy a céltáblát k találat érje.*

**2.11. Megjegyzés.** *Ha a modellben $p_i = p$, $i = \overline{1, n}$, akkor a binomiális modellt kapunk vissza.*

### 2.5.6. Geometriai modell

Függetlenül ismételjük a kisérletet ugyanolyan körülmények között. Minden ismétlésnél az $A$ esemény bekövetkezését vizsgáljuk. Tudva azt, hogy egy kísérlet után az $A$ esemény $p$ valószínűséggel következik be, szeretnénk meghatározni annak a valószínűségét, hogy az $A$ esemény a $k+1$-edik lépésben következzen be először.

A matematikai modell egy urna, amely kétszínű golyókat tartalmaz. Ha független eseményeket vizsgálunk, akkor visszatevéssel húzunk. Azt szeretnénk meghatározni, hogy mi annak a valószínűsége, hogy a fehér golyó kihúzásáig $k$ darab lila golyót húzunk ki. Legyen $B_k$ az az esemény, hogy az első $k$ húzáskor lila golyót húztunk és a $k+1$. húzásnál fehéret húztunk. Jelölje $A_i$ azt az eseményt, hogy az $i$-edik húzásnál fehéret húztunk, $P(A_i) = p$, $P(\bar{A}_i) = 1 - p = q$. Felhasználva a függetlenséget kapjuk:

$$B_k = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap ... \cap \bar{A}_k \cap A_{k+1}$$

és így

$$P(B_k) = q^k \cdot p.$$

**2.12. Megjegyzés.** *Az előbbi valószínűséget a*

$$\frac{p}{1-qx} = \sum_{k=0}^{\infty} pq^k x^k$$

*kifejtésének $x^k$ -t tartalmazó együtthatójaként is meghatározhatjuk.*

**2.13. Megjegyzés.** *Az előbbi megjegyzésben $x = 1$ helyettesítéssel kapjuk, hogy*

$$\sum_{k=0}^{\infty} pq^k = 1.$$

### 2.5.7. Pascal modell

Az előbbi modell általánosítása arra az esetre, amikor az $A$ esemény $n$-edik bekövetkezését az $n+k$-adik lépésben várjuk.

A matematikai modellhez egy urnát választunk fehér és lila golyókkal. Visszatevéssel húzunk és keressük annak a valószínűségét, hogy az $n$-edik fehér golyó a $k$-adik lila golyó után következzen be, azaz az $n+k$-adik lépésben. Ha $B_{n,k}$ jelöli a keresett eseményt, akkor ez úgy érhető el, hogy $n+k$-adik lépésben fehéret és előtte valahol $n-1$ fehéret és $k$ darab lilát húztunk. Ez utóbbi eseményt jelöljük $A_{n-1.k}$-val. Így

$$B_{n,k} = A_{n+k} \cap A_{n-1,k}.$$

A binomiális modell alapján

$$P(A_{n-1,k}) = C_{n+k-1}^{n-1} p^{n-1} q^k,$$

tehát

$$P(B_{n,k}) = P(A_{n+k}) \cdot P(A_{n-1,k}) = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k.$$

**2.14. Megjegyzés.** *$n=1$ esetén a geometriai modellt kapjuk.*

**2.15. Megjegyzés.** *Mivel $B_{n,k}$, $k=\overline{0,\infty}$ teljes eseményrendszer,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(B_{n,k}) = 1.$$

**2.16. Megjegyzés.** *A $P(B_{n,k})$ valószínűséget a $\frac{p^n}{(1-qx)^n}$ kifejtéséből az $x^k$ együtthatójaként is meghatározhatjuk.*

### 2.5.8. Markov - Pólya modell

Ez a modell több eddigi modell általánosítása. Tekintsünk egy urnát $a$ darab fehér és $b$ darab lila golyóval. Visszatevéssel húzunk úgy, hogy a kihúzott golyó színével megegyező színű $c$ darab golyót is visszateszünk. Keressük annak a valószínűségét, hogy $n$ húzás után $k$ darab fehér golyót húzunk. Legyen $B_{n,k}$ ez az esemény. Ekkor

$$B_{n,k} = \bigcup_{i_1<i_2<\ldots<i_k} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n}).$$

Az egyesítés tagjai egymást kizáró események, ezért

$$P(B_{n,k}) = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n}).$$

A metszetek valószínűségét a (2.5) tulajdonság (ii) pontja segítségével számítjuk ki, mert az események nem függetlenek:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n}) =$$

$$= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+r}{a+b+r} \cdot \ldots \cdot \frac{a+(k-1)r}{a+b+(k-1)r} \cdot$$

$$\cdot \frac{b}{a+b+kr} \cdot \ldots \cdot \frac{b+(n-k+1)r}{a+b+(n-1)r}$$

Az összeg minden tagjának valószínűsége az előbbi összefüggéssel számítható ki, tehát

$$P(B_{n,k}) = C_n^k \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+r}{a+b+r} \cdot \ldots \cdot \frac{a+(k-1)r}{a+b+(k-1)r} \cdot$$

$$\cdot \frac{b}{a+b+kr} \cdot \ldots \cdot \frac{b+(n-k+1)r}{a+b+(n-1)r}.$$

**2.17. Megjegyzés.** *$c = 0$ esetén a binomiális modellt kapjuk, $c = -1$-re pedig a visszatevés nélküli Bernoulli modellt.*

# 3. Fejezet

# Valószínűségi változó

Az eddigi fejezetekben a valószínűségszámítás néhány alapvető fogalmával, tételével, módszerével ismerkedtünk meg. Elvonatkoztatva a kísérletek konkrét tartalmától, az eseménytéren egy velós értékű függvényt értelmezünk, amely lehetővé teszi, hogy az analízis módszereivel vizsgáljuk a véletlen jelenségeket.

## 3.1. A valószínűségi változó szemléletes fogalma

Az előbbiekben láttuk, hogy a valószínűségszámítás olyan véletlen kísérleteket vizsgál, amelyek kimenetele a kísérlet elvégzése előtt nem látható előre.

Fizikai vagy kémiai kisérletek esetén, amikor például egy állandót szeretnénk meghatározni, a mérés eredménye valamilyen előre nem ismert számérték, de belőle, illetve több mérési eredményből következtethetünk az állandó tényleges értékére.

Az év egy adott napján egy folyó vízállása nem jósolható meg előre. Ennek centiméterekben adott értéke viszont fontos, ha a vízellátást vagy az árvízveszélyt vesszük figyelembe. Ezekben a példákban a véletlen kísérlet kimenetele számértékkel jellemezhető.

Ha arra vagyunk kiváncsiak, hogy egy találomra kiválasztott személy hajának a színe szőke vagy barna, akkor e kísérlet eredményét valamilyen kvalitatív értékkel jellemezhetjük. Persze, ebben az esetben is adhatunk számszerű jellemzést: írjunk például 1-et, ha a találomra kiválasztott személy hajaszíne barna és 0-t, ha nem.

Sok esetben szükség van arra, hogy a véletlen kísérlet eredményét több számmal jellemezzük. Ilyen eset például a meteorológiában a napi időjárás jellemzése a középhőmérséklet, a csapadék mennyisége, a szél sebessége, iránya segítségével. Ekkor a véletlen kísérlet kimenetelét egy vektorral jellemezzük.

A kísérlet kimenetelét jellemző számot vagy vektort olyan függvényként fogjuk fel, amelynek független változója a véletlen. Egy ilyen függvényt valószínűségi változónak nevezünk. Igy a kísérletet jellemző függvény értelmezési tartománya az eseménytér.

**3.1. Példa.** *Piros és fekete dobókockával dobunk és adjuk össze a két kockán kapott eredményt. Az elemi események itt az* $(i, j)$ *számpárok. A véletlen kísérlet számszerű eredménye* $i + j$. *A dobások eredménye 2 és 12 közt bármilyen egész szám lehet, tehát ezek a valószínűségi változó lehetséges értékei.*

**3.2. Példa.** *Előfordulhat, hogy az eseményteret nehéz vagy lehetetlen leírni. Ilyen például egy városban az év egy adott napján a vízállás esete. Az ezt befolyásoló eseménytér megadása szinte lehetetlen, de szükségtelen is. A véletlen kísérlet eredményeinek tekinthetjük a lehetséges vízállás-értékeket. Vagyis a valószínűségi változó értelmezési és értéktartományát azonosnak vehetjük. Gyakorlati következtetések céljából elegendő, ha megadjuk, hogy az értékkészlet valamely részhalmaza a kísérlet sokszori elvégzése során milyen gyakorisággal fordul elő. Ha például tudnánk, hogy az év adott napján az esetek* 95%*-ában* *a mért érték nem jelent veszélyt, az már hasznos információ volna.*

**3.3. Példa.** *Az, hogy egy radioaktív anyag valamely részecskéje t időtartamnál hosszabb vagy rövidebb idő alatt bomlik-e le, előre nem jósolható meg. Az elbomlásig eltelt időtartam 0 és $\infty$ között bármilyen értéket felvehet. Kísérletekkel kimutatták, hogy a $]0,t[$ intervallumban elbomló részecskék hányada az összes részecskék számához viszonyítva $1-e^{-\lambda t}$ alakú. Itt $\lambda$ pozitív állandó, amely a rádióaktív anyagtól függ. Például rádium esetén $\lambda = 1,38 \cdot 10^{-11}$.*

## 3.2. A valószínűségi változó matematikai fogalma

Legyen $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ egy valószínűségi mező és jelölje $\mathcal{B}$ az $\mathbb{R}$ Borel - mérhető halmazainak $\sigma$-algebráját.

**3.1. Értelmezés.** *Egy $X : \Omega \to \mathbf{R}$ függvényt* **valószínűségi változónak** *nevezünk, ha mérhető, vagyis*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{K},$$

*bármely $B \in \mathcal{B}$ esetén.*

Ha a $\sigma$- algebra generátorának a $(]-\infty, x[)_{x\in\mathbb{R}}$ halmazcsaládot tekintjük, akkor az előbbivel ekvivalens értelmezést adhatunk:

**3.2. Értelmezés.** *Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt* **valószínűségi változónak** *nevezünk, ha mérhető, vagyis*

$$X^{-1}(]-\infty, x[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathcal{K},$$

*bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.*

A továbbiakban bevezetjük a következő jelölést:

$$(X < x) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}.$$

A valószínűségi változókat jellemezhetjük a $\sigma$-algebra generátorhalmaza segítségével:

**3.1. Tulajdonság.** *Az $X : \Omega \to \mathbf{R}$ függvény akkor és csak akkor valószínűségi változó, ha*

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{K},$$

*bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.*

**Bizonyítás.** Felhasználjuk, hogy

$$(X \leq x) = \cap_{n=1}^{\infty}(X < x + \frac{1}{n})$$

és a $\sigma$-algebra tulajdonságait. ■

Figyelembe véve, hogy

$$(X \geq x) = \Omega \setminus (X < x)$$

és

$$(X > x) = \Omega \setminus (X \leq x),$$

a valószínűségi változó értelmezésében a mérhetőség feltételét a következő feltételek egyikével helyettesíthetjük: $(X \leq x) \in \mathcal{K}$, $(X \geq x) \in \mathcal{K}$ vagy $(X > x) \in \mathcal{K}$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

**3.2. Tulajdonság.** *Ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy Borel-értelemben mérhető függvény és $X : \Omega \to \mathbb{R}$ egy valószínűségi változó, akkor $Y = g(X)$ szintén valószínűségi változó.*

**Bizonyítás.** Ha $g$ mérhető függvény, akkor a $(]g(t) < x[)_{t\in\mathbb{R}}$ szintén mérhető, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. ■

A tulajdonság akkor is igaz, ha a $g$ többváltozós függvény. Ezek alapján, megfelelően választva a $g$ függvényt, kapjuk a következő tulajdonságot:

**3.3. Tulajdonság.** *Ha $X$ és $Y$ két valószínűségi változó és $a$ egy valós szám, akkor*

$$aX,\ |X|,\ X^2,\ \frac{1}{X},\ X+Y,\ X-Y,\ XY,\ \frac{Y}{X},\ X \neq 0,$$

*szintén valószínűségi változó.*

A valószínűségi mező harmadik eleme eddig nem jelent meg a valószínűségi változó jellemzésében.

**3.3. Értelmezés.** *Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó* **eloszlása** *az a*

$$Q : B \to \mathbb{R}$$

*függvény, amelyet a*

$$Q(B) = P(\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B) = P(X \in B)$$

*képlettel értelmezünk.*

**3.1. Megjegyzés.** *Egy valószínűségi változó eloszlása egy valószínűség az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eseménytéren.*

A valószínűségi változók egy másik jellemzője az eloszlásfüggvény.

**3.4. Értelmezés.** *Az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó* **eloszlásfüggvénye** *az $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyet a*

$$F(x) = P(X < x)$$

*képlet értelmez minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.*

**3.1. Tétel.** *Egy valószínűségi változó eloszlása és eloszlásfüggvénye egyértelműen meghatározzák egymást.*

**Bizonyítás.** Az eloszlásfüggvény felírható

$$F_X(x) = Q(]-\infty, x[), \qquad x \in \mathbb{R},$$

alakban, tehát az eloszlás meghatározza az eloszlásfüggvényt.

Most megmutatjuk, hogy az eloszlásfüggvényből egyértelműen következtethetünk az eloszlásra. Legyen $F$ az $X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye és tételezzük fel, hogy két különböző, $Q$-val és $Q'$-vel jelölt eloszláshoz tartozik. Igazoljuk, hogy ez nem lehetséges.

Ehhez legyen [a,b[ egy tetszőleges intervallum. Ekkor

$$Q([a, b[) = F(b) - F(a),$$

illetőleg

$$Q'([a, b[) = F(b) - F(a).$$

Így $Q = Q'$ minden balról zárt és jobbról nyílt intervallum, tehát azok $\mathcal{F}$-fel jelölt algebráján is. Ismeretes, hogy az $\mathcal{F}$ algebra által generált legszűkebb $\sigma$-algebra éppen a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ezért alkalmazható az egyértelmű kiterjesztési tétel, amely szerint, ha két véges mérték megegyezik egy algebrán, akkor egyenlőek az algebra által generált $\sigma$-algebrán is. Tehát minden Borel halmazon $Q = Q'$. Ezzel tételünket igazoltuk. ∎

A következőkben az eloszlásfüggvény tulajdonságait bizonyítjuk be.

**3.4. Tulajdonság.** *Az eloszlásfüggvény a* $[0, 1]$ *intervallumban veszi fel az értékeit.*

**Bizonyítás.** Azonnal következik az eloszlásfüggvény értelmezése alapján. ∎

**3.5. Tulajdonság.** *Ha $F$ az $X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye és $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, akkor teljesülnek a következő összefüggések:*

$$\begin{aligned}
(i)\ P(a \le X < b) &= F(b) - F(a), \\
(ii)\ P(a < X < b) &= F(b) - F(a) - P(X = a), \\
(iii)\ P(a < X \le b) &= F(b) - F(a) - P(X = a) + P(X = b), \\
(iv)\ P(a \le X \le b) &= F(b) - F(a) + P(X = b)
\end{aligned}$$

**Bizonyítás.** Felhasználva, hogy az $(X < a)$ esemény implikálja az $(X < b)$ eseményt, mert $a < b$, a következő relációkat írhatjuk:

$$\begin{aligned}
P(a \le X < b) &= P(X < b, \overline{X < a}) = P((X < b) \setminus (X < a)) = \\
&= P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

A többi összefüggés igazolásához felhasználjuk a következő egyenlőségeket:

$$\begin{aligned}
(a < X < b) &= (a \le X < b) \setminus (X = a) \\
(a < X \le b) &= [(a \le X < b) \cup (X = b)] \setminus (X = a) \\
(a \le X \le b) &= (a \le X < b) \cup (X = b)
\end{aligned}$$

és a valószínűség tulajdonságait. ■

**3.6. Tulajdonság.** *Ha $F$ az $X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, akkor*

$$\begin{aligned}
&(i) && F \quad \textit{nem-csökkenő függvény;} \\
&(ii) && \lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0 \textit{és} \lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1; \\
&(iii) && F \quad \textit{balról folytonos.}
\end{aligned}$$

**Bizonyítás.** (i) Mivel $x < y$ esetén az $(X < x)$ eseményből következik az $(X < y)$ esemény, ezért

$$P(X < x) \leq P(X < y)$$

vagyis

$$F(x) \leq F(y).$$

(ii) Tekintsük a valós számok olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csökkenő részsorozatát, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Ekkor az $(X < x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eseménysorozat csökkenő és $\cap_{n\in\mathbb{N}}(X < x_n) = \emptyset$. Az eseménysorozat folytonossági tulajdonsága alapján

$$0 = P(\cap_{n\in\mathbb{N}}(X < x_n)) = \lim_{n\to\infty} P(X < x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(-\infty).$$

Az $F(\infty) = 1$ igazolásához hasonlóan járunk el az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ növekvő számsorozatot tekintve.

(iii) A baloldali folytonosság igazolásához legyen $x \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges pont. Tekintsük az $x$-hez tartó növekvő $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozatot. Ekkor az $(x_n \leq X < x)_{n\in\mathbb{N}}$ egy csökkenő eseménysorozat, amelyre $\cap_{n\in\mathbb{N}}(x_n \leq X < x) = \emptyset$. Az eseménysorozat folytonossági tulajdonságának felhasználásával kapjuk

$$\begin{aligned} 0 &= P(\cap_{n\in\mathbf{N}}(x_n \leq X < x)) = \lim_{n\to\infty} P(x_n \leq X < x) = \\ &= F(x) - \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x) - F(x-0), \end{aligned}$$

ahonnan $F(x-0) = F(x)$. ■

**3.2. Megjegyzés.** *Az előbbi tétel három tulajdonsága jellemzi az eloszlásfüggvényt.*

*Legyen $F$ az előbbi három tulajdonsággal rendelkező függvény és legyen $G = F^{-1}$, az $F$ folytonossági pontjaiban. Ha $x$ szakadási pont, akkor $G(y) = x$, úgy, hogy $y \in ]F(x), F(x+0)[$ és ha $F(x) = c$ minden*

*$x \in ]a, b]$ estén, akkor $G(c) = a$. Legyen $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{K}$ álljon az $\Omega$ Borel mérhető részhalmazaiból és $P$ legyen a Lebesgue mérték. Ekkor az*

$$X : \Omega \to \mathbf{R}, \quad X(\omega) = G(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

*függvény egy valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye megegyezik az $F$ függvénnyel. Valóban,*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X < x) = P(\{\omega \in \Omega \mid G(\omega) < x\}) = \\ &= P(\{\omega \in \Omega \mid \omega < F(x)\}) = F(x). \end{aligned}$$

**3.3. Megjegyzés.** *A valószínűségi változó egyértelműen meghatározza az eloszlásfüggvényt, de ugyanahhoz az eloszlásfüggvényhez különböző valószínűségi változóktól is eljuthatunk.*

**3.7. Tulajdonság.** *Ha az $X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F$, akkor*

$$P(X \leq x) = F(x+0),$$
$$P(X = x) = F(x+0) - F(x).$$

**Bizonyítás.** Az első összefüggés igazolásához tekintsük az $(X < x + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ csökkenő eseménysorozatot, amelyre

$$\cup_{n\in\mathbb{N}}(X < x + \frac{1}{n}) = (X \leq x).$$

A folytonossági tulajdonság alapján

$$P(X \leq x) = \lim_{n\to\infty} P(X < x + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} F(x + \frac{1}{n}) = F(x+0).$$

A második összefüggés az elsőnek következménye, ha figyelembe vesszük, hogy

$$(X = x) = (X \leq x) \setminus (X < x)$$

és

$$(X < x) \subset (X \leq x).$$

■

**3.8. Tulajdonság.** *Egy eloszlásfüggvénynek legfennebb megszámlálhatóan végtelen sok szakadási pontja van.*

**Bizonyítás.** Mivel $F(x) \in [0,1]$ és F nem-csökkenő, ezért legtöbb 1 darab $\frac{1}{2}$-nél nagyobb szakadása, legfennebb 3 darab $\frac{1}{2^2}$-nél nagyobb szakadása, általában legtöbb $2^n - 1$ darab $\frac{1}{2^n}$-nél nagyobb szakadása van. Tehát a szakadások száma megszámlálható. ■

## 3.3. Diszkrét valószínűségi változó

**3.5. Értelmezés.** *Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változót* **diszkrétnek** *nevezünk, ha értékeinek halmaza legfennebb megszámlálható.*

Ebben az esetben a mérhetőség feltétele a következő alakban írható:

$$X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \in \mathcal{K},$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

A továbbiakban példákat adunk diszkrét valószínűségi változóra.

**3.9. Tulajdonság.** *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = a$, minden $\omega \in \Omega$ esetén. Ekkor $X$ egy valószínűségi változó.*

**Bizonyítás.** Nyilvánvalóan a függvény véges darab értéket vesz fel. Másrészt

$$X^{-1}(x) = \begin{cases} \Omega, & ha \quad x = a \\ \emptyset, & ha \quad x \neq a \end{cases},$$

tehát mérhető. ■

**3.6. Értelmezés.** *Egy $A \in \mathcal{K}$ esemény* **indikátor függvénye** *az $X_A : \Omega \to \mathbb{R}$,*

$$X_A(\omega) = \begin{cases} 1, & ha \quad \omega \in A \\ 0, & ha \quad \omega \notin A \end{cases}$$

*függvény.*

**3.10. Tulajdonság.** *Az indikátor függvény diszkrét valószínűségi változó.*

**Bizonyítás.** A függvény értéktartománya $\{0,1\}$, tehát véges. Másrészt

$$X_A^{-1}(x) = \begin{cases} A, & ha \quad x = 1 \\ \Omega \setminus A, & ha \quad x = 0 \\ \emptyset, & ha \quad x \neq 0, x \neq 1 \end{cases},$$

tehát mérhető. ■.

**3.7. Értelmezés.** *Egy valószínűségi változóról azt mondjuk, hogy* **egyszerű***, ha értekeinek a halmaza véges.*

**3.11. Tulajdonság.** *Legyen $A_i \in \mathcal{K}$, $i = \overline{1,n}$, egy teljes eseményrendszer. Értelmezzük a következő függvényt $X : \Omega \to \mathbb{R}$,*

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i X_{A_i}(\omega),$$

*ahol $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ és $X_{A_i}$ az $A_i$ esemény indikátor függvénye. Ekkor $X$ diszkrét valószínűségi változó.*

**Bizonyítás.** Az $X$ értékeinek halmaza $\{x_1, x_2, ...x_n\}$. Másrészt

$$X^{-1}(x) = \begin{cases} A_i, & ha \quad x = x_i, \ i = \overline{1,n} \\ \Omega \setminus \cup_{i=1}^{n} A_i, & ha \quad x \neq x_i, \ i = \overline{1,n} \end{cases},$$

tehát $X^{-1}(x)$ mérhető. ■

**3.12. Tulajdonság.** *Ha $X$ egy egyszerű valószínűségi változó, akkor létezik $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ úgy, hogy*

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i X_{A_i}(\omega).$$

**Bizonyítás.** Legyen $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ az $X$ valószínűségi változó értékeinek halmaza és értelmezzük a következő esményrendszert:

$$A_i = (X = x_i) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\}, i = \overline{1, n},$$

$(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ teljes eseményrendszert alkot, mert $A_i \cap A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$ és

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = \cup_{i=1}^{n} (X = x_i) = \Omega.$$

Ekkor

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i X_{A_i}(\omega).$$

■

**3.13. Tulajdonság.** *Ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy Borel-mérhető függvény és $X$ diszkrét valószí nűségi változó, akkor $Y = g(X)$ szintén diszkrét valószínűségi változó.*

**Bizonyítás.** Mivel az X valószínűségi változó értékeinek halmaza $\{x_i, i \in I\}$ legfennebb megszámlálható, ezért $\{g(x_i), i \in I\}$ is legfennebb megszámlálható halmaz. A mérhetőség igazolásához figyelembe vesszük, hogy $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
Y^{-1}(y) &= \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = y\} = \{\omega \in \Omega \mid g(X(\omega)) = y\} = \\
&= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = g^{-1}(y)\} = \cup_{x \in g^{-1}(y)} \{x \in \Omega \mid X(\omega) = x\} = \\
&= \cup_{x \in g^{-1}(y)} X^{-1}(x) \in \mathcal{K},
\end{aligned}$$

tehát $Y^{-1}(y)$ mérhető. ■

**3.4. Megjegyzés.** *Az előbbi tulajdonság általánosítható arra az esetre is amikor $g$ többváltozós függvény. Legyen $X_1, X_2, ..., X_n$ diszkrét* *valószínűségi változó és* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *Borel értelemben mérhető függvény. Ekkor* $Y = g(X_1, X_2, ..., X_n)$ *szintén diszkrét valószínűségi változó. Innen következik, hogy, ha* $X_1, X_2$ *két diszkrét valószínűségi változó, akkor*

$$X_1 + X_2,\ X_1 - X_2,\ X_1X_2,\ X_1/X_2,\ X_1^n,\ aX_1, \qquad a \in \mathbb{R}$$

*is diszkrét valószínűségi változó.*

A diszkrét valószínűségi változó eloszlása az általános értelmezés sajátos esete.

**3.8. Értelmezés.** *Legyen* $X$ *diszkrét valószínűségi változó, melynek értékei* $\{x_i, i \in I\}$. *Az* $X$ *eloszlása:*

$$Q_X(B) = P(\cup_{x_i \in B} A_i), \quad A_i = (X = x_i),\ i \in I$$

*Legyen* $P(A_i) = p_i,\ i \in I$, *ekkor*

$$Q_X(B) = \sum_{x_i \in B} p_i$$

A diszkrét valószínűségi változó eloszlását a következő táblázattal szokták jelölni:

$$X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}.$$

**3.4. Példa.** *Tekintsük a pénzfeldobási kísérletet. Legyen* 0 *a fej,* 1 *pedig az írás megjelenése.*

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

**3.2. Tétel.** *Legyen* $X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$ *egy diszkrét valószínűségi változó. Ekkor* $\sum_{i \in I} p_i = 1$

**Bizonyítás.** Az $(X = x_i)$ események, $i \in I$, teljes eseményrendszert alkotnak. $P(\cup_{i\in I}(X = x_i)) = 1$, tehát $\sum_{i\in I} P(X = x_i) = 1$ vagyis $\sum_{i\in I} p_i = 1$. ■

### 3.3.1. Nevezetes diszkrét eloszlások

A nevezetes modellekhez tartozó eloszlásokat még valószínűségi törvényeknek is nevezik.

**1) Indikátor eloszlás**

Legyen $A$ egy tetszőleges esemény. Az $A$ indikátorfüggvényének eloszlása $X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$, ahol $p$ az $A$ esemény bekövetkezésének valószínűsége, $q = 1 - p$.

**2) Binomiális eloszlás**

Egy $X$ valószínűségi változót binomiális eloszlásúnak nevezünk, ha értékei természetes számok 0-tól $n$-ig és a hozzá tartozó valószinűségek a binomiális modellből származnak

$$X \begin{pmatrix} k \\ P(B_{n,k}) \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}},$$

ahol $P(B_{n,k}) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad p \in ]0,1[, \ q = 1 - p, \ n \in \mathbf{M}$.

**3.3. Tétel.** *Az $X$ binomiális eloszlású valószínűségi változó legvalószínűbb értéke:*

$$x = \begin{cases} 0, & ha \quad np - q < 0 \\ int(np - q) + 1, & ha \quad np - q > 0, np - q \notin \mathbf{N} \\ np - q és np + p, & ha \quad np - q \in \mathbf{N} \end{cases}$$

**Bizonyítás.** A legvalószínűbb érték meghatározása érdekében tanulmányozzuk a $(P(B_{n,k}))_{k=\overline{0,n}}$ sorozat monotonítását. Felírhatjuk

$$\frac{P(B_{n,k+1})}{P(B_{n,k})} = \frac{C_n^{k+1}p^{k+1}q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{n!k!(n-k)!p}{(k+1)!(n-k-1)!n!q} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q}.$$

Vizsgáljuk a törtnek az 1-hez való viszonyát.

Ha $\frac{(n-k)p}{(k+1)q} > 1$ akkor $np - kp > kq + q$, vagyis $np - q > k$.

Ha $np - q < 0$, akkor

$$P(B_{n,0}) > P(B_{n,1}) > ... > P(B_{n,n}),$$

vagyis a 0 a legvalószínűbb érték.

Ha $np - q \leq 0$, akkor

$$P(B_{n,0}) < P(B_{n,1}) < ... < P(B_{n,[np-q]}) > P(B_{n,[np-q]+1}) > ...,$$

vagyis $[np - q]$ a legvalószínűbb érték.

Ha $np - q \in \mathbb{N}$, akkor

$$P(B_{n,0}) < P(B_{n,1}) < ... < P(B_{n,np-q}) = P(B_{n,np-q+1}) > ...,$$

vagyis $np - q = np + p$ a legvalószínűbb érték. ∎

**3) Hipergeometrikus eloszlás**

Az X valószínűségi változó hipergeomerikus eloszlású, ha

$$X \begin{pmatrix} k \\ P(B_{n,k}) \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}},$$

ahol

$$P(B_{n,k}) = \frac{C_a^b C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}, \;\; a, b \in \mathbf{N}, \;\; n \leq \min(a, b).$$

Ezek a valószínűségek a Bernoulli-féle visszatevés nélküli modellből származnak.

**3.4. Tétel.** *Ha az $X$ valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású és $a+b$ végtelenbe tart, akkor $X$ binomiális eloszlású lesz $p = \frac{a}{a+b}$ paraméterrel.*

**Bizonyítás.** Vezessük be a következő jelöléseket $N = a+b$, $p = \frac{a}{N}$, $q = \frac{b}{N}$. Ekkor a hipergeometrikus eloszlás valószínűsége így alakul

$$\begin{aligned} P(B_{n,k}) &= \frac{a!}{k!(a-k)!}\frac{b!}{(n-k)!(b-n+k)!}\frac{n!(a+b-n)!}{(a+b)!} = \\ &= C_n^k \frac{a(a-1)...(a-k+1)b(b-1)...(b-n+k+1)}{(a+b)(a+b-1)...(a+b-n+1)} = \\ &= C_n^k \frac{pN(pN-1)...(pN-k+1)qN...(qN-n+k+1)}{N(N-1)...(N-n+1)} = \\ &= C_n^k \frac{p(p-\frac{1}{N})...(p-\frac{k+1}{N})q(q-\frac{1}{N})...(q-\frac{n-k-1}{N})}{(1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})...(1-\frac{n-1}{N})} \end{aligned}$$

Határértékre térve a

$$\lim_{N\to\infty} P(B_{n,k}) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

összefüggést kapjuk, vagyis a határérték binomiális eloszlású. ∎

Az előbbi tétel alapján egy hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó elég nagy $a+b$ esetén tekinthető binomiálisnak.

**4) Poisson eloszlás**

Egy $X$ valószínűségi változó $\lambda$ paraméterű Poisson eloszlású, ha értékei természetes számok és

$$X \begin{pmatrix} k \\ P_\lambda(k) \end{pmatrix}_{k=1,2,...},$$

ahol
$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda > 0.$$
Figyelembe véve, hogy ha $k \to \infty$ akkor a valósziűség határétéke 0, ezt az eloszlást ritka események eloszlásának is nevezik. A binomiális eloszlás és Poisson eloszlás kapcsolatát a következő tétel adja:

**3.5. Tétel.** *(***Poisson***) Ha az $X$ binomiális eloszlású valószínűségi változó úgy, hogy $p$ az $n$-nek függvénye, $p = p_n$, és $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$, akkor az $X$ határértékben Poisson eloszlásúvá válik.*

**Bizonyítás.** Mivel $lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$, ezért $p_n$ felírható $p_n = \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n})$ alakban, ahol $\lim_{n\to\infty} o(\frac{1}{n}) = 0$. Ezekkel a jelölésekkel a binomiális eloszlás valószínűségeire írhatjuk
$$P(B_{n,k}) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n})\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n})\right)^{n-k} =$$
$$= \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\lambda^k \left(1 + o(\frac{1}{n})\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n})\right)^{n-k}.$$
Tudjuk, hogy
$$\lim_{n\to\infty}[1 - \frac{\lambda}{n} - o(\frac{1}{n})]^{n-k} = e^{-\lambda}.$$
Határértékre térve
$$\lim_{n\to\infty} P(B_{n,k}) = \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda},$$
amit bizonyítani kellett. ■

Ha azonos típusú történések időpontjait figyeljük meg (például egy telefonközpontba beérkező hívások időpontjait, a rádióaktív részecskék elbomlásának időpontjait, egy árúház pénztárához a vevők beérkezésének időpontjait stb.). Kimutatható, hogy egy időintervallumban bekövetkezett történések száma, bizonyos feltételek mellett, Poisson eloszlást követ.

**5) Pascal eloszlás**

Az $X$ valószínűségi változó Pascal eloszlású, ha értékei természetes számok és a valószinűségeket a Pascal eloszlásból kapjuk.

$$X\begin{pmatrix} k \\ P_{n,k} \end{pmatrix}_{k=0,1,2,\ldots},$$

ahol

$$P_{n,k} = C_{n+k-1}^{k} p^n q^k, \quad p \in ]0,1[, \ q = 1-p.$$

**3.6. Tétel.** *Ha $X$ Pascal eloszlású valószínűségi változó és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nq}{p} = \lambda > 0,$$

*akkor $X$ határértékben Poisson eloszlású lesz.*

**Bizonyítás.** A

$$p^n q^k = p^{n+k}\frac{1}{n^k}\left(\frac{nq}{p}\right)^k = \frac{1}{n^k}\left(\frac{1}{p}\right)^{-n-k}\left(\frac{nq}{p}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{n^k}\left(\frac{p+q}{p}\right)^{-n-k}\left(\frac{nq}{p}\right)^k = \frac{1}{n^k}\left(1-\frac{q}{p}\right)^{-n-k}\left(\frac{nq}{p}\right)^k = \frac{1}{n^k}e^{-\lambda}\lambda^k$$

számítások segítségével alakítsuk a Pascal eloszlás valószínűségét a következő képpen

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,k} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}\frac{1}{n^k}(1+\frac{1}{n}\frac{nq}{p})^{-n-k}(\frac{nq}{p})^k =$$

$$= \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+k-1)\ldots(k+1)}{n^k} = \frac{1}{k!}e^{-\lambda}\lambda^k,$$

ami bizonyítani kellett. ∎

### 3.3.2. Diszkrét valószínűségi változók függetlensége

**3.9. Értelmezés.** *Az $X$ és $Y$ valószínűségi változót, melynek eloszlása*

$$X\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}, \quad Y\begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j\in J},$$

**függetleneknek** *nevezzük, ha*

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j),$$

*minden $(i, j) \in I \times J$ számpár esetén.*

A fogalom kiterjeszthető $n$ darab valószínűségi változó esetére is.

**3.10. Értelmezés.** *Az $X_1, ..., X_n$ valószínűségi változókat, melynek eloszlása*

$$X_k\begin{pmatrix} x_i^k \\ p_i^k \end{pmatrix}_{i\in I_k}, \quad k = \overline{1, n}$$

**teljesen függetlennek** *nevezzük, ha*

$$P(X_{s_1} = x_{i_1}^{s_1}, ..., X_{s_r} = x_{i_r}^{s_r}) = P(X_{s_1} = x_{i_1}^{s_1})...P(X_{s_r} = x_{i_r}^{s_r}),$$

*minden $i_k \in I_{s_k}$, $k = \overline{1, r}$ esetén, ha $1 \leq s_1 < s_2 < ... < s_r \leq n$, $r = \overline{2, n}$.*

**3.14. Tulajdonság.** *Az $X_1, ..., X_n$ valószínűségi változó akkor és csak akkor független, ha*

$$P(X_1 = x_{i_1}^1, ..., X_n = x_{i_n}^n) = P(X_1 = x_{i_1}^1)...P(X_n = x_{i_n}^n), \qquad (3.1)$$

*minden $i_k \in I_k$, $k = \overline{1, n}$ esetén*

**Bizonyítás.** Ha a valószínűségi változók függetlenek, akkor értelmezés alapján teljesül a (3.1) összefüggés $r = n$ választással.

Fordítva, ha (3.1) teljesül, akkor írhatjuk

$$P(X_{s_1} = x_{i_1}^{s_1}, ..., X_{s_r} = x_{i_r}^{s_r}) = \sum_{\substack{i_j \in I_j \\ j \notin \{s_1,...,s_r\}}} P(X_1 = x_{i_1}^1, ..., X_n = x_{i_n}^n) =$$

$$= \sum_{\substack{i_j \in I_j \\ j \notin \{s_1,...,s_r\}}} P(X_1 = x_{i_1}^1)...P(X_n = x_{i_n}^n) = P(X_{s_1} = x_{i_1}^{s_1})...P(X_{s_r} = x_{i_r}^{s_r}),$$

mert

$$\sum_{i \in I_k} P(X_k = x_{i_k}^k) = 1, \ \ k \notin \{s_1, ..., s_r\},$$

vagyis az $X_1, ..., X_n$ valószínűségi változók függetlenek. ■

**3.15. Tulajdonság.** *Ha $X_1, ..., X_n$ független valószínűségi változó és $g_i : \mathbb{R} \to \mathbf{R}$, $i = \overline{1,n}$ mérhető függvény, akkor az $Y_i = g_i(X_i)$, $i = \overline{1,n}$ szintén független valószínűségi változó.*

**Bizonyítás.** A bizonyítást $n = 2$ esetben végezzük el. Ha

$$X \begin{pmatrix} x_i^k \\ p_i^k \end{pmatrix}_{i \in I_k}, \ k = \overline{1,n},$$

akkor a

$$(g_1(X_1) = y_j^1) = \bigcup_{g_1(x_i^1) = y_j^1} (X_1 = x_i^1)$$

és

$$(g_2(X_2) = y_j^2) = \bigcup_{g_2(x_i^2) = y_j^2} (X_2 = x_i^2).$$

Figyelembe véve, hogy az $X_i$ valószínűségi változók függetlenek, az egyesített események is függetlenek lesznek. ■

### 3.3.3. Műveletek diszkrét valószínűségi változókkal

Legyen $X$ és $Y$ két diszkrét valószínűségi változó

$$X\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}, \quad Y\begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j\in J},$$

és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mérhető függvény. Ekkor, az értelmezésből következnek az alábbi tulajdonságok:

**3.16. Tulajdonság.** *(i) g(X) eloszlása*

$$g(X)\begin{pmatrix} g(x_i) \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I},$$

*(ii) X+Y eloszlása*

$$X+Y\begin{pmatrix} x_i+y_j \\ p_{i,j} \end{pmatrix}_{(i,j)\in I\times J},$$

*(iii) XY eloszlása*

$$XY\begin{pmatrix} x_iy_j \\ p_{i,j} \end{pmatrix}_{(i,j)\in I\times J},$$

*(iv) X/Y eloszlása*

$$X/Y\begin{pmatrix} x_i/y_j \\ p_{i,j} \end{pmatrix}_{(i,j)\in I\times J},$$

*ahol* $p_{i,j}=P(X=x_i,Y=y_j)$. *Feltételeztük, hogy* $Y(\omega)\neq 0$, *minden* $\omega\in\Omega$. *Független valószínűségi változók esetén* $p_{i,j}=p_iq_j$, *minden* $(i,j)\in I\times J$ *esetén.*

## 3.4. Folytonos valószínűségi változók

A valószínűségi változók egyik igen fontos osztályát képezik a folytonos valószínűségi változók.

Legyen $X$ egy valószínűségi változó és $F$ az eloszlásfüggvénye.

**3.11. Értelmezés.** *Az $X$ valószínűségi változót* **folytonosnak** *nevezzük, ha eloszlásfüggvénye minden $x \in \mathbb{R}$ esetén előállítható*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{3.2}$$

*alakban, ahol $f$ Riemann-értelemben integrálható függvény. Az $f$ függvényt az $X$ valószínűségi változó* **sűrűségfüggvényének** *nevezzük.*

Tudjuk, hogy egy (3.2) alakban előállítható $F$ függvény abszolút folytonos és minden abszolút folytonos függvény előállítható (3.2) alakban. Ezért a folytonos valószínűségi változó értelmezhető a következőképpen is:

**3.12. Értelmezés.** *Egy valószínűségi változó folytonos, ha eloszlásfüggvénye abszolút folytonos.*

**3.17. Tulajdonság.** *Legyen $X$ egy folytonos valószínűségi változó, $F$ az eloszlásfüggvénye, $f$ pedig a sűrűségfüggvénye. Ekkor*

(*i*) $f(x) > 0$, *minden $x \in \mathbf{R}$ esetén;*

(*ii*) $F'(x) = f(x)$ *az $\mathbf{R}$ majdnem minden pontjában;*

(*iii*) $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx$;

(*iv*) $\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = 1$.

(*v*) $P(X = a) = 0$, *ahol $a \in \mathbf{R}$.*

*(vi)* $P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq B) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, *ha* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$

**Bizonyítás.** Az (i)-(iv) tulajdonságok a (3.2) és az integrál tulajdonságainak felhasználásával azonnal következnek.

Az (v) igazolásához felhasználjuk az $F$ folytonosságát. Bármely $\epsilon > 0$ esetén létezik egy $h > 0$ szám úgy, hogy $F(a+h) - F(a) < \epsilon$. Ekkor

$$0 \leq P(X = a) \leq P(a \leq X < a + h) = F(a+h) - F(a) < \epsilon.$$

Tehát $P(X = a) = 0$.

A (vi) tulajdonság az értelmezésből és az (v) tulajdonságból következik. ■

**3.5. Megjegyzés.** *Azokban a pontokban, ahol az $F$ nem deriválható az $f$ értékeit tetszőlegesen határozhatjuk meg.*

### 3.4.1. Néhány folytonos valószínűségeloszlás

**1) Egyenletes eloszlás**

Az $X$ valószínűségi változó az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású, ha sűrűségfüggvénye az intervallumon állandó és azon kívül 0, azaz

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & ha \quad a < x < b, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Eloszlásfüggvényét a következő képlet adja

$$F(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & ha \quad a < x \leq b \\ 1, & ha \quad x > b. \end{cases}$$

**2) Normális eloszlás (Gauss)**

Az egyik leggyakrabban használt valószínűségeloszlás. Egy X valószínűségi változó $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A normális eloszlás eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jelölése: $N(m, \sigma)$.

Az $N(0, 1)$ normális eloszlást **standard normális eloszlásnak** nevezzük. Ennek eloszlásfüggvénye

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

Arról, hogy $\Phi$ eloszlásfüggvény, könnyű meggyőződni. Mivel $f$ nemnegatív, azért csak azt kell megmutatni, hogy

$$\int_{\mathbf{R}} f(x) dx = 1.$$

Igazolni fogjuk, hogy

$$(\int_{\mathbf{R}} f(x) dx)^2 = \int_{\mathbf{R}} f(x) dx \int_{\mathbf{R}} f(z) dz = 1.$$

Végezzük a $x = r\cos\phi$, illetve a $z = r\sin\phi$ változócserét. Ekkor

$$\int_{\mathbf{R}} f(x) dx \int_{\mathbf{R}} f(z) dz = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y^2+z^2}{2}} dx dz =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\phi = \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^\infty = 1.$$

Az $N(m, \sigma)$ eloszlásfüggvénye és a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye közti kapcsolatot az integrálban változócserét végezve kapjuk:

$$F(x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jelöljük $L$-lel a **Laplace függvényt**

$$L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

$$\Phi(x) = L(x) + \frac{1}{2}.$$

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének érékeit vagy a Laplace függvény értékeit táblázatba foglalják pozitív $x$ értékekre, a negatívakat a következő képlet alapján számíthatjuk ki

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Több esetben hasznos ismerni $x$ nagy értékei esetén $1 - \Phi(x)$ értékét, vagy legalább becslést adni rá. Egy ilyen becslést ad a következő tétel

**3.7. Tétel.** *Tetszőleges $x > 0$ esetén*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{x}.$$

**Bizonyítás.** Deriválással ellenőrizhető, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} x} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2/2} \left( 1 + \frac{1}{y^2} \right) dy.$$

Tudjuk, hogy

$$e^{-\frac{y^2}{2}} < e^{-\frac{y^2}{2}}\left(1+\frac{1}{y^2}\right),$$

ezért

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy = 1-\Phi(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}(1+\frac{1}{y^2})dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ezzel a jobb oldali egyenlőtlenséget bizonyítottuk. Hasonlóan

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\left(1-\frac{3}{y^4}\right)dy.$$

Mivel

$$e^{-\frac{y^2}{2}}\left(1-\frac{3}{y^4}\right) \le e^{-\frac{y^2}{2}},$$

ezért

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\left(1-\frac{3}{y^4}\right)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{\frac{-y^2}{2}}dy = 1-\Phi(x),$$

amivel az egyenlőtlenségeket igazoltuk. ■

**3) Exponenciális eloszlás**

Az $X$ valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & ha \quad x > 0. \end{cases}$$

Eloszlásfüggvényét a következő képlet adja

$$F(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & ha \quad x > 0 \end{cases}$$

Az exponenciális eloszlás fontos szerepet játszik a rádióaktív bomlásjelenségek körében: a rádióaktív bomlások közti idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó, melynek $\lambda$ paramétere és az úgynevezett felezési idő ($T$) között fennáll a

$$\lambda = \frac{\log 2}{T}$$

összefüggés.

Erlang illetve Palm megmutatták, hogy valamely telefonközpontba érkező telefonhívások időpillanatai között eltelt idő tekinthető exponenciális eloszlású valószínűségi változónak.

**4) Gamma eloszlás**

Az $X$ valószínűségi változó $a, b > 0$ paraméterű Gamma eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a) b^a} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}, & ha \quad x > 0, \\ 0, & ha \quad x \leq 0, \end{cases}$$

ahol $\Gamma$ a másodfajú Euler- függvény

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \ a > 0.$$

**5) Student eloszlás**

Az $X$ valószínűségi változó $n$ szabadságfokú Student eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Ha $a = 1$ és $b = \frac{1}{\lambda}$ paramétert választunk, akkor exponenciális eloszlást kapunk.

**6) $\chi^2$ eloszlás**

Az $X$ valószínűségi változó $\chi^2$ (hi-négyzet) eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}\sigma^n} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

A $\chi^2$ eloszlás tulajdonképpen az $a = \frac{n}{2}$ és $b = 2\sigma^2$ paraméterű $\Gamma$ eloszlás.

**7) Cauchy eloszlás**

Az $X$ valószínűségi változó $a \in \mathbf{R}$ és $b > 0$ paraméterű Cauchy eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\pi b[1 + (\frac{x-a}{b})^2]}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Ha $a = 0$ és $b = 1$, akkor a Cauchy eloszlás megegyezik az 1 szabadságfokú Student eloszlással.

**8) Beta eloszlás**

Az $X : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ valószínűségi változó Beta eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} e^{\frac{-x}{b}}, & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

ahol

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

az elsőfajú Euler-függvény és $a, b$ két pozitív paraméter.

### 3.4.2. Valószínűségi változók függetlensége

**3.13. Értelmezés.** *Az $X$ és $Y$ valószínűségi változókat* **függetleneknek** *nevezzük, ha*

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x)P(Y < y), \quad minden\, x, y \in \mathbb{R} \quad esetén.$$

*Általában $X_1, ..., X_n$ valószínűségi változó független, ha az $x_1, ..., x_n$ minden valós értékére*

$$P(X_1 < x_1, ..., X_n < x_n) = P(X_1 < x_1)...P(X_n < x_n).$$

Felhasználva az $X$ és $Y$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvényét, $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P(X < x, Y < y), \; (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

a valószínűségi változók függetlenségét a következőképpen is megadhatjuk:

**3.14. Értelmezés.** *Az $X$ és $Y$ valószínűségi változó független, ha*

$$F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \; minden \quad x, y \in \mathbb{R}$$

*esetén.*

Általában: az $X_1, \cdots, X_n$ valószínűségi változók **teljesen függetlenek,** ha minden $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, $k = \overline{2, n}$ esetén

$$F_{X_{i_1} \cdots X_{i_k}}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} F_{X_{i_j}}(x_{i_j}).$$

Diszkrét valószínűségi változók esetén ez a definició megegyezik a (3.9) értelmezéssel. Valóban, ha $X$ és $Y$ eloszlása

$$X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}, \quad Y \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j \in J},$$

és $p_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j)$, $(i,j) \in I \times J$, akkor

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= F(x_i+0, y_j+0) - F(x_i+0, y_j) - F(x_i, y_j+0) + F(x_i, y_j) = \\ &= F_X(x_i+0)F_Y(y_j+0) - F_X(x_i+0)F_Y(y_j) - F_X(x_i)F_Y(y_j+0) + \\ &+ F_X(x_i)F_Y(y_j) = [F_X(x_i+0)) - F_X(x_i)][F_Y(y_j+0) - F_Y(y_j)] = \\ &= P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_i q_j \end{aligned}$$

Fordítva,

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)(x,y)} &= P(X < x, Y < y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} P(X = x_i, Y = y_j) = \\ &= \sum_{x_i < x} P(X = x_i) \sum_{y_j < y} P(Y = y_j) = F_X(x)F_Y(y). \end{aligned}$$

**3.18. Tulajdonság.** *Az $X$ és $Y$ folytonos valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha együttes sűrűségfüggvényük a sűrűségfüggvények szorzatával egyenlő, vagyis*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y),$$

*majdnem minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.*

**Bizonyítás.** A feltétel szükségessége a sűrűségfüggvényre adott függetlenségi feltétel deriválásából következik,

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_X(x)F_Y(y)}{\partial x \partial y} = f_X(x)f_Y(y)$$

majdnem minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. A feltétel elégséges is, mert

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dudv = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_X(u)f_Y(v)\,dudv =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(u)du \int\limits_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv = F_X(x)F_Y(y)$$

minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. ■

A tulajdonság általánosítása a következő

**3.19. Tulajdonság.** *Az $X_1, \cdots, X_n$ folytonos valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha*

$$f_{X_{i_1} \cdots X_{i_k}}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} f_{X_{i_j}}(x_{i_j}),$$

*minden $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$, $k = \overline{2, n}$, esetén.*

**3.20. Tulajdonság.** *Az $X_1, \cdots, X_n$ valószínűségi változók pontosan akkor teljesen függetlenek, ha*

$$F_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$$

*minden $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén.*

**Bizonyítás.** A szükségesség az értelmezésből következik ha $k = n$-t választunk.

Az elégségesség bizonyításához, legyen $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, $k = \overline{2, n}$. Ekkor

$$\begin{aligned} F_{i_1 \cdots i_k}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}) &= P(X_{i_1} < x_{i_1}, \cdots, X_{i_k} < x_{i_k}) = \\ &= P(X_1 < u_1, \cdots, X_n < u_n) = \\ &= F_{1 \cdots n}(u_1, \cdots, u_n) = \prod_{j=1}^{n} F_j(u_j) = \prod_{j=1}^{k} F_{i_j}(x_{i_j}), \end{aligned}$$

ahol

$$u_j = \begin{cases} x_{i_j}, & ha \quad j = \overline{1,n}, \\ \infty, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezzel a tulajdonságot igazoltuk. ■

**3.21. Tulajdonság.** *Ha $X_1, ..., X_n$ független valószínűségi változó és $g_1, ..., g_n : \mathbf{R} \to \mathbb{R}$ Borel értelemben mérhető függvények, akkor $g_1(X_1), ..., g_n(X_n)$ is független valószínűségi változó.*

**Bizonyítás.** Vezessük be a következő jelölést:

$$B_i = (x \mid g_i(x) < y_i), \quad i = \overline{1,n}.$$

Így állításunk igazolásához azt kell belátnunk, hogy

$$P(X_1 \in B_1, ..., X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1)...P(X_n \in B_n).$$

Ez pedig az $X_1, ..., X_n$ valószínűségi változók függetlensége és a valószínűség tulajdonságaiból következik. ■

## 3.5. Feltételes valószínűségeloszlások

Legyen $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ egy valószínűségi mező és $B \in \mathcal{K}$, amelyre $P(B) > 0$.

**3.15. Értelmezés.** *Az $X$ valószínűségi változónak $B$-re vonatkoztatott* **feltételes eloszlásfüggvényét** *$F_{X|B}$ -vel jelöljük és a következőképpen értelmezzük: $F_{X|B} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$F_{X|B}(x) = P(X < x \mid B)$$

*minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.*

**3.22. Tulajdonság.** *A feltételes valószínűségeloszlások esetén érvényesek a következő tulajdonságok:*

(*i*) $F_{X|B}$ *egy eloszlásfüggvény*

(*ii*) *Ha* $(B_i)_{i\in I}$ *teljes eseményrendszer, akkor*

$$F_X(x) = \sum_{i\in I} F_{X|B_i}(x)P(B_i)$$

*minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén.*

**Bizonyítás.** Az (i) tulajdonság az értelmezés következménye. Az (ii) tulajdonság igazolásához a teljes valószínűség tételét (2.5,(iii)) alkalmazzuk

$$F_X(x) = P(X < x) = \sum_{i\in I} P(X < x|B_i)P(B_i) = \sum_{i\in I} F_{X|B_i}(x)P(B_i),$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. ■

Legyen a $B$ esemény $Y = y$ alakú, ahol $Y$ szintén egy valószínűségi változó. Ekkor a feltételes eloszlásfüggvény

$$F(x|y) = P(X < x|Y = y).$$

**3.23. Tulajdonság.** *Ha* $F$ *az* $X$ *és az* $Y$ *valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvénye, akkor*

$$F(x|y) = \lim_{(a,b)\mapsto(0,0)} \frac{F(x, y + b) - F(x, y - a)}{F(\infty, y + b) - F(\infty, y - a)} \tag{3.3}$$

**Bizonyítás.** Az értelmezés alapján írhatjuk:

$$\frac{F(x, y + b) - F(x, y - a)}{F(\infty, y + b) - F(\infty, y - b)} =$$

$$= \frac{P(X < x, Y < y + b) - P(X < x, Y < y - a)}{P(Y < y + b) - P(Y < y - a)} =$$

$$= \frac{P(X < x, y-a \le Y < y+b)}{P(y-a < Y < y+b)}$$

Határértékre térve kapjuk, hogy $\frac{P(X<x,Y=y)}{P(Y=y)} = F(x|y)$ ■

A sűrűségfüggvényt is értelmezhetjük feltételes esetben.

**3.16. Értelmezés.** *Azt az* $f_{X|B} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt, ha létezik, amelyre*

$$F_{X|B}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|B}(t)dt$$

*az* $X$ *valószínűségi változó* $B$*-re vonatkoztatott* **feltételes sűrűségfüggvényének** *nevezzük és* $f_{X|B}(x)$ *-vel jelöljük.*

Ha $B = (Y = y)$ alakú, akkor az $f(x|y)$ jelölést használjuk.

**3.24. Tulajdonság.** *Legyen* $X$ *és* $Y$ *két folytonos valószínűségi változó* $f_X$ *illetve* $f_Y$ *sűrűségfüggvénnyel és legyen* $f$ *az* $X$ *és* $Y$ *együttes sűrűségfüggvénye. Ekkor*

$$f(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}, \qquad f(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}.$$

**Bizonyítás.** A (3.3) alapján

$$F(x|y) = \lim_{(a,b)\mapsto(0,0)} \frac{F(x,y+b) - F(x,y-a)}{F(\infty,y+b) - F(\infty,y-a)} =$$

$$= \lim_{(a,b)\mapsto(0,0)} \frac{P(y-a < Y < y+b|X < x)P(X < x)}{P(y-a < Y < y+b)} =$$

$$= \lim_{(a,b)\mapsto(0,0)} P(X < x)\frac{\frac{P(y-a<Y<y+b|X<x)}{a+b}}{\frac{P(y-a<Y<y+b)}{a+b}} = P(X < x)\frac{f_{Y|X<x}(y)}{f_Y(y)}.$$

Másrészt

$$f_{Y|X<x}(y) = \frac{\partial}{\partial y}(F_{Y|(X<x)}(y)) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(P(Y < y|X < x)) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P(Y < y, X < x)}{P(X < x)}\right) =$$

$$= \frac{1}{P(X < x)} \frac{\partial F_{(X,Y)}(x, y)}{\partial y}.$$

Így

$$F(x|y) = \frac{1}{f_Y(y)} \frac{\partial F_{(X,Y)}(x, y)}{\partial y},$$

ahonnan

$$f(x|y) = \frac{\partial F(x|y)}{\partial x} = \frac{1}{f_Y(y)} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y},$$

amivel az első összefüggést igazoltuk. A másodikat hasonlóan igazolhatjuk. ■

**3.6. Megjegyzés.** *Az előbbi összefüggésekből azonnal írhatjuk, hogy*

$$f(x, y) = f_X(x)f(y|x) = f_Y(y)f(x|y). \tag{3.4}$$

A következő tulajdonság a Bayes képlet átírása feltételes sűrűségfüggvény esetére.

**3.25. Tulajdonság.** *Legyen $X$ és $Y$ két folytonos valószínűségi változó $f_X$ illetve $f_Y$ sűrűségfüggvénnyel és legyen $f$ az $X$ és $Y$ együttes sűrűségfüggvénye. Ekkor*

$$f(x|y) = \frac{f_X(x)f(y|x)}{\int_{\mathbb{R}} f_X(x)f(y|x)dx},$$

*illetve*

$$f(y|x) = \frac{f_Y(y)f(x|y)}{\int_{\mathbb{R}} f_Y(y)f(x|y)dy}.$$

**Bizonyítás.** A (3.4) összefüggést integrálva kapjuk az

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f(y|x) dx$$

illetve

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_Y(y) f(x|y) dy$$

összefüggéseket, ahonnan a tulajdonság azonnal következik. ■

## 3.6. Többdimenziós valószínűségi változók, valószínűségi vektorok

Bizonyos kísérletek eredményeinek jellemzésére célszerű többdimenziós valószínűségi változók használata. Ezek lehetővé teszik, hogy a valószínűségi változók közt fennálló nem függvényszerű, ún. sztochasztikus kapcsolatokat is vizsgáljunk.

Legyen $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ egy valószínűségi mező.

**3.17. Értelmezés.** *Egy* $X(X_1, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *mérhető függvényt* **n-dimenziós valószínűségi vektornak** *vagy* **n- dimenziós valószínűségi változónak** *nevezünk, vagyis akkor, ha teljesíti a*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid (X_1(\omega), ..., X_n(\omega)) \in B\} \in \mathcal{K},$$

*feltételt minden* $B \in \mathcal{B}^n$ *esetén, ahol* $\mathcal{B}^n$ *az* $\mathbb{R}^n$ *részhalmazainak* $\sigma$-*algebrája.*

Akárcsak a valószínűségi változók esetén, adhatunk ezzel ekvivalens értelmezéseket, például

**3.18. Értelmezés.** *Egy* $X(X_1,...,X_n):\Omega\to\mathbb{R}^n$ *függvényt* **valószínűségi vektornak** *vagy* **n dimenziós valószínűségi változónak** *nevezünk, ha teljesíti a*

$$(X_1<x_1,...,X_n<x_n)=\{\omega\in\Omega\mid X_1(\omega)<x_1,...,X_n(\omega)<x_n\}\in\mathcal{K},$$

*feltételt minden* $(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ *esetén.*

A valószínűségi változóknál alkalmazott bizonyításokhoz hasonló módon igazolható, hogy, ha $g_i,\ \ i=\overline{1,n}$, Borel értelemben mérhető függvények és $(X_1,...,X_n)$ valószínűségi vektor, akkor
$Y=(g_1(X_1),...,g_n(X_n))$ is valószínűségi változó.

**3.19. Értelmezés.** *Az* $(X_1,...,X_n)$ *valószínűségi vektorhoz rendelt* **eloszlásfüggvény** *az az* $F_X:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *függvény, amelyet az*

$$F_X(x_1,...,x_n)=P(X_1<x_1,...,X_n<x_n)$$

*képlet értelmez minden* $(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ *esetén.*

A valószínűségi változóknál kapott tulajdonságok általánosítását foglaljuk össze a következő kijelentésben.

**3.26. Tulajdonság.** *Ha* $F$ *az* $X(X_1,...,X_n)$ *valószínűségi vektor eloszlásfüggvénye, akkor:*

(*i*) *az eloszlásfüggvény értéktartománya* $[0,1]$;

(*ii*) *ha* $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n$ *valós számok, akkor*
$P(a_1\le X_1<b_1,...,a_n\le X_n<b_n)=$
$=F(b_1,...,b_n)-\sum_{i=1}^n F(b_1,...,b_{i-1},a_i,b_{i+1},...,b_n)+$
$+\sum_{i<j}^n F(b_1,...,b_{i-1},a_i,b_{i+1},...,b_{j-1},a_j,b_{j+1},...,b_n)-$
$...+(-1)^{n-1}F(a_1,...,a_n)$;

*(iii)* *F minden argumentumára nézve nem-csökkenő függvény.*

*(iv)* *F minden argumentumára nézve balról folytonos függvény.*

*(v)*

$$\lim_{\substack{x_k\to\infty\\ k=\overline{1,n}}} F(x_1,...,x_n)=F(\infty,...,\infty)=1$$

*és*

$$\lim_{x_k\to-\infty} F(x_1,...,x_n)=F(x_1,...,-\infty,...,x_n)=0, \qquad k=\overline{1,n}$$

**Bizonyítás.** Az (i), (iii), (iv) és (v) tulajdonság a valószínűségi változók esetén végzett bizonyításhoz hasonlóan igazolható. A (ii) igazolását végezzük el a továbbiakban $n=2$-re. A valószínűség tulajdonságainak felhasználásával írhatjuk

$$P(a_1\le X_1<b_1,a_2\le X_2<b_2)=$$

$$=P(a_1\le X_1<b_1,X_2<b_2)-P(a_1\le X_1<b_1,X_2<a_2)=$$

$$=P(X_1<b_1,X_2<b_2)-P(X_1<a_1,X_2<b_2)-P(X_1<b_1,X_2<a_2)+$$

$$+P(X_1<a_1,X_2<a_2)=F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1.a_2)+F(a_1,a_2).$$

Hasonlóan igazoljuk az (ii) relációt $n>2$-re is. ■

Igazolható, hogy a (ii)-(v) tulajdonságok jellemzik az eloszlásfüggvényt, vagyis, ha egy $n$ változós valós függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor az eloszlásfüggvény.

**3.20. Értelmezés.** *Az $X(X_1,...,X_n)$ valószínűségi vektorból képzett*

$$(X_{i_1},...,X_{i_k}), \qquad 1\le i_1<...<i_k\le n$$

*vektor eloszlásfüggvényét az $X$* **peremsűrűségfüggvényének** *nevezzük és $F_{i_1,...,i_k}$-val jelöljük.*

**3.27. Tulajdonság.** *Az $X(X_1, ..., X_n)$ valószínűségi vektor $F$ eloszlásfüggvényéből a peremeloszlásfüggvényt úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk az $F$ határértékét, amikor azok az argumentumok, amelyek nincsenek a peremeloszlsban végtelenbe tartanak, vagyis*

$$F_{i_1,...,i_k}(x_{i_1}, ..., x_{i_k}) = \lim_{\substack{x_j \to \infty \\ j \neq i_1,...,i_k}} F(x_1, ..., x_n).$$

**Bizonyítás.** Az összefüggés az alábbi események közti relációból következik:

$$(X_{i_1} < x_{i_1}, ..., X_{i_k} < x_{i_k}) = (X_1 < c_i, ..., X_n < c_n),$$

ahol $c_j = \begin{cases} +\infty, & ha \quad j \notin \{i_1, ..., i_k\} \\ x_{i_k}, & ha \qquad j = i_k \end{cases}$ ■

**3.7. Megjegyzés.** *Ha ismerjük a valószínűségi vektor eloszlásfüggvényét, akkor a komponens valószínűségi változók eloszlásfüggvényét a következő képlettel számíthatjuk ki*

$$F_i(x_i) = F(+\infty, ..., +\infty, x_i, +\infty, ..., +\infty), \quad x_i \in \mathbb{R}.$$

## 3.6.1. Diszkrét valószínűségi vektorok

**3.21. Értelmezés.** *Az $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ függvényt, amely teljesíti a következő két feltételt*

(*i*) *legfennebb megszámlálható értéket vesz fel;*

(*ii*) $X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) = x_1, ..., X_n(\omega) = x_n\} \in \mathcal{K}$, *minden* $x \in \mathbb{R}^n$ *esetén*

**n-dimenziós diszkrét valószínűségi változónak** *vagy* **valószínűségi vektornak** *nevezzük.*

**3.22. Értelmezés.** *Az $X$ diszkrét valószinűségi vektor eloszlása egy $n$-dimenziós táblázat, amely a vektor értékeit*

$$(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, ..., x_{i_n}^{(n)}), \quad i_k \in I_k, \ k = \overline{1, n}$$

*és azokat a valószínűségeket tartalmazza, amelyekkel ezeket az értékeket a valószínűségi változó felveszi*

$$p_{i_1 \dots i_n} = P(X_1 = x_{i_1}^{(1)}, ..., X_n = x_{i_n}^{(n)}), \qquad i_k \in I_k, \ k = \overline{1, n}.$$

Például egy kétdimenziós vektor eloszlása:

| $X_1 \backslash X_2$ | $X_1^{(1)}$ | ... | $X_i^{(1)}$ | .... | $X_n^{(1)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1^{(2)}$ | $p_{11}$ | ... | $p_{i1}$ | ... | $p_{n1}$ |
| $\vdots$ | ... | ... | ... | ... | ... |
| $X_j^{(2)}$ | $p_{1j}$ | ... | $p_{ij}$ | ... | $p_{nj}$ |
| $\vdots$ | ... | ... | ... | ... | ... |
| $X_m^{(2)}$ | $p_{1m}$ | ... | $p_{im}$ | ... | $p_{nm}$ |

Tekintsünk egy pár példát diszkrét valószínűségi vektorra.

**1) Polinomiális eloszlás**

Az $X(X_1, X_2, ..., X_r)$ valószínűségi vektor polinomiális eloszlású, ha értékei $(k_1, ..., k_r) \in \{0, ..., n\}^r$ alakúak, $k_1 + ... + k_r \leq n$ és a hozzá tartozó valószinűséget a Bernoulli visszatevéses modellből kapjuk, ha $r + 1$ állapotot tekintünk:

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, ..., X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! ... k_{r+1}!} p_1^{k_1} ... p_{r+1}^{k_{r+1}},$$

ahol $n \in \mathbf{N}$, $p_i \in ]0, 1[$, $i = \overline{1, r+1}$, $p_1 + ... + p_{r+1} = 1$, $k_1 + ... + k_{r+1} = n$.

**2) Többdimenzós hipergeometrikus eloszlás**

Az $X(X_1, X_2, ..., X_r)$ valószínűségi vektor hipergeometrikus eloszlású, ha értékei $(k_1, ..., k_r) \in \{0, ..., n\}^r$, $k_1 + ... + k_r \leq n$ és ezeket

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, ..., X_r = k_r) = \frac{C_{a_1}^{k_1} ... C_{a_r}^{k_r}}{C_{a_{r+1}}^{k_{r+1}}}$$

valószínűséggel veszi fel, ahol $a_i \in \mathbb{N}$, $k_i \leq n$, $i = \overline{1, r+1}$ és $k_1 + ... + k_{r+1} = n$.

Ha az $a_1 + ... + a_{r+1}$ összeg tart végtelenbe, akkor a visszatevés nélküli eloszlás a visszatevéses eloszláshoz tart, ahol a visszatevéses eloszlás paramétere $p_i = \frac{a_i}{a_1 + .... + a_{r+1}}$, $i = \overline{1, r+1}$ .

### 3.6.2. Folytonos valószínűségi vektorok

**3.23. Értelmezés.** *Egy $X(X_1, X_2, ..., X_n)$ valószínűségi vektort* **folytonosnak** *nevezünk, ha eloszlásfüggvénye előállítható*

$$F(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, ..., t_n) dt_1 ... dt_n$$

*alakban minden $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt, ha létezik, a* **valószínűségi vektor sűrűségfüggvényének** *nevezzük.*

A valószínűségi változóknál leírt módon igazolhatóak a következő tulajdonságok:

**3.28. Tulajdonság.** *Ha $X(X_1, X_2, ..., X_n)$ egy folytonos valószínűségi vektor, $F$ az eloszlásfüggvénye és $f$ a sűrűségfüggvénye, akkor*

*(i)* $f(x_1, ...x_n) \geq 0$, *minden* $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *esetén;*

*(ii)* $f(x_1, ...x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1 ... \partial x_n}$, *az* $\mathbb{R}^n$ *majdnem minden pontjában;*

(iii) $P(X \in B) = \int ... \int_B f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n, \;\; ha, \; B \in \mathcal{B}^n;$

(iv) $\int ... \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n = 1.$

**3.24. Értelmezés.** *Az $X(X_1, X_2, ..., X_n)$ folytonos valószínűségi vektort* **peremsűrűségfüggvényének** *az $(X_{i_1}, ..., X_{i_k})$ vektor sűrűségfüggvényét nevezzük, ahol $1 \le i_1 < ... < i_k \le n$..*

A (3.28) tulajdonságok és a sűrűségfüggvény értelmezése alapján igazolható a következő kijelentés:

**3.29. Tulajdonság.** *Ha $f$ az $X(X_1, X_2, ..., X_n)$ folytonos valószínűségi vektor sűrűségfüggvénye, akkor az $(X_{i_1}, ..., X_{i_k})$ vektor $f_{i_1...i_k}$ sűrűségfüggvényét, ahol $1 \le i_1 < ... < i_k \le n$, a*

$$f_{i_1...i_k}(x_{i_1}, ..., x_{i_k}) = \int ... \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f(x_1, ..., x_n)dx_{j_1}...dx_{j_{n-k}},$$

*képlet adja, ahol $j_1, ...j_{n-k} \in \{1, ..., n\} \setminus \{i_1, ..., i_k\}$.*

Ebből az összefüggésből $k = 1$ és $i_1 = i$ választással kiszámíthatjuk egy vektor bármely komponensének sűrűségfüggvényét.

Példák folytonos valószínűségeloszlásokra:

**1) Többdimenzós egyenletes eloszlás**

Az $X(X_1, X_2, ..., X_n)$ valószínűségi vektor $n$-dimenziós egyenletes eloszlású a $D = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | a_i \le x_i \le b_i, \; i = \overline{1, n}\}$ tartományon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b_1 - a_1)...(b_n - a_n)}, & ha \quad x \in D \\ 0, & ha \quad x \notin D \end{cases}$$

**2) Kétdimenziós normális eloszlás**

Az $X(X_1, X_2)$ vektor normális eloszlású $m_1, m_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ és $r \in ]-1, 1[$ paraméterekkel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

Jelölése: $N(m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, r)$.

**1. Alkalmazás.** *Adott az $N(m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, r)$ normális eloszlású $X(X_1, X_2)$ vektor. Igazoljuk, hogy peremeloszlásai normális eloszlású valószínűségi változók!*

*Tudjuk, hogy*

$$f_{X_1}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} dy$$

*Végezzük el a következő változócserét*

$$\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2} - r\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right) = u.$$

*Ekkor az integrál így alakul*

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

*Mivel*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} dt = 1, \quad \text{ezért} \quad f_{X_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}},$$

*vagyis a peremeloszlás $N(m_1, \sigma_1)$ eloszlású.*

*Hasonlóan igazolható, hogy $X_2$ is normális eloszlású $m_2, \sigma_2$ paraméterrel.*

**2. Alkalmazás.** *Adott az $N(m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, r)$ normális eloszlású $X(X_1, X_2)$ vektor és az*

$$(E) \qquad \frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} = \lambda^2$$

*ellipszis.*

*Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a vektor értékei benne legyenek az ellipszis belsejében.*

*Ki kell számolnunk a*

$$P(\lambda) = P((X_1, X_2) \in Int(E)) = \int\int_{Int(E)} f(x,y)dxdy$$

*valószínűséget. Az integrál kiszámításához vezessük be a következő változócserét*

$$\begin{cases} x - m_1 = u\sin v \\ y - m_2 = u\cos v \end{cases}$$

*Ekkor*

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -u.$$

*Továbbá*

$$u^2\left(\frac{\sin^2 v}{\sigma_1^2} - 2r\frac{\sin v\cos v}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\cos^2 v}{\sigma_2^2}\right) = \lambda^2.$$

*Ha jelöljük*

$$\left(\frac{\sin^2 v}{\sigma_1^2} - 2r\frac{\sin v \cos v}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\cos^2 v}{\sigma_2^2}\right) = S^2,$$

*akkor* $u^2S^2 = \lambda^2$ *és*

$$P(\lambda) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\lambda}{S}} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}u^2S^2} ududv.$$

*Figyelembe véve, hogy*

$$\left(e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}u^2S^2}\right)' = e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}u^2S^2}\left(-\frac{uS^2}{1-r^2}\right)$$

*kapjuk a*

$$P(\lambda) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_0^{2\pi}\left(1 - e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\lambda^2}\right)\frac{1}{S^2}dv =$$

$$= \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\lambda^2}\right)\int_0^{2\pi}\frac{1}{S^2}dv$$

*összefüggést.*

*Tudjuk, hogy* $P(\infty) = 1$, *tehát*

$$1 = P(\infty) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_0^{2\pi}\frac{dv}{S^2}.$$

*Ezért*

$$P(\lambda) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\lambda^2}\right)\frac{2\pi\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{1-r^2}} = 1 - e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\lambda^2} \in [0,1].$$

## 3.7. Folytonos valószínűségi változók transzformáltjainak eloszlás- és sűrűségfüggvénye

Legyen $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ egy valószinüségi mező, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ egy valószínűségi változó, $F_X$ az eloszlásfüggvénye , sűrűségfüggvénye pedig $f_X$. Tekintsük a $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, függvényt és képezzük az $X$ transzformáltját a $h$ függvényben. Legyen az $Y = h(X)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F_Y$, sűrűségfüggvénye pedig $f_Y$.

**3.8. Tétel.** *Ha $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton és deriválható függvény, értékkészlete a valós számok halmaza és $h^{-1}$ az inverze, akkor $T$ eloszlásfüggvénye*

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(h^{-1}(y)) & ha \quad (h^{-1}(y))' > 0 \\ 1 - F_X(h^{-1}(y)) & ha \quad (h^{-1}(y))' < 0 \end{cases},$$

*sűrűségfüggvénye pedig*

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1}(y))'|$$

**Bizonyítás.** Tekintsük először azt az esetet, amikor $h$ szigorúan növekvő. Ekkor $h^{-1}$ is növekvő és $(h^{-1}(y))' \geq 0$. Ekkor az eloszlásfüggvényre írhatjuk

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(h(x) < y) = P(X < h^{-1}(y)) = F_X(h^{-1}(y)).$$

Legyen most $h$ szigorúan csökkenő. Ekkor $h^{-1}$ is csökkenő és $(h^{-1}(y))' \leq 0$. Az eloszlásfüggvényre írhatjuk

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(h(X) < y) = P(X > h^{-1}(y)) =$$

$$= P(\overline{X \leq h^{-1}(y)}) = 1 - P(X \leq h^{-1}(y)) = 1 - F_X(h^{-1}(y)).$$

A sűrűségfüggvényt az eloszlásfüggvény deriválásával adhatjuk meg

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(y)) \cdot (h^{-1}(y))', & \text{ha} \quad (h^{-1}(y))' > 0, \\ -f_X(f^{-1}(h'(y))) \cdot (h^{-1}(y))', & \text{ha} \quad (h^{-1}(y))' < 0, \end{cases}$$

amit még

$$f_X(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1}(y))'|$$

alakban is írhatunk. ■

**3.8. Megjegyzés.** *A tulajdonság akkor is megőrződik ha $h : \mathbb{R} \to [a, b]$ monoton és differenciálható függvény. Ekkor*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1}(y))'|, & \textit{ha} \quad y \in [a, b], \\ 0, & \textit{ha} \quad y \notin [a, b] \end{cases}$$

Ha a $h$ függvény nem szigorúan monoton, akkor az eddigieknél bonyolultabb képleteket kapunk. Legyen például $h$ legfennebb véges pont kivételével deriválható függvény, amely két szigorúan monoton szakaszra bontható.

**3.9. Tétel.** *Ha a $h : \mathbb{R} \to [b, +\infty[$ függvény a $]-\infty, a]$ intervallumon csökkenő és az $]a, +\infty[$ intervallumon növekvő, és véges sok pont kivételével deriválható, továbbá a $+\infty$ és $-\infty$ pontokban tart a $+\infty$-hez, akkor az $Y = h(X)$ sűrűségfüggvénye*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h_2(y)) \cdot h_2'(y) - f_X(h_1(y)) \cdot h_1'(y) & \textit{ha} \quad y > h(a) \\ 0 & \textit{ha} \quad y < h(a) \end{cases},$$

*ahol $h_1$ a $h$ inverz függvénye a $]-\infty, a[$ intervallumon, $h_2$ pedig a $h$ inverz függvénye a $]a, +\infty[$ intervallumon.*

**Bizonyítás.** Figyelembe véve, hogy a $h$ minimális értéke $b = h(a)$, írhatjuk

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(h(x) < y) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y \le h(a), \\ P(h_1(y)) < X < P(h_2(y)), & \text{ha} \quad y > h(a) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y \le h(a), \\ F_Y(h_2(y)) - F_Y(h_1(y)), & \text{ha} \quad y > h(a). \end{cases} \end{aligned}$$

A sűrűségfüggvényt az előbbi reláció deriválásával kapjuk. ∎

**3.5. Példa.** *A $h(x) = x^2$ esetén az $Y = X^2$ sűrűségfüggvénye*

$$f_Y(x) = \begin{cases} f_X(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} + f_X(-\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}, & ha \quad x > 0, \\ 0, & ha \quad x \le 0. \end{cases}$$

**3.6. Példa.** *A $h(x) = |x|$ esetén az $Y = |X|$ sűrűségfüggvénye*

$$f_Y(x) = \begin{cases} f_X(x) + f_X(-x), & ha \quad x > 0, \\ 0 & ha, \quad x \le 0. \end{cases}$$

**3.10. Tétel.** *Legyen $X$ a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, és $G$ egy eloszlásfüggvény, amely folytonos és szigorúan monoton. Ekkor az $Y = G^{-1}(X)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $G$ lesz.*

**Bizonyítás.** Az $X$ eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 0 \\ x, & \text{ha} \quad 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{ha} \quad x > 1 \end{cases}.$$

Így az $Y$ eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(G^{-1}(x) < y) = P(X < G(y)) = F_X(G(y)) = \\ &= G(y). \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk, hogy G eloszlásfüggvény és így értékei [0,1]-ben vannak. ■

## 3.8. Valószínűségi vektorok transzformáltjainak eloszlás- és sűrűségfügvénye

Legyen $X(X_1, X_2)$ egy valószínűségi vektor és $h_1,\ h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ két adott függvény. Értelmezzük az

$$Y_1 = h_1(X_1, X_2) \text{ és } Y_2 = h_2(X_1, X_2)$$

valószínűségi változókat. Az így definiált $(Y_1, Y_2)$ transzformált valószínűségi vektor eloszlás és sűrűségfüggvényét vizsgáljuk a továbbiakban.

**3.11. Tétel.** *Legyen az $X(X_1, X_2)$ folytonos valószínűségi vektor sűrűségfüggvénye $f$ és a $h_1,\ h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények legyenek folytonosan deriválhatóak. Tételezzük fel, hogy a transzformáció egyértelműen megfordítható, vagyis létezik $g_1, g_2$, úgy, hogy*

$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, y_2) \\ x_2 = g_2(y_1, y_2) \end{cases}$$

*és a Jacobi-féle determináns*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(y_1,y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1(y_1,y_2)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2(y_1,y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2(y_1,y_2)}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

*Ilyen feltételek mellett az $Y(Y_1, Y_2)$ sűrűségfüggvénye*

$$f_Y(y_1, y_2) = f(g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2)) \cdot |J|.$$

**Bizonyítás.** Legyen $T$ a sík egy tetszőleges tartománya. A $h_1, h_2$ transzformáció a $T$-t $T^*$-ba viszi át. Ekkor

$$P((Y_1, Y_2) \in T^*) = P((X_1, X_2) \in T)$$

vagy integrállal felírva

$$\iint_{T^*} f_Y(y_1, y_2) dy_1\, dy_2 = \iint_{T} f(x_1, x_2) dx_1\, dx_2$$

A jobboldali integrálban végezzük el az

$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, y_2) \\ x_2 = g_2(y_1, y_2) \end{cases}$$

változócserét:

$$\iint_{T} f(x_1, x_2) dx_1\, dx_2 = \iint_{T^*} f(g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2)) \cdot |\mathcal{J}| dy_1\, dy_2$$

Innen következik a kért összefüggés. ■

# 3.9. Műveletek folytonos valószínűségi változókkal

## 3.9.1. Két valószínűségi változó összege

**3.30. Tulajdonság.** *Legyen $X_1, X_2$ két valószínűségi változó és $f$ az $(X_1, X_2)$ vektor sűrűségfüggvénye. A $Z = X_1 + X_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye*

$$f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u, x-u) du, \quad x \in \mathbf{R}.$$

*Ha $X_1, X_2$ független, akkor:*

$$f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(u) \cdot f_{X_2}(x-u)du, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

**Bizonyítás.** A bizonyítást két módszerrel végezzük:

**I. módszer**

A (3.11) tételben válasszuk a következő transzformációkat:

$$\begin{cases} h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = y_1 \\ h_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2 = y_2 \end{cases}.$$

Ekkor

$$\begin{cases} x_1 = \frac{y_1+y_2}{2} \\ x_2 = \frac{y_1-y_2}{2} \end{cases}$$

és

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Innen, a tétel jelöléseivel,

$$f_Y(y_1, y_2) = f\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}.$$

$f_Z(y)$ peremsűrűségfüggvénye az Y vektornak az első komponensre nézve, ezért

$$f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} f_Y(x, y_2)dy_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{x+y_2}{2}, \frac{x-y_2}{2}\right) dy_2,$$

amit az

$$\frac{x+y_2}{2} = u$$

helyettesítéssel

$$f_Z(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \cdot f(u, x-u) \cdot 2\, du = \int\limits_{\mathbb{R}} f(u, x-u)\, du$$

alakra hozhatunk.

**II. módszer**

Először a Z valószínűségi változó eloszlásfüggvényét határozzuk meg.

$$F_Z(y) = P(Z < y) = P(X_1 + X_2 < y) = \int\limits_{X_1+X_2<y}\int f(x_1, x_2) dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1.$$

A sűrűségfüggvényt ennek y szerinti deriválásával kapjuk, hogy

$$f_Z(y) = F_Z'(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y - x_1) dx_1,$$

majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. ■

**3. Alkalmazás.** *Tekintsük az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású független $X, Y$ valószínűségi változót, vagyis*

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & ha \quad x \in [a, b], \\ 0, & ha \quad x \notin [a, b]. \end{cases}$$

*Számítsuk ki a $Z = X + Y$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.*

*A* $f_X(y)f_Y(x-y)$ *akkor és csak akkor különbözik 0-tól, ha* $a \le y \le b$ *és* $a \le x-y \le b$. *Ezért,*

$$\begin{aligned}
&ha \quad x \notin [2a, 2b], \ akkor \ f_Z(x) = 0, \\
&ha \quad x \in [2a, a+b], \ akkor \ f_Z(x) = \int_a^{x-a} \frac{dy}{(b-a)^2} = \frac{x-2a}{(b-a)^2}, \\
&ha \quad x \in [a+b, 2b], \ akkor \ f_Z(x) = \int_{x-b}^{b} \frac{dy}{(b-a)^2} = \frac{2b-x}{(b-a)^2}.
\end{aligned}$$

*A megfelelő eloszlásfüggvény*

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \le 2a, \\ \frac{1}{2}(\frac{x-2a}{b-a})^2, & ha \quad x \in ]2a, a+b], \\ 1 - \frac{1}{2}(\frac{2b-x}{b-a})^2, & ha \quad x \in ]a+b, 2b], \\ 1, & ha \quad x > 2b. \end{cases}$$

*Egy ilyen valószínűségi változót* **Simpson eloszlású** *valószínűségi változónak nevezünk.*

**4. Alkalmazás.** *Igazoljuk, hogy n darab független,* $\lambda > 0$ *paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összege gamma eloszlású valószínűségi változó.*

*Legyen* $X_1, ..., X_n$ *az n darab exponenciális eloszlású valószínűségi változó, tehát sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & ha \quad x > 0 \\ 0, & ha \quad x \le 0. \end{cases} .$$

*Vezessük be a következő jelölést:* $Y_1 = X_1$, $Y_k = Y_{k-1} + X_k$, $\quad h \ge 2$. *Ekkor* $Y_n = X_1 + ... + X_n$.

*Az összegre vonatkozó képlet alapján, ha* $x > 0$, *akkor*

$$f_2(x) = \int_{\mathbf{R}} f(u)f(x-u)du = \lambda^2 \int_0^x e^{-\lambda x} du = \lambda^2 x e^{-\lambda x} .$$

*Hasonlóan*

$$f_3(x) = \int_{\mathbf{R}} f_2(u)f(x-u)du = \lambda^3 \int_0^x ue^{-\lambda x}du = \frac{\lambda^3}{2}x^2e^{-\lambda x}, \ \ ha\ x > 0.$$

*Indukcióval igazolhatjuk, hogy*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}, & ha \quad x > 0, \\ \qquad 0, & ha \quad x \leq 0, \end{cases}$$

*vagyis* $Y_n$ *valószínűségi változó* $\Gamma$ *eloszlású* $n$ *és* $\frac{1}{\lambda}$ *paraméterrel. Itt* $f_n$ *az* $Y_n$ *sűrűségfüggvényét jelöli.*

## 3.9.2. Két valószínűségi változó szorzata

**3.31. Tulajdonság.** *Legyen az* $X(X_1, X_2)$ *valószínüségi vektor sűrűségfüggvénye* $f$ *és tekintsük a* $Z = X_1 \cdot X_2$ *valószínűségi változót. Ekkor* $Z$ *sűrűségfüggvénye*

$$f_Z(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(u, \frac{x}{u}\right) \cdot \frac{1}{|u|}du, \quad x \in \mathbf{R}.$$

*Ha az* $X_1$ *és* $X_2$ *független, akkor*

$$f_Z(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{X_1}(u) \cdot f_{X_2}\left(\frac{x}{u}\right) \cdot \frac{1}{|u|}du, \quad x \in \mathbf{R}.$$

**Bizonyítás.** A bizonyítást itt is két módszerrel végezzük:

**I. módszer**
A (3.11) tételben válasszuk a következő transzformációkat:

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 \cdot X_2 \\ \quad Y_2 = X_2 \end{cases}$$

ahonnan
$$\begin{cases} X_2 = Y_2 \\ X_1 = \frac{Y_1}{Y_2} \end{cases} \quad \text{és} \quad J = \begin{vmatrix} \frac{1}{y_2} & -\frac{y_1}{y_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|y_2}.$$
A tétel értelmében, ha $Y = (Y_1, Y_2)$, akkor
$$f_Y(y_1, y_2) = f\left(\frac{y_1}{y_2}, y_2\right) \cdot \frac{1}{|y_2|}.$$
A szorzat sűrűségfüggvénye az $Y$ vektor peremsűrűségfüggvénye az első komponensre nézve, tehát
$$f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} f_Y(x, u)du = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{u}, u\right) \cdot \frac{1}{|u|}du.$$
A $\frac{x}{u} = v$ helyettesítéssel
$$f_Z(x) = \int_0^{-\infty} f\left(v, \frac{x}{v}\right) \cdot \frac{|v|}{|x|} \cdot \frac{x}{v^2}dv + \int_{\infty}^{0} f\left(v, \frac{x}{v}\right) \cdot \frac{|v|}{|x|} \cdot \frac{x}{v^2}dv =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f\left(v, \frac{x}{v}\right) dv$$

**II. módszer**

Itt az eloszlásfüggvényt számítjuk ki először:
$$F_Z(x) = P(X_1 \cdot X_2 < x) = \int\int_{X_1 \cdot X_2 < x} f(x_1, x_2)dx_1\, dx_2.$$
Ha $x > 0$, akkor
$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{0}\int_{\frac{x}{x_1}}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2\, dx_1 + \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{x}{x_1}} f(x_1, x_2)dx_2\, dx_1.$$

Innen $x$ szerinti deriválással kapjuk az

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{0} -f\left(x_1, \frac{x}{x_1}\right) \cdot \frac{1}{x_1} dx_1 + \int_{0}^{\infty} f\left(x_1, \frac{x}{x_1}\right) \cdot \frac{1}{x_1} dx_1 =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f\left(x_1, \frac{x}{x_1}\right) \cdot \frac{1}{|x_1|} dx_1$$

összefüggést. Ha $x < 0$ hasonlóan járunk el. ■

### 3.9.3. Két valószínűségi változó hányadosa

**3.32. Tulajdonság.** *Legyen az $X(X_1, X_2)$ valószínűségi vektor sűrűségfüggvénye $f$ és tekintsük a $Z = \frac{X_1}{X_2}$, valószínűségi változót. Ekkor $Z$ sűrűségfüggvénye*

$$f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} f(xu, u) \cdot |u| du, \quad x \in \mathbf{R}.$$

*Ha az $X_1$ és $X_2$ független valószínűségi változó, akkor*

$$f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(xu) \cdot f_{X_2}(u) \cdot |u| du, \quad x \in \mathbf{R}.$$

**Bizonyítás.** A bizonyítást két módszerrel végezzük:

**I módszer**

A (3.11) tételben válasszuk a következő transzformációkat:

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{X_1}{X_2} \\ Y_2 = X_2 \end{cases}.$$

Innen

$$\begin{cases} X_1 = Y_1 \cdot Y_2 \\ X_2 = Y_2 \end{cases} \quad \text{és} \quad J = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y_2.$$

Ha $Y = (Y_1, Y_2)$, akkor

$$f_Y(y_1, y_2) = f(y_1 \cdot y_2, y_2) \cdot |y_2|.$$

A hányados sűrűségfüggvénye ennek peremeloszlása, tehát

$$f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x \cdot u, u) \cdot |u| du.$$

**II. módszer**
Először a hányados eloszlásfüggvényét határozzuk meg

$$F_Z(x) = \iint_{\frac{X_1}{X_2} < x} f(x_1, x_2) dx_1\, dx_2.$$

Az integrálási tartományt két részre osztjuk. Ha $x > 0$, akkor:

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{0} \int_{xx_2}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1\, dx_2 + \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{xx_2} f(x_1, x_2) dx_1\, dx_2.$$

Innen $x$ szerinti deriválással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \int_0^{\infty} x_2 f(xx_2, x_2) dx_2 - \int_{-\infty}^{0} x_2 f(xx_2, x_2) dx_2 = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x \cdot x_2, x_2) \cdot |x_2| dx_2. \end{aligned}$$

Hasonlóan járunk el $x < 0$ esetén is. ■

**5. Alkalmazás.** *Számítsuk ki az $N(0,0,\sigma_1,\sigma_2,r)$ normális eloszlású $(X,Y)$ vektor két komponense hányadosának sűrűségfüggvényét!*

*Legyen $Z=\frac{X}{Y}$ és $f$ a vektor sűrűségfüggvénye, azaz*

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

*A $Z$ sűrűségfüggvényét a hányadosképlet alapján írhatjuk fel:*

$$f_Z(x)=\int_{\mathbf{R}}f(xu,u)|u|du=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int_{\mathbf{R}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{x}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)u^2}|u|du=$$

$$=\frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{x}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)u^2}udu$$

*Innen*

$$F_Z(x)=\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}{\sigma_2^2x^2-2r\sigma_1\sigma_2x+\sigma_1^2},\qquad x\in\mathbf{R}.$$

*Ha $r=0$, akkor*

$$f_Z(x)=\frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{\pi\left[x^2+(\frac{\sigma_1}{\sigma_2})^2\right]},\qquad x\in\mathbf{R},$$

*vagyis a $Z$ hányados Cauchy eloszlású valószínűségi változó.*

**6. Alkalmazás.** *Legyen $X_1,...,X_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg a $Z=X_1^2+...+X_n^2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!*

*Az* $X_1, ..., X_n$ *függetlensége miatt az* $(X_1, ..., X_n)$ *vektor sűrűségfüggvénye*

$$f(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+...+x_n^2)}.$$

*Először az* $Y = \frac{Z}{\sqrt{n}}$ *sűrűségfüggvényét határozzuk meg az eloszlásfüggvény értelmezése alapján. Ha* $x \leq 0$ *akkor*

$$F_Z(x) = P(Y < x) = 0.$$

$x > 0$ *esetén*

$$F_Y(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int ... \int_{(x_1^2+...+x_n^2)<nx^2} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+...+x_n^2)} dx_1...dx_n.$$

*Térjünk át általánosított gömbi koordinátákra*

$$\begin{aligned} x_1 &= r cos\theta_1 ... cos\theta_{n-2} cos\theta_{n-1}, \\ x_2 &= r cos\theta_1 ... cos\theta_{n-2} sin\theta_{n-1}, \\ &... \\ x_{n-1} &= r cos\theta_1 sin\theta_2, \\ x_n &= r sin\theta_1, \end{aligned} \tag{3.5}$$

*így*

$$F_Z(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ... \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{x\sqrt{n}} r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2}} D(\theta_1, ..., \theta_n) dr d\theta_1 ... d\theta_n =$$

$$= c_n \int_0^{x\sqrt{n}} r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2}} dr.$$

*A* $c_n$ *meghatározásához figyelembe vesszük, hogy*

$$F_Y(\infty) = 1 = c_n \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2}} dr = c_n 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\frac{n}{2}).$$

*Innen*

$$c_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

*Az $Y$ sűrűségfüggvényét $x$ szerinti deriválással határozhatjuk meg*

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2n}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} e^{-\frac{nx^2}{2}}, & ha \quad x > 0 \\ 0, & ha \quad x \leq 0. \end{cases}$$

*A $Z$ eloszlásfüggvényének meghatározásához, $x > 0$ esetén, írhatjuk:*

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z < x) = P(nY^2 < x) = P(\sqrt{n}|Y| < \sqrt{x}) = \\ &= F_Y(\sqrt{\frac{x}{n}}) - F_Y(-\sqrt{\frac{x}{n}}) = F_Y(\sqrt{\frac{x}{n}}). \end{aligned}$$

*Innen a sűrűségfüggvény*

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & ha \quad x > 0 \\ 0, & ha \quad x \leq 0. \end{cases}$$

*Tehát a $Z$ valószínűségi változó $\chi^2$- eloszlású (n,1) paraméterrel.* $n = 3$ *esetén ezt az eloszlást Maxwell eloszlásnak nevezik.*

# 4. Fejezet

# Valószínűségi változók numerikus jellemzői

A valószínűségi változóról az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény sokat elárul, de tovább mélyíti ismereteinket, ha olyan számadatokat keresünk, amelyek jól értelmezhetőek és szemléletes tartalmuk van.

## 4.1. Várható érték

Legyenek $x_1, ..., x_n$ az $X$ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei és $p_1, ..., p_n$ a megfelelő valószínűségek. Ha az $X$ érékeire nagy számú megfigyelést végzünk, akkor a relatív gyakoriság és a valószínűség kapcsolata alapján a megfigyelések körülbelül $p_k$-ad részében észleljük az $x_k$ értéket. Ha $N$ megfigyelést végeztünk, akkor a megfigyelt értékek átlaga

$$\frac{Np_1 \cdot x_1 + ... + Np_n \cdot x_n}{N} = x_1 \cdot p_1 + ... + x_n \cdot p_n.$$

Most legyen $X$ egy tetszőleges valószínűségi változó. Végezzünk $X$ értékeire nagy számú megfigyelést és osztályozzuk $X$ megfigyelt értékeit aszerint, hogy mely $]k\epsilon, (k+1)\epsilon[$ intervallumba esnek, ahol $\epsilon > 0$ és $k \in \mathbf{Z}$. Legyen $X_\epsilon = k\epsilon$, ha $k\epsilon \leq X < (k+1)\epsilon$. Az így értelmezett $X_\epsilon$ diszkrét valószínűségi változó, melynek értékei $k\epsilon$ alakú számok, és

$$P(X_\epsilon = k\epsilon) = P(k\epsilon \leq X < (k+1)\epsilon).$$

$X$ megfigyelt értékeinek átlaga az $X_\epsilon$ értékeinek átlaga körül ingadozik, annál nagyobb pontossággal, minél kisebb az $\epsilon$.

Az elmondottak alapján értelmezhetjük egy $X$ valószínűségi változó várható értékét.

Legyen $(\Omega, K, P)$ egy valószínűségi mező és $X : \Omega \to \mathbb{R}$ egy valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye $F$.

**4.1. Értelmezés.** *Az $X$* **várható értéke** *az az $x$-nek az $F$ szerinti Lebesque-Stieltjes integralja $\mathbb{R}$-en:*

$$E(X) = \int\limits_{\mathbb{R}} x dF(x)$$

*szám, ha az*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |x| dF(x)$$

*integrál abszolút konvergens.*

*Ha $X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$ diszkrét eloszlású valószínűségi változó és a $\sum_{i \in I} x_i p_i$ sor abszolút konvergens, akkor várható értéke az*

$$E(x) = \sum_{i \in I} x_i p_i$$

*képlettel számítható ki.*

*Ha $X$ folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f$, akkor várható értéke*

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx,$$

*ha az integrál abszolút konvergens.*

**4.1. Megjegyzés.** *A várható érték kifejezhető az $X$ valószínűségi változó $\Omega$-án vett valószínűség szerinti Lebesque-Stieltjes integraljaként is:*

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega).$$

**4.2. Megjegyzés.** *Az abszolút konvergenciát azért kell feltenni, mert ha ez nem teljesül, akkor, például diszkrét esetben, a sor összege átrendezéssel megváltoztatható. Így a várható érték nem volna egyértelműen definiálható, hiszen attól függne, hogy a valószínűségi változó értékeit milyen sorrendben számoztuk meg.*

*Ha az integrál nem abszolút konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a várható érték nem létezik.*

**4.3. Megjegyzés.** *Ha $X$ egyszerű valószínűségi változó, akkor létezik várható értéke.*

**4.1. Példa.** *Ha $X$ binomiális eloszlású valószínűségi változó,*

$$X \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}}, \qquad n \in \mathbf{N},\ p \in ]0,1[,$$

*akkor*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \\ &= n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} = np, \end{aligned}$$

*mert* $\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} = (p+q)^{n-1} = 1.$

**4.2. Példa.** *Ha X Poisson eloszlású valószínűségi változó*

$$X \begin{pmatrix} k \\ \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \end{pmatrix}_{k=0,1,\ldots},$$

*ahol* $\lambda > 0$, *akkor*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

**4.3. Példa.** *Tegyük fel, hogy egy célpontot akarunk eltalálni és minden egyes lövésnél a találat valószínűsége* $\frac{1}{2}$. *Számítsuk ki, hogy átlagosan hány lövést kell leadni.*

*Ha X jelenti azt, hogy hányadik lövésnél találjuk el a célpontot, akkor X lehetséges értékei a természetes számok és* $P(X = k) = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots.$ *Így*

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{2^k} = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} =$$

$$= 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k+1}}\right) =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2} + (\frac{2}{2^2} - \frac{1}{2^2}) + (\frac{3}{2^3} - \frac{2}{2^3}) + \ldots\right] = 2.$$

**4.4. Példa.** *Ha $X$ az $[a,b]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó,*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & ha \quad a < x < b \\ 0, & különben. \end{cases}$$

*akkor*

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}.$$

**4.5. Példa.** *Ha az $X$ valószínűségi változó $N(m,\sigma)$ normális eloszlású,*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad m \in \mathbb{R},\ \sigma > 0,$$

*akkor*

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} (\sigma y + m)e^{-\frac{y^2}{2}}\sigma dy$$

*Az $\frac{x-m}{\sigma} = y$ helyettesítéssel az integrál így alakul*

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy + \frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = m$$

*mert*

$$\int_{\mathbb{R}} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy = 0 \quad \text{és} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = 1.$$

*Tehát a normális eloszlás értelmezésében szereplő $m$ paraméter a valószínűségi változó várható értéke.*

### 4.1.1. A várható érték tulajdonságai

A következő tulajdonságok a várható érték jellemzőit adják. A bizonyításokat külön végezzük a diszkrét és külön a folytonos esetben.

**4.1. Tulajdonság.** *Legyen $X$ egy valószínűségi változó, melynek létezik várható értéke. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor*

$$E(aX+b) = aE(X) + b.$$

**Bizonyítás.**

a) Ha $X$ diszkrét valószínűségi változó, $X\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, akkor

$$aX+b\begin{pmatrix} ax_i+b \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}.$$

Ezért

$$E(aX+b) = \sum_{i\in I}(ax_i+b)p_i = a\sum_{i\in I}x_ip_i + b\sum_{i\in I}p_i = aE(X)+b.$$

b) Ha $X$ folytonos valószínűségi változó, melynek $f$ a sűrűségfüggvénye, és $Y = aX+b$, akkor

$$f_Y(x) = f\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}$$

és

$$E(aX+b) = \int_{\mathbb{R}} xf\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}dx.$$

A $\frac{x-b}{a} = y$ helyettesítéssel

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}}(ay+b)f(y)dy = a\int_{\mathbb{R}} yf(y)dy + b\int_{\mathbb{R}} f(y)dy = aE(X)+b,$$

amit igazolni kellett. ■

**4.1. Következmény.** *Ha $X$ valószínűségi változó 1 valószínűséggel egy $c$ állandóval egyenlő, akkor $E(X) = c$.*

**4.2. Következmény.** *Ha létezik $E(X)$ és $c$ egy állandó, akkor létezik $E(cX)$ és*

$$E(cX) = cE(X).$$

**4.2. Tulajdonság.** *Ha $X$ valószínűségi változó korlátos, akkor létezik várható értéke.*

**Bizonyítás.**

a) Ha $X$ diszkrét valószínűségi változó,

$$X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I},$$

akkor a korlátosság miatt létezik olyan $A$ szám, hogy $|x_i| < A$, minden $i \in I$ esetén, tehát

$$\sum_{i \in I} |x_i p_i| = \sum_{i \in I} |x_i| p_i < A \sum_{i \in I} p_i = A,$$

így a $\sum_{i \in I} x_i p_i$ abszolút konvergens, vagyis létezik $E(X)$.

b) Ha $X$ folytonos valószínűségi változó $f$ sűrűségfüggvénnyel, akkor a korlátosság miatt létezik olyan A szám, hogy $|X| < A$. Ezért $f(x)$ értéke 0, ha $|x| \geq A$, tehát

$$\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) dx = \int_{-A}^{A} |x| f(x) dx \leq A \int_{-A}^{A} f(x) dx = A,$$

azaz létezik $E(X)$. ∎

**4.3. Tulajdonság.** *Ha az $X$ és az $Y$ valószínűségi változónak létezik várható értéke, akkor az összegnek is van várható értéke és*

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

*Általánosan: Ha $X_1, ..., X_n$ valószínűségi változóknak van várható értékük, akkor*

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

**Bizonyítás.**

a) Ha $X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$ és $Y \begin{pmatrix} y_j \\ p_j \end{pmatrix}_{j\in J}$ a két diszkrét valószínűségi változó eloszlása, akkor

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(x_i + y_j)P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i\in I} x_i \sum_{j\in J} P(X = x_i, Y = y_j)+$$

$$+\sum_{j\in J} y_j \sum_{i\in I} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i\in I} x_i P(X = x_i) + \sum_{j\in J} y_j P(Y = y_j).$$

A jobboldali sorok abszolút konvergensek, tehát a baloldali is az, létezik $E(X + Y)$ és egyenlő $E(X) + E(Y)$-nal.

b) Ha $X$ és $Y$ folytonos valószínűségi változó, $X$ sűrűségfüggvénye $f_X$, $Y$-é pedig $f_Y$ és az $(X, Y)$ vektor sűrűségfüggvénye $f$, akkor

$$E(X + Y) = \int_{\mathbb{R}} z f_{X+Y}(z)dz = \int_{\mathbb{R}} z \int_{\mathbb{R}} f(u, z - u)dudz.$$

A $z - u = y$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (u + y)f(u, y)dydu = \\ &= \int_{\mathbb{R}} u \int_{\mathbb{R}} f(u, y)dydu + + \int_{\mathbb{R}} y \int_{\mathbb{R}} f(u, y)dudy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} u f_X(u)du + \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)dy = E(X) + E(Y). \end{aligned}$$

Az általános eset teljes indukcióval igazolható. ■

A szorzatra vonatkozó összefüggés független valószínűségi változókat feltételez.

**4.4. Tulajdonság.** *Legyen $X$ és $Y$ két független valószínűségi változó, melynek létezik várható értéke. Ekkor $XY$-nak is létezik várható értéke és*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

*Általánosan: Ha $X_1, ..., X_n$ $n$ darab független valószínűségi változó, amelynek létezik várható értéke, akkor a szorzatuknak is létezik várható értéke és*

$$E(X_1 \cdot ... \cdot X_n) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i).$$

**Bizonyítás.**

a) Ha $X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$ és $Y \begin{pmatrix} y_j \\ p_j \end{pmatrix}_{j \in J}$ két diszkrét valószínűségi változó, akkor, felhasználva, hogy két abszolút konvergens sor szorzata is abszolút konverges, írhatjuk:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_i y_j P(X = x_i) P(Y = y_j) = \\ &= \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i) \sum_{j \in J} y_j P(Y = y_j) = E(X)E(Y). \end{aligned}$$

b) Ha $X$ sűrűségfüggvénye $f_X$, $Y$ sűrűségfüggvénye $f_Y$ és az $(X, Y)$ vektoré $f$, akkor

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R}} z f_{XY}(z) dz = \int_{\mathbb{R}} z \int_{\mathbb{R}} f\left(u, \frac{z}{u}\right) \frac{1}{|u|} du dz$$

Az $\frac{z}{u} = y$ változócserével

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{0} uyf(u,y)\frac{1}{-u} ududy + \int_{\mathbb{R}} \int_{0}^{\infty} uyf(u,y)\frac{1}{u} ududy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} uyf(u,y)dudy = \int_{\mathbb{R}} y \left[ \int_{\mathbb{R}} uf_X(u)du \right] f_Y(y)dy = \\ &= E(X) \int_{\mathbb{R}} yf_Y(y)dy = E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Itt is felhasználtuk, hogy a jobboldali integrálok abszolút konvergesek, tehát $\int_{\mathbb{R}} z \int_{\mathbb{R}} f(u, \frac{z}{u})\frac{1}{|u|}dudz$ is az, vagyis létezik $E(XY)$. Az általános eset indukcióval igazolható. ■

**4.5. Tulajdonság.** *Ha $X_1, ..., X_n$ valószínűségi változó, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel értelemben mérhető függvény és $h(X_1, ..., X_n)$ valószínűségi változónak létezik várható értéke, akkor*

$$E(h(X_1, ..., X_n)) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x_1, ..., x_n)dF(x_1, ..., x_n).$$

**Bizonyítás.**

a) Diszkrét esetben legyen

$$X_k \begin{pmatrix} x_i^k \\ p_i^k \end{pmatrix}_{i \in I_k}, \ k = \overline{1, n}.$$

Ekkor az $Y = h(X_1, ..., X_n)$ eloszlása $\begin{pmatrix} y_k \\ p_k \end{pmatrix}_{k \in J}$ alakú, ahol

$$p_k = P(h(X_1, ..., X_n) = y_k) = \sum_{h(x_i^1, ..., x_i^n) = y_k} p_{i_1, ..., i_n},$$

és $p_{i_1,...,i_n} = P(X_1 = x_i^1, ..., X_i = x_i^n)$. Ezekkel a jelölésekkel

$$E(Y) = \sum_{k \in J} y_k p_k = \sum_{k \in J} y_k \sum_{h(x_i^1,...,x_i^n)=y_k} p_{i_1,...,i_n} = \sum_{i \in I_k} h(x_i^1, ..., x_i^n) p_{i_1,...,i_n}.$$

b) Csak azt az esetet bizonyítjuk, amikor $X$ folytonos valószínűségi változó $f$ sűrűségfüggvénnyel és $h$ folytonos, legfennebb véges pont kivételével, deriválható függvény. Ekkor igazoljuk, hogy $Y = h(X)$ várható értéke

$$E(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x) dx$$

Tegyük fel először, hogy $f$ szigorúan monoton.

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}} y f(h(y)) |{h^{-1}}'(y)| dy = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x) dx.$$

Ha h csak szakaszonként monoton, akkor a (3.9) tételben alkalmazott felbontást végezzük el. ■

### 4.1.2. Feltételes várható érték

**4.2. Értelmezés.** *Legyen $A \in \mathcal{K}$ egy szigorúan pozitív valószínűségű esemény. Az $X$ valószínűségi változónak az $A$-*ra* **vonatkoztatott feltételes várható értéke***

$$E(X|A) = \int_{\mathbb{R}} x dF_A(x),$$

*ha az integrál abszolút konvergens, ahol $F_A(x)$ az $X$-nek $A$-ra vonatkoztatott feltételes eloszlásfüggvénye.*

Ha $X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$, akkor

$$E(X|A) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i | A).$$

Folytonos esetben, ha az $X$ feltételes sűrűségfüggvénye $f_{X|A}$ , akkor

$$E(X|A) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|A}(x)dx.$$

**4.4. Megjegyzés.** *A várható értékre adott tulajdonságok megörződnek a feltételes várható érték esetében is.*

**4.6. Tulajdonság.** *(***Teljes várható érték tétele***) Legyen* $(A_i)_{i\in I}$ *egy teljes eseményrendszer és* $X$ *egy valószínűségi változó, akkor*

$$E(X) = \sum_{i\in I} P(A_i)E(X|A_i).$$

**Bizonyítás.** Tekintve, hogy $(A_i)_{i\in I}$ teljes eseményrendszer

$$F_X(x) = P(X < x) = \sum_{i\in I} P(A_i)P(X < x|A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)F_{X|A_i}(x).$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} x dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x \sum_{i\in I} P(A_i) dF_{X|A_i}(x) = \\ &= \sum_{i\in I} P(A_i) \int_{\mathbb{R}} x dF_{X|A_i}(x) = \sum_{i\in I} P(A_i)E(X|A_i), \end{aligned}$$

amit igazolni kellett. ∎

**4.7. Tulajdonság.** *(***Bayes tétele***) Adott egy* $B \in \mathcal{K}$, $P(B) > 0$, *esemény és legyen* $(A_i)_{i\in I}$ $A_i \in \mathcal{K}, i \in I$, *ennek egy felbontása , vagyis*

$$\cup_{i\in I} A_i = B,\ A_i \cap A_j = \emptyset, \qquad i \neq j.$$

*Ekkor*

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} \sum_{i\in I}^{n} P(A_i)E(X|A_i).$$

**Bizonyítás.** Az $X$ feltételes eloszlásfüggvényére írhatjuk

$$\begin{aligned}F_{X|B}(x) &= P(X<x|B)=\frac{1}{P(B)}\sum_{i\in I}P(A_i)P(X<x|A_i)= \\ &= \frac{1}{P(B)}\sum_{i\in I}P(A_i)F_{X|A_i}(x).\end{aligned}$$

Innen

$$E(X|B)=\int_{\mathbb{R}}xdF_B(x)=\frac{1}{P(B)}\sum_{i\in I}P(A_i)\int_{\mathbb{R}}xdF_{X|A_i}(x)=$$

$$=\frac{1}{P(B)}\sum_{i\in I}P(A_i)E(X|A_i).$$

Ezzel a tételt igazoltuk. ∎

### 4.1.3. Egy valószínűségi változó k-adik momentuma a-ban

**4.3. Értelmezés.** *Legyen $a\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$ és $X$ egy valószínűségi változó. Az $X$ valószínűségi változó* $k$**-adik momentuma** $a$**- ban**

$$\nu_k(a)=E[(X-a)^k],$$

*ha ez a várható érték létezik.*

Ha $a=0$ , akkor k-adik momentumról beszélünk, $\nu_k=E(X^k)$, $k\in\mathbf{N}^*$.

**4.8. Tulajdonság.** $\nu_k(a)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_k^i\nu_{k-i}a^i$

**Bizonyítás.** Newton binomiális képlete alapján

$$\begin{aligned}\nu_k(a) &= E\left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i(-1)^i X^{k-i}a^i\right) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i(-1)^i E(X^{k-i})a^i = \\ &= \sum_{i=0}^{k} C_k^i(-1)^i \nu_{k-i}a^i,\end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk. ∎

### 4.1.4. Egy valószínűségi változó k-adik abszolút momentuma

**4.4. Értelmezés.** *Az $X$ valószínűségi változó k-adik abszolút momentuma*

$$\overline{\nu}_k = E(|X|^k),$$

*ha ez a várható érték létezik.*

**4.9. Tulajdonság.** *Ha az $X$ valószínűségi változó esetén létezik $\overline{\nu}_n$, akkor létezik $\nu_k$ minden $k < n$ esetén.*

**Bizonyítás.** A feltétel szerint $\int\limits_{\mathbb{R}} |x|^n dF(x) < \infty$, tehát

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |x|^k dF(x) = \int\limits_{|x|<1} |x|^k dF(x) + \int\limits_{|x|>1} |x|^k dF(x) <$$

$$< \int\limits_{|x|<1} dF(x) + \int\limits_{|x|>1} |x|^n dF(x) << \int\limits_{\mathbb{R}} dF(x) + \int\limits_{\mathbb{R}} |x|^n dF(x) < \infty,$$

minden $k < n$ esetén. ∎

### 4.1.5. Egy valószínűségi változó k-adik centrált momentuma

**4.5. Értelmezés.** *Ha a k-adik momentun értelmezésében* $a = E(X)$ *helyettesítést végzünk,* **centrált momentumot** *kapunk:*

$$\mu_k = E\left([X - E(X)]^k\right).$$

Különlegesen fontos a másodrendű centrált momentum, amit **szórásnégyzetnek** vagy **varianciának** nevezünk és külön foglalkozunk vele,

$$\mu_2 = E[X - E(X)]^2.$$

## 4.2. Valószínűségi változó szórása

A várható érték a valószínűségi változó átlagáról ad bizonyos tájékoztatást. Most egy olyan számadatot értelmezünk, amely a valószínűségi változó által felvett értékek átlag körüli szóródásáról ad képet, vagyis azt mutatja meg, hogy a valószínűségi változó értékei az átlag körül milyen szorosan vagy lazán tömörülnek.

**4.6. Értelmezés.** *Az* $X$ *valószínűségi változóra értelmezett*

$$D(X) = \sqrt{E([X - E(X)]^2)}$$

*mennyiséget, ha létezik, akkor az* $X$ **szórásának** *nevezzük. Az* $E[X - E(X)]^2$ *mennyiséget az* $X$ *valószínűségi változó* **szórásnégyzetének** *nevezzük és* $D^2(X)$*-szel jelöljük.*

**4.5. Megjegyzés.** *Egy valószínűségi változó szórása pontosan akkor létezik, ha* $E(X^2)$ *létezik.*

**4.6. Megjegyzés.** *A szórás nemnegatív szám.*

**4.10. Tulajdonság.** *Ha az $X$ valószínűségi változónak létezik szórása, akkor*

$$(i) \quad D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$
$$(ii) \quad D^2(aX+b) = a^2 D^2(X), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

**Bizonyítás.** $(i)$ A várható érték tulajdonságait felhasználva, írhatjuk

$$\begin{aligned} D^2(X) &= E[X^2 - 2X \cdot E(X) + (E(X))^2] = \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

$(ii)$ A várható érték tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned} D^2(aX+b) &= E[(aX + b - aE(X) - b)^2] = E[a^2(X - E(X))^2] = \\ &= a^2 E[X - E(X)]^2 = a^2 D^2(X), \end{aligned}$$

ha $a, b \in \mathbb{R}$. ∎

**4.3. Következmény.** *Ha $X$ diszkrét valószínűségi változó, melynek eloszlása*

$$X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I},$$

*akkor*

$$D^2(X) = \sum_{i \in I} x_i^2 p_i - (\sum_{i \in I} x_i p_i)^2.$$

*Ha $X$ folytonos valószínűségi változó $f$ sűrűségfüggvénnyel, akkor*

$$D^2(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx - (\int_{\mathbb{R}} x f(x) dx)^2.$$

**4.4. Következmény.** *Ha figyelembe vesszük, hogy $D^2(X) \geq 0$, akkor a (4.10) tulajdonság (i) összefüggéséből a* **Cauchy-Bunjakovski egyenlőtlenséget** *kapjuk:*

$$|E(X)| \leq \sqrt{E(X^2)}.$$

**4.11. Tulajdonság.** *Egy $X$ valószínűségi változó szórásnégyzete pontosan akkor $0$, ha az $X$ valószínűségi változó $1$ valószínűséggel állandó.*

**Bizonyítás.** Ha $X$ valószínűségi változó 1 valószínűséggel 0, akkor a (4.10) tulajdonság (ii) összefüggéséből adódik, hogy

$$D^2(X) = 0.$$

Fordítva, ha $D^2(X) = 0$, akkor $E([X - E(X)]^2) = 0$, de $(X - E(X))^2 \geq 0$, ezért $X - E(X) = 0$ lesz 1 valószínűséggel, amiből állításunk adódik. ■

**4.12. Tulajdonság.** *Ha $D^2(X_i)$ létezik minden $i = \overline{1,n}$ esetén, akkor*

$$D^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))].$$

*Ha $X_i$, $i = \overline{1,n}$, független valószínűségi változó, akkor*

$$D^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i)$$

**Bizonyítás.** Felírhatjuk

$$D^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = E\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - E(\sum_{i=1}^{n} X_i)\right]^2\right) =$$

$$= E\left(\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i))\right]^2\right) =$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i))^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n}(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E([X_i - E(X_i)]^2) + 2\sum_{1\le i<j\le n} E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))].$$

Ha a valószínűségi változók függetlenek, akkor

$$E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))] = E[(X_i - E(X_i))]E[(X_j - E(X_j))] = 0,$$

ahonnan a kért összefüggést kapjuk. ■

**4.13. Tulajdonság.** *Ha $X$ és $Y$ két független valószínűségi változó, akkor*

$$D^2(XY) = D^2(X)\cdot D^2(Y) + [E(X)]^2 D^2(Y) + [E(Y)]^2 D^2(X).$$

**Bizonyítás.** Ha $X$ és $Y$ független, akkor $X^2$ és $Y^2$ is az, tehát

$$\begin{aligned}
D^2(XY) &= E[XY - E(XY)]^2 = E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2 = \\
&= E(X^2)E(Y^2) - [E(X)]^2[E(Y)]^2 = \\
&= [D^2(X) + [E(X)]^2][D^2(Y) + [E(Y)]^2] - [E(X)]^2[E(Y)]^2 = \\
&= D^2(X)\cdot D^2(Y) + [E(X)]^2 D^2(Y) + [E(Y)]^2 D^2(X),
\end{aligned}$$

amit igazolni kellett. ■

**4.6. Példa.** *Ha $X$ binomiális eloszlású valószínűségi változó,*

$$X\begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}}, \qquad n \in \mathbf{N},\ p \in ]0,1[,$$

*akkor várható értéke $E(X) = p$ és*

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} = \\ &= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} p^k q^{n-1-k} + np(p+q)^{n-1} = \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} p^k q^{n-2-k} + np = n(n-1)p^2 + np, \end{aligned}$$

*ahonnan*

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = npq.$$

**4.7. Példa.** *Ha $X$ Poisson eloszlású valószínűségi változó,*

$$X\begin{pmatrix} k \\ \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{pmatrix}_{k=0,1,\ldots},$$

*ahol $\lambda > 0$, akkor $E(X) = \lambda$ és*

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\ &= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda, \end{aligned}$$

*ahonnan*

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

**4.8. Példa.** *A célpont eltalálásához szükséges lövések számának szórása (a (4.3) példa esetén):*

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} - [E(X)]^2 = 6 - 2^2 = 2.$$

**4.9. Példa.** *Ha $X$ egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumun, vagyis*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & ha \quad a < x < b \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

*akkor $E(X) = \frac{a+b}{2}$ és szórása*

$$D^2(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - \frac{a+b}{2})^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

**4.10. Példa.** *Legyen az $X$ valószínűségi változó normális eloszlású $m$ és $\sigma$ paraméterrel.*

$$D^2(X) = \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

*Az $\frac{x-m}{\sigma} = y$ változócserével*

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \int_{\mathbb{R}} \sigma^2 y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy = \\ &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y(-e^{-\frac{y^2}{2}})' dy = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[ -ye^{-\frac{y^2}{2}} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right] = \\ &= \sigma^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sigma^2. \end{aligned}$$

*Tehát a normális eloszlás értelmezésében szereplő $\sigma$ paraméter az eloszlás szórása.*

## 4.3. Feltételes szórás

**4.7. Értelmezés.** *Legyen az* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *valószínűségi mezőn egy* $A$ *esemény, amelyre* $P(A) > 0$*. Az* $X$ *valószínűségi változó* $A$*-ra vonatkoztatott* **feltételes szórása**

$$D_A^2(X) = E(X^2|A) - [E(X|A)]^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 dF_A(x) - \left[\int_{\mathbb{R}} x dF_A(x)\right]^2,$$

*ha az integrál abszulút konvergens.*

A szórás tulajdonságai megőrződnek feltételes szórás esetén is.

**4.14. Tulajdonság.** *Legyen* $(A_i)_{i\in I}$ *egy teljes esemény rendszer és* $X$ *egy valószínűségi változó, akkor*

$$D^2(X) = \sum_{i\in I} P(A_i)E(X^2|A_i) - [E(X)]^2.$$

**Bizonyítás.** A teljes várható érték (4.6) tételéből írhatjuk, hogy

$$E(X^2) = \sum_{i\in I} P(A_i)E(X^2|A_i),$$

ahonnan az adott összefüggés azonnal következik. ■

## 4.4. Korrelációs együttható

A gyakorlatban nagyon sok olyan problémával találkozunk, ahol a valószínűségi változók függetlensége nem tételezhető fel, például a magasság és testsúly esetében. Ilyen esetben sem közömbös, hogy a valószínűségi változók közt milyen kapcsolat van, a függés milyen szoros. A valószínűségi változók függőségének egy mérőszáma a korrelációs együttható.

**4.8. Értelmezés.** *Legyen $X$ és $Y$ két valószínűségi változó, melynek létezik várható értéke és szórása. Az*

$$R(X, Y) = \frac{E[(X - E(X))(Y - E(Y))]}{D(X)D(Y)}$$

*mennyiséget az $X$ és az $Y$ valószínűségi változó* **korrelációs együtthatójának** *nevezzük, ha $D(X)D(Y) \neq 0$. Ha $D(X)$ vagy $D(Y)$ értéke $0$, akkor $R(X, Y)$ definició szerint $0$.*

Ha $R(X, Y) = 0$, akkor az $X$ és $Y$ valószínűségi változókat **korrelálatlannak** nevezzük. Ez nem jelenti azt, hogy a valószínűségi változók függetlenek.

**4.15. Tulajdonság.** *Ha az $X$ és az $Y$ valószínűségi változóra létezik $E(X^2)$ és $E(Y^2)$, akkor*

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}. \tag{4.1}$$

**Bizonyítás.** Legyen $\lambda$ valós paraméter, akkor $(X - \lambda Y)^2$ nemnegatív valószínűségi változó várható értéke is nemnegatív, vagyis

$$0 \leq E[(X - \lambda Y)^2] = \lambda^2 E(Y^2) - 2\lambda E(XY) + E(X^2).$$

Mivel it $\lambda^2$ együtthatója pozitív, az előbbi egyenlőtlenség akkor teljesül, ha a $\lambda$-ban másodfokú kifejezés diszkriminánsa $\leq 0$, amiből következik (4.1). ■

**4.16. Tulajdonság.** *Ha az $X$ és $Y$ valószínűségi változóknak létezik korrelációs együtthatója, akkor*

(*i*) $R(X, Y) = R(Y, X)$;

(*ii*) *ha $X$ és $Y$ független, akkor $R(X, Y) = 0$;*

(*iii*) $[R(X, Y)]^2 \leq 1$.

**Bizonyítás.** Az (i) az értelmezésből következik.

Az (ii) összefüggés igazolásához kiszámítjuk a számlálót:

$$E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = E[XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)] =$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$$

A (iii) összefüggés igazolásához tekintsük az

$$X^* = \frac{X - E(X)}{D(X)} \qquad \text{és} \qquad Y^* = \frac{Y - E(Y)}{D(Y)}$$

valószínűségi változókat. Ekkor a korrelációs együttható

$$R(X,Y) = E(X^*Y^*)$$

alakban írható. Nyilvánvaló $E(X^*) = E(Y^*) = 0$ és $D^2(X^*) = D^2(Y^*) = E(X^{*2}) = 1$. A (4.1) alapján

$$R(X,Y) = E(X^*Y^*) \leq 1,$$

amit igazolni kellett. ■

**4.17. Tulajdonság.** *$|R(X,Y)| = 1$ pontosan akkor, ha létezik olyan $a$ ($\neq 0$) és $b$ valós szám, amelyekre 1-valószínűséggel fennáll az*

$$Y = aX + b$$

*összefüggés. Ez esetben $R(X,Y) = 1$ illetve -1, aszerint, hogy $a > 0$ vagy $a < 0$.*

**Bizonyítás.** Ha $Y = aX + b$ teljesül, akkor

$$R(X,Y) = \frac{aE[X - E(X)]^2}{|a|D^2(X)} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & ha \quad a > 0, \\ -1, & ha \quad a < 0. \end{cases}$$

Fordítva, ha $|R(X,Y)| = 1$, az előbbi tulajdonság bizonyításánál használt jelölésekkel

$$E[(X^* \pm Y^*)^2] = 2(1 \pm R(X,Y)) = 2(1 \pm (\mp 1)) = 0.$$

Egy nem negatív valószínűségi változó várható értéke csak akkor 0, ha a változó 1 valószínűséggel 0, vagyis ha $R(X,Y) = \mp 1$, akkor

$$P\left(\frac{Y - E(Y)}{D(Y)} = \pm \frac{X - E(X)}{D(X)}\right) = 1,$$

amivel bizonyítottuk az $Y = aX + b$ összefüggést 1-valószínűséggel. ■

**7. Alkalmazás.** *Számítsuk ki az $N(m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, r)$ normális eloszlású valószínűségi vektor $X$ és $Y$ komponensének korrelációs együtthatóját!*

*Tudjuk, hogy*

$$E(X) = m_1, \;\; E(Y) = m_2, \;\; D^2(X) = \sigma_1^2 \;\; \textit{és} \; D^2(Y) = \sigma_2^2.$$

*Ezt felhasználva, írhatjuk*

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} (x - E(X))(y - E(Y)) f(x,y) dx dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - r^2}} \cdot$$

$$\cdot \int\int_{\mathbb{R}^2} (x - m_1)(y - m_2) e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} dx dy.$$

*Az*

$$x - m_1 = \sigma_1\sqrt{2}u, \; y - m_2 = \sigma_2\sqrt{2}(v\sqrt{1 - r^2} + ru)$$

*változócserével*

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = 2\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - r^2},$$

*és így*

$$R(X,Y) = \frac{1}{D(X)D(Y)}\frac{1}{\pi}\int\int_{\mathbb{R}^2} u\sigma_1\sqrt{2}\sigma_2\sqrt{2(1-r^2)}\left(v+\frac{ru}{\sqrt{1-r^2}}\right)\cdot$$

$$\cdot e^{-u^2-v^2}dudv = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\frac{1}{\pi}\left[2\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}\int_{\mathbb{R}} ue^{-u^2}du\int_{\mathbb{R}} ve^{-v^2}dv\right]+$$

$$+\frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\frac{1}{\pi}\left[2\sigma_1\sigma_2 r\int_{\mathbb{R}} u^2e^{-u^2}du\int_{\mathbb{R}} e^{-v^2}dv\right] = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\frac{1}{\pi}2\sigma_1\sigma_2 r\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\pi} = r.$$

*Tehát a normális eloszlású valószínűségi vektor $r$ paramétere a vektor komponenseinek korrelációs együtthatója.*

# 5. Fejezet

# Valószínűségi változók konvergenciatípusai

Ebben a fejezetben a valószínűségi változók sorozatainak konvergenciáját vizsgáljuk. Legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó-sorozat.

## 5.1. Sztochasztikus konvergencia

**5.1. Értelmezés.** *Az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat* **sztochasztikusan konvergál az $X$ valószínűségi változóhoz**, *ha*

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1$$

*tetszőleges rögzített $\epsilon > 0$ esetén. Jelölése: $X_n \xrightarrow{p} X$ vagy $X_n \xrightarrow{st} X$*

A sztochasztikus konvergencia értelmezését átfogalmazhatjuk a következőképpen:

**5.2. Értelmezés.** *Az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat* **sztochasz-**

**tikusan konvergál az $X$ valószínűségi változóhoz**, *ha*

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

*tetszőleges rögzített $\epsilon > 0$ esetén.*

Vagy az $\epsilon$, $\delta$ nyelvezettel

**5.3. Értelmezés.** *Az $(X_n)_n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó-sorozat* **sztochasztikusan konvergál az $X$ valószínűségi változóhoz** *, ha bármely $\epsilon > 0$ és $\delta > 0$ esetén létezik egy olyen $N = N(\epsilon, \delta)$ természetes szám, amelyre*

$$P(|X_n - X| < \epsilon) \geq 1 - \delta,$$

*minden $n > N$ esetén.*

**5.1. Megjegyzés.** *A mértékelméletben e fogalomnak a mértékben való konvergencia a megfelelője.*

**5.4. Értelmezés.** *Az $X$ és $Y$ valószínűségi változóról azt mondjuk, hogy* **majdnem mindenhol egyenlő** *vagy* **1-valószínűséggel egyenlő**, *ha*

$$P(X = Y) = 1 \quad vagy \quad P(X \neq Y) = 0.$$

A sztochasztikus határérték nem egyértelmű, de igaz a következő tulajdonság:

**5.1. Tulajdonság.** *Ha az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat sztochasztikusan konvergál az $X$ és az $Y$ valószínűségi változóhoz, akkor $X$ és $Y$ majdnem mindenhol egyenlő.*

**Bizonyítás.** Felhasználjuk az események közti

$$\left(|X - X_n| < \frac{\epsilon}{2}\right) \cap \left(|Y - X_n| < \frac{\epsilon}{2}\right) \subset (|X - Y| < \epsilon)$$

implikációt. Így

$$P(|X - Y| \geq \epsilon) \leq P\left(|X - X_n| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) + P\left(|Y - X_n| \geq \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Az értelmezés alapján, tetszőleges $\epsilon > 0$ és $\delta > 0$ esetén, létezik $N = N(\epsilon, \delta)$ úgy, hogy

$$P(|X - Y| \geq \epsilon) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

vagyis

$$P(|X - Y| \geq \epsilon) = 0, \qquad \epsilon > 0 \tag{5.1}$$

Másrészt

$$P(|X - Y| \neq 0) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(|X - Y| \geq \frac{1}{n})\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P\left(|X - Y| \geq \frac{1}{n}\right).$$

A (5.1) összefüggésben $\epsilon = \frac{1}{n}$-t választva kapjuk, hogy

$$P(|X - Y| \neq 0) = 0,$$

ami a majdnem mindenhol való egyenlőséget jelenti. ∎

**5.2. Tulajdonság.** *Ha az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat sztochasztikusan $X$-hez, az $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat sztochasztikusan $Y$-hoz konvergál, akkor az $(aX_n + bY_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat $aX + bY$ valószínűségi változóhoz konvergál sztochasztikusan, ha $a, b \in \mathbb{R}$.*

**Bizonyítás.** Tételezzük fel, hogy $ab \neq 0$. Felírhatjuk a következő eseményimplikációt

$$(|aX_n+bY_n-aX-bY| \geq \epsilon) \subset \Big(|a||X_n - X| \geq \frac{\epsilon}{2}\Big) \cup \Big(|b||Y_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2}\Big).$$

A valószínűség monoton, tehát

$$P(|aX_n + bY_n - aX - bY| \geq \epsilon) \leq$$
$$\leq P\left(|X_n - X| \geq \frac{\epsilon}{2|a|}\right) + P\left(|Y_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2|b|}\right).$$

Az értelmezés alapján, tetszőleges $\epsilon > 0$ és $\delta > 0$ esetén, létezik $N = N(\epsilon, \delta)$ úgy, hogy

$$P(|aX_n + bY_n - aX - bY| \geq \epsilon) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

ha $n > N$. ■

**5.3. Tulajdonság.** *Ha az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat sztochasztikusan konvergál az $X$ valószínűségi változóhoz és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvény, akkor az $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat f(X)-hez konvergál sztochasztikusan.*

**Bizonyítás.** Az $f$ egyenletes folytonossága miatt, minden $\epsilon > 0$ esetén, létezik $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ úgy, hogy, ha $|x - y| < \delta$, akkor $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, amiből felírhatjuk a következő implikációt

$$(|X_n - X| < \delta) \subset (|f(X_n) - f(X)| < \epsilon).$$

A valószínűség monotonítása alapján

$$P(|f(X_n) - f(X)| \geq \epsilon) \leq P(|X_n - X| \geq \delta).$$

Határértékre térve kapjuk

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} P(|f(X_n) - f(X)| \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \delta) = 0,$$

ahonnan $f(X_n) \xrightarrow{st} f(X)$. ■

## 5.2. Konvergencia 1-valószínűséggel

**5.5. Értelmezés.** *Az* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valószínűségi változó-sorozat* **1-valószínűséggel az** $X$ **valószínűségi változóhoz konvergál**, *ha*

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1.$$

*Jelölése:* $X_n \stackrel{st1}{\to} X$ *vagy* $X_n \stackrel{a.s.}{\to} X$ *(a.s. almost sure).*

Ezzel egyenértékű a következő értelmezés:

**5.6. Értelmezés.** *Az* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valószínűségi változó-sorozat* **1-valószínűséggel az** $X$ **valószínűségi változóhoz konvergál**, *ha*

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n \neq X) = 0.$$

Ez a fogalom a pontonkénti konvergenciának felel meg.

**5.4. Tulajdonság.** *Az* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valószínűségi változó-sorozat pontosan akkor konvergál 1-valószínűséggel az* $X$ *valószínűségi változóhoz, ha, bármely* $\epsilon > 0$ *és* $\delta > 0$ *esetén, létezik egy* $N = N(\epsilon, \delta)$ *természetes szám úgy, hogy*

$$P\left(\bigcap_{n>N} (|X_n - X| < \epsilon)\right) \geq 1 - \delta. \tag{5.2}$$

**Bizonyítás.** Vezessük be a következő jelöléseket

$$A = \{\omega \in \Omega | X_n(\omega) \to X(\omega)\}$$

és

$$A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{j=m}^{\infty} \left(|X_j - X| < \frac{1}{n}\right).$$

Ekkor $A = \bigcap_{n\in\ N} A_n$ és az $A_n$ eseménysorozat csökkenő, így $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Ha $X_n \stackrel{st1}{\to} X$, akkor $P(A) = 1$ és $P(A_n) = 1$, ahonnan

$$\lim_{m\to\infty} P\left(\bigcap_{j\geq m} (|X_j - X| < \frac{1}{n}\right) = 1, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Minden $\epsilon > 0$-ra megadható egy olyan természetes $n_0$ szám, amelyre $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Ezért írhatjuk

$$\bigcap_{j\geq m} \left(|X_j - X| < \frac{1}{n_0}\right) \subset \bigcap_{j\geq m} (|X_j - X| < \epsilon),$$

ahonnan, az (5.3) alapján,

$$1 = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{j\geq m} (|X_j - X| < \frac{1}{n_0})\right) \leq P\left(\bigcap_{j\geq m} (|X_j - X| < \epsilon)\right),$$

ami egyenértékű az (5.2) feltétellel.

Fordítva, ha az (5.2) teljesül, akkor

$$P(A_n) \geq \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{j\geq m} (|X_j - X| < \frac{1}{n})\right) = 1,$$

ahonnan $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$ és $P(A) = 1$, tehát $X_n \stackrel{st1}{\to} X$. ∎

**5.5. Tulajdonság.** *Ha az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat 1-valószínűséggel az $X$ valószínűségi változóhoz konvergál, akkor sztochasztikusan is $X$-hez konvergál.*

**Bizonyítás.** Az előbbi tulajdonság alapján, ha az $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ valószínűségi változó-sorozat 1-valószínűséggel az $X$ valószínűségi változóhoz konvergál, akkor teljesül az (5.2) feltétel. Felhasználva a

$$(|X_n - X| \geq \epsilon) \subset \bigcup_{n>N} (|X_n - X| \geq \epsilon), \qquad n > N,$$

implikációt, a (5.2) alapján, írhatjuk

$$P(|X_n - X| \geq \epsilon) \leq P\left(\bigcup_{n>N} (|X_n - X| \geq \epsilon)\right) \leq \delta, \qquad n > N,$$

ahonnan következik a sztochasztikus konvergencia. ■

**5.1. Példa.** *A tulajdonság fordítottja nem igaz. Szerkeszthetünk egy olyan valószínűségi változó sorozatot, amelyik sztochasztikusan* 0*-hoz konvergál, de* 1*-valószínűséggel nem konvergens.*

*Legyen* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ $=([0,1], \mathcal{B}[0,1], L)$*, ahol* $L$ *a Lebesgue mérték. Jelölje* $1_{[a,b]}$ *az* $[a,b]$ *intervallum karakterisztikus függvényét. Értelmezzük a következő valószínűségi változó-sorozatot:*

$$\begin{array}{lll} X_1 = 1_{[0,1]}, & & \\ X_2 = 1_{[0,\frac{1}{2}]}, & X_3 = 1_{[\frac{1}{2},1]}, & \\ X_4 = 1_{[0,\frac{1}{3}]}, & X_5 = 1_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}, & X_6 = 1_{[\frac{2}{3},1]}, \\ \quad\cdot & \quad\cdot & \quad\cdot \\ \quad\cdot & \quad\cdot & \quad\cdot \end{array}$$

*és így tovább.*

*Egyetlen* $\omega \in [0,1]$ *esetén sem tart* $X_n(\omega)$ *nullához, mert* $X_n(\omega) =$ 1 *végtelen sok* $n$ *esetén. Ennek ellenére* $X_n \stackrel{st}{\to} 0$.

## 5.3. Bernoulli-féle vagy eloszlásban való konvergencia

**5.7. Értelmezés.** *Az* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valószínűségi változó-sorozat* **eloszlásban vagy Bernoulli értelemben az** $X$ **valószínűségi változóhoz konvergál***, ha az* $X_n$ *eloszlásfüggvénye pontonként konvergál az* $F$ *eloszlásfüggvényéhez, vagyis*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(X) = F(X)$$

*az* $F$ *minden* $x$ *folytonossági pontjában, ahol* $F_n$ *az* $X_n$*,* $F$ *pedig az* $X$ *eloszlásfüggvénye. Jelölése:* $X_n \stackrel{e}{\to} X$ *vagy* $X_n \stackrel{\mathcal{B}}{\to} X$.

A továbbiakban a Bernoulli konvergenciának a sztochasztikus konvergenciához való viszonyát vizsgáljuk.

**5.6. Tulajdonság.** *Ha az* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valószínűségi változó-sorozat sztochasztikusan az* $X$ *valószínűségi változóhoz konvergál, akkor eloszlásban is konvergál* $X$*-hez.*

**Bizonyítás.** Legyen $x \in \mathbb{R}$ az $F$ eloszlásfüggvénynek folytonossági pontja. Tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy

$$F(x+\delta) - F(x-\delta) < \epsilon. \tag{5.4}$$

Felhasználva az

$$(X < x-\delta) = ((X_n < x) \cup (X_n \geq x)) \cap (X < x-\delta) =$$

$$= (X_n < x, X < x-\delta) \cup (X_n \geq x, X < x-\delta) \subset (X_n < x) \cup (|X_n - X| \geq \delta)$$

implikációt, írhatjuk, hogy

$$F(x-\delta) \leq F_n(x) + P(|X_n - X| \geq \delta),$$

ahonnan

$$F(x-\delta) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x). \tag{5.5}$$

A felső határérték becslésére írjuk fel a következő eseményrelációt

$$(X_n < x) = ((X < x+\delta) \cup (X \geq x+\delta)) \cap (X_n < x) =$$

$$= (X < x+\delta, X_n < x) \cup (X \geq x+\delta, X_n < x) \subset (X < x+\delta) \cup (|X_n - x| \geq \delta).$$

Innen

$$F_n(x) \leq F(x+\delta) + P(|X_n - x| \geq \delta)$$

és

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x+\delta). \tag{5.6}$$

Az (5.4), (5.5),(5.6) összefüggések alapján

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} F_n(x) - \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x+\delta) - F(x-\delta) < \epsilon,$$

bármely $\epsilon > 0$ és megfelelő $\delta$ esetén, ahonnan következik, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) = \liminf_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = a.$$

Ugyanakkor, (5.5),(5.6) alapján, $F(x-\delta) \leq a \leq F(x+\delta)$ minden $\delta > 0$ esetén. $x$ folytonossági pontja $F$-nek, tehát $F(x) = a$. ■

**5.2. Megjegyzés.** *Az eloszlásban való konvergenciából, általában nem következik a sztochasztikus konvergencia.*

**5.2. Példa.** *A következő példa egy olyan valószínűségi változó-sorozatot ad, amely eloszlásban konvergens, de sztochasztikusan nem. Legyen* *a* $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, L)$, *ahol* $L$ *a Lebesgue mérték, valószínűségi mezőn a következő valószínűségi változó-sorozat*

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 0, & ha \quad \omega \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1, & ha \quad \omega \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$, *és az* $X$ *valószínűségi változó*

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & ha \quad \omega \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0, & ha \quad \omega \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

*Az eloszlásfüggvényekre az*

$$F_n(x) = F(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & ha \quad 0 < x \leq 1, \\ 1, & ha \quad x > 1, \end{cases}$$

*összefüggést írhatjuk, tehát a valószínűségi változó-sorozat eloszlásban konvergens. A* $P(|X_n - X| < \epsilon) = 0$, *ha* $0 < \epsilon < 1$, *reláció miatt az* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *sorozat sztochasztikusan nem konvergens.*

**5.7. Tulajdonság.** *Abban az esetben, ha az* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eloszlásban egy* $a$ *állandó valószínűségi változóhoz tart, akkor sztochasztikusan is* $a$*-hoz tart.*

**Bizonyítás.** Az $a$ állandó valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \leq a, \\ 1, & ha \quad x > a. \end{cases}$$

Adott $\epsilon > 0$-ra írhatjuk

$$P(|X_n - a| < \epsilon) = P(a - \epsilon < X_n < a + \epsilon) = F_n(a + \epsilon) - F_n(a - \epsilon).$$

Határértékre térve

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - a| < \epsilon) = F(a + \epsilon) - F(a - \epsilon) = 1,$$

vagyis $X_n \xrightarrow{st} a$. ■

# 6. Fejezet

# A karakterisztikus függvény

A karakterisztikus függvény a valószínűségszámításban igen hasznos segédeszköz. A fogalom bevezetéséhez szükségünk lesz a komplex értékű valószínűségi változóra.

**6.1. Értelmezés.** *Legyen* $X$ *és* $Y$ *két, az* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó. Az* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *-n értelmezett*

$$Z = X + iY$$

*valószínűségi változót* **komplex értékű valószínűségi változónak** *nevezzük.*

A $Z$ valószínűségi változó eloszlásán az $(X, Y)$ vektor eloszlását értjük, várható értékén pedig az

$$E(Z) = E(X) + iE(Y)$$

komplex számot. Két vagy több komplex valószínűségi változót akkor nevezünk függetlennek, illetve teljesen függetlennek, ha a kétdimenziós valószínűségi vektorok függetlenek, illetve teljesen függetlenek.

## 6.1. Valószínűségi változók karakterisztikus függvénye

Legyen $g(x) = e^{itx}$, ahol $t$ tetszőleges valós paraméter. Mivel bármely $X$ valószínűségi változó esetén $|e^{itx}| = 1$, ezért az $e^{itx}$ várható értéke létezik és

$$E(e^{itx}) = E(\cos tX) + iE(\sin tX).$$

Az előbbiek alapján értelmezhetjük egy valószínűségi változó karakterisztikus függvényét.

**6.2. Értelmezés.** *Az $X$ valószínűségi változó* **karakterisztikus függvénye** *a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény, melyet a*

$$\varphi(t) = E(e^{itx}), \qquad t \in \mathbb{R},$$

*képlet értelmez.*

Ha $F$ az $X$ eloszlásfüggvénye, akkor

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x), \qquad t \in \mathbb{R},$$

amely az $F$ függvény **Fourier-Stieltjes** transzformáltja.

Diszkrét illetve folytonos esetben a karakterisztikus függvényt a következő alakban írhatjuk:

Ha

$$X \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix}_{k \in I},$$

akkor

$$\varphi(t) = \sum_{k \in I} p_k e^{itx_k}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ha $X$ folytonos és sűrűségfüggvénye $f$, akkor

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

A karakterisztikus függvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

**6.1. Tulajdonság.**

$$|\varphi(t)| \leq 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

**Bizonyítás.** Az értelmezés alapján

$$|\varphi(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{itx}| dF(x) = \int_{\mathbb{R}} dF(X) = 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

és $\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} dF(X) = 1$. ■

**6.2. Tulajdonság.** *A karakterisztikus függvény az egész számegyenesen egyenletesen folytonos.*

**Bizonyítás.** Az $F(\infty) = 1$ tulajdonság miatt, adott $\epsilon > 0$ esetén, létezik olyan $A > 0$ szám hogy

$$\int_{|x|>A} dF(x) \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Másrészt, létezik olyan $h > 0$ (elég kicsi) szám, amelyre

$$|e^{ihx} - 1| < \frac{\epsilon}{2}, \quad ha \quad |x| \leq A.$$

Az integrál tulajdonságai alapján

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{ihx} - 1| dF(x),$$

minden $h > 0$-ra. Innen

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq \int_{|x|\leq A} |e^{ihx} - 1| dF(x) + \int_{|x|>A} |e^{ihx} - 1| dF(x) <$$

$$< \frac{\epsilon}{2}\int_{|x|\leq A} dF(x) + 2\int_{|x|>A} dF(x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

amiből következik az egyenletes folytonosság. ■

**6.3. Tulajdonság.** *Ha az $X$ éz az $Y$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\varphi_X$ illetve $\varphi_y$ és ha $Y = aX + b$. $a, b \in \mathbb{R}$, akkor*

$$\varphi_Y(t) = e^{ibt}\varphi_X(at), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Bizonyítás.** Felírhatjuk

$$\varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{ibt} \cdot e^{iatX}) = e^{itb}E(e^{iatX}) = e^{itb}\varphi_X(at),$$

minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. ■

**6.4. Tulajdonság.** *Ha az $X_1, ..., X_n$ valószínűségi változók függetlenek, akkor az $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ valószínűségi változó karakterisztikus - függvénye*

$$\varphi_X(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Bizonyítás.** A karakterisztikus függvény értelmezése alapján

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E(e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k}) = E(e^{itX_1} \cdot ... \cdot e^{itX_n})$$

ami a függetlenség miatt

$$= E(e^{itX_1}) \cdot ... \cdot E(e^{itX_n}) = \varphi_{X_1}(t) \cdot ... \cdot \varphi_{X_n}(t),$$

minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. ■

**6.5. Tulajdonság.**

$$\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t)$$

*és szimmetrikus eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye valós és páros függvény.*

**Bizonyítás.** A komplex számok tulajdonságai alapján $\overline{E(Z)} = E(\overline{Z})$, ahol $Z$ komplex valószínűségi változó

$$\overline{\varphi_X(t)} = \overline{E(e^{itX})} = E(e^{-itX}) = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t).$$

Ha $X$ szimmetrikus, akkor az $X$ és $-X$ eloszlásfüggvénye megegyezik, így

$$\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(t),$$

tehát a karakterisztikus függvény értékei valósak és $\varphi_X(t) = \varphi_X(-t)$. ∎

A karakterisztikus függvényt felhasználhatjuk egy valószínűségi változó momentumainak kiszámítására.

**6.6. Tulajdonság.** *Ha az $X$ valószínűségi változó $n$-edik abszolút momentuma létezik és a karakterisztikus függvénye $n$-szer deriválható, akkor*

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \nu_k, \; k = \overline{1, n}.$$

**Bizonyítás.** A (4.9) tulajdonság szerint, ha létezik $n$-edik abszolút momentum, akkor ltezik $k$-adik momentum, minden $k < n$ esetén.

A karakterisztikus függvény $k$-szoros $t$ szerinti deriválásával a

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx} dF(x)$$

összefüggéshez jutunk. A jobboldali integrál létezik, mert

$$\left| \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx} dF(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |x^k| dF(x) \leq \infty.$$

Innen $t = 0$ helyettesítéssel a kért összefüggést kapjuk. ∎

**6.1. Példa. Az indikátorváltozó karakterisztikus függvénye.** *Legyen $A$ egy esemény, $P(A) = p$ és*

$$X_A = \begin{cases} 1, & \textit{ha} \quad A \textit{ bekövetkezik,} \\ 0, & \textit{ha} \quad A \textit{ nem következik be,} \end{cases}$$

*akkor*

$$\varphi(t) = E(e^{itX_A}) = pe^{it\cdot 1} + e^{it\cdot 0}q = pe^{it} + q, \qquad t \in \mathbb{R}$$

**6.2. Példa. A binomiális eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye.** *Ha $X$ egy $n, p$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, vagyis $P(A) = p$, akkor*

$$\varphi(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t) = (pe^{it} + q)^n, \qquad t \in \mathbb{R},$$

*ahol $X_j$ az $A$ esemény indikátorváltozója.*

**6.3. Példa. A Poisson eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye.** *Ha az $X$ valószínűségi változó $\lambda$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó,*

$$X \begin{pmatrix} k \\ \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \end{pmatrix}_{k=1,2,\ldots},$$

*akkor karakterisztikus függvénye*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{itk} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**6.4. Példa. Az egyenletes eloszlás karakterisztikus függvénye.** *Ha $X$ az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, akkor*

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{itx} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**6.5. Példa. A standard normális eloszlás karakterisztikus - függvénye.** *Ha $X$ az $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó, akkor*

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

*Felhasználva, hogy*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} 0, & ha \quad n = 2k-1, \\ (2k-1)!!, & ha \quad n = 2k, \end{cases}$$

*írhatjuk*

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} t^{2k}}{(2k)!} (2k-1)!! = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} t^{2k}}{2^k k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2/2)^k}{k!} = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*Tudjuk, hogy az $N(m,\sigma)$ eloszlású $Y$ valószínűségi változó felírható $Y = \sigma X + m$ alakban, tehát az $Y$ karakterisztikus függvénye*

$$\varphi_Y(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

## 6.2. Valószínűségi vektorok karakterisztikus függvénye

**6.3. Értelmezés.** *Az $X(X_1, ..., X_n)$* **valószínűségi vektor karakterisztikus függvénye** *a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvény, melyet a*

$$\varphi(t_1, ..., t_n) = E(e^{i(t_1 X_1 + ... + t_n X_n)}), \qquad (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$$

*képlet értelmez.*

Ha $F$ az $X(X_1,...,X_n)$ vektor eloszlásfüggvénye, akkor

$$\varphi(t_1,...,t_n)=\int...\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t_1x_1+...+t_nx_n)}dF(x_1,...,x_n),\ (t_1,...,t_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Ha $X(X_1,...,X_n)$ diszkrét valószínűségi változó,

$$p_{j_1...j_n}=P(X_1=x^1_{j_1},...,X_n=x^n_{j_n}),\ j_k\in I_k,\ k=\overline{1,n},$$

eloszlással, akkor karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t_1,...,t_n)=\sum_{\substack{j_k\in I_k\\ k=\overline{1,n}}} p_{j_1...j_n}e^{i(t_1x^1_{j_1}+...+t_nx^n_{j_n})}.$$

Ha $X(X_1,...,X_n)$ folytonos vektor és $f$ a sűrűségfüggvénye, akkor

$$\varphi(t_1,...,t_n)=\int...\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t_1x_1+...+t_nx_n)}f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n,$$

minden $(t_1,...,t_n)\in\mathbb{R}^n$ esetén.

A valószínűségi változóknál végzett bizonyítások általánosíthatók vektorokra is. Ezeket bizonyítás nélkül jelentjük ki.

**6.7. Tulajdonság.**

$(i)$ $\quad\varphi(0,...,0)=1,$

$(ii)$ $\quad|\varphi(t_1,...,t_n)|\le 1,\ (t_1,...,t_n)\in\mathbb{R}^n,$

$(iii)$ $\quad\varphi$ *egyenletesen folytonos* $\mathbb{R}^n-n,$

$(iv)$ $\quad\varphi_Y(t_1,...,t_n)=e^{i(b_1t_1+...+b_nt_n)}\varphi_X(a_1t_1,...,a_nt_n),$
*ha* $Y(a_1X_1+b_1,...,a_nX_n+b_n),\ a_k,b_k\in\mathbb{R},\ k=\overline{1,n},$

$(v)$ $\quad\dfrac{\partial^{k_1+...+k_n}\varphi(0,...,0)}{\partial t_1^{k_1}...\partial t_n^{k_n}}=i^{k_1+...+k_n}\nu_{k_1+...+k_n},$
*ha létezik a* $\nu_{k_1+...+k_n}$ *momentum.*

**6.8. Tulajdonság.** *Ha az $X(X_1,...,X_n)$ valószínűségi vektor komponensei független valószínűségi változók, akkor*

$$\varphi_X(t_1,...,t_n)=\varphi_{X_1}(t_1)...\varphi_{X_n}(t_n), \qquad (t_1,...,t_n)\in\mathbb{R}^n.$$

**Bizonyítás.** Az értelmezés alapján, felhasználva a függetlenséget, kapjuk

$$\begin{aligned}\varphi_X(t_1,...,t_n) &= E(e^{i(t_1X_1+...+t_nX_n)})=E(e^{it_1X_1}\cdot...\cdot e^{it_nX_n})=\\ &= E(e^{it_1X_1})\cdot...\cdot E(e^{it_nX_n})=\varphi_{X_1}(t_1)\cdot...\cdot\varphi_{X_n}(t_n),\end{aligned}$$

minden $(t_1,...,t_n)\in\mathbb{R}^n$ esetén. ∎

**8. Alkalmazás.** *Számítsuk ki az $N(m_1,m_2,\sigma_1,\sigma_2,r)$ normális eloszlású $(X,Y)$ valószínűségi vektor karakterisztikus függvényét!*

*a) Ha az $X$ és $Y$ független, akkor, az előbbi tulajdonság alapján,*

$$\varphi(t_1,t_2)=e^{i(m_1t_1+m_2t_2)-\frac{1}{2}(\sigma_1^2t_1^2+\sigma_2^2t_2^2)}, \qquad (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2. \tag{6.1}$$

*Itt felhasználtuk, hogy $X$ valószínűségi változó $N(m_1,\sigma_1)$, az $Y$ pedig $N(m_2,\sigma_2)$ eloszlású.*

*b) Ha az $X$ és $Y$ nem független, akkor képezzük az $(X^*,Y^*)$ vektort,*

$$X^*=\frac{X-m_1}{\sigma_1}, \qquad Y^*=\frac{X-m_2}{\sigma_2}.$$

*Ennek sűrűségfüggvénye*

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)}, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

*Ekkor az $(X^*,Y^*)$ karakterisztikus függvénye*

$$\varphi_1(t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int\int_{\mathbb{R}^2}e^{i(xt_1+yt_2)-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)}dxdy=$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixt_1 - \frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{iyt_2 - \frac{1}{2(1-r^2)}(y-rx)^2} dydx.$$

*Az $y - rx = u$ helyettesítéssel*

$$\varphi_1(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix(t_1+rt_2) - \frac{x^2}{2}} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-r^2)}} \int_{\mathbb{R}} e^{iut_2 - \frac{u^2}{2(1-r^2)}} du$$

*Az első integrál az $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye a $t_1 + rt_2$ pontban, a második pedig az $N(0, \sqrt{1-r^2})$ eloszlású valószínűségi változóé a $t_2$ pontban. Ezért*

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_1, t_2) &= e^{-\frac{(t_1+rt_2)^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(1-r^2)t_2^2}{2}} = \\ &= e^{-\frac{t_1^2+2rt_1t_2+t_2^2}{2}}, \qquad (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

*Innen, figyelembe véve, hogy $X = \sigma_1 X^* + m_1$ és $Y = \sigma_1 Y^* + m_2$, az $(X, Y)$ karakterisztikus függvénye*

$$\varphi(t_1, t_2) = e^{i(m_1t_1+m_2t_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2t_1^2 + 2r\sigma_1\sigma_2t_1t_2 + \sigma_2^2t_2^2)}, \qquad (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2.$$

*Észrevehető, hogy ha $X$ és $Y$ független, tehát $r = 0$, akkor ez az összefüggés megegyezik (6.1)-sel.*

## 6.3. Az inverziós tétel

Az $X$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét az eloszlásfüggvény segítségével számolhatjuk ki. Felvetődik a kérdés, hogy a karakterisztikus függvény ismerete alapján következtetni lehet-e az eloszlásra. A válasz igenlő: minden eloszlásfüggvényt egyértelműen meghatároz a valószínűségi változó karakterisztikus függvénye.

**6.1. Lemma.** *Legyen $T > 0$, $a \in \mathbb{R}$ és*

$$S_1(a, T) = \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{\sin at}{t} dt.$$

*Ekkor* $|S(a,T)| \le 2$ *és*

$$\lim_{T\to\infty} S(a,T) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\, at}{t}dt = \begin{cases} 1, & ha \quad a>0, \\ 0, & ha \quad a=0, \\ -1, & ha \quad a<0, \end{cases} \tag{6.2}$$

*a konvergencia egyenletes* $|a| \ge \delta > 0$ *esetén, ha* $\delta$ *elég kicsi.*

**Bizonyítás.** Legyen

$$S(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin\, u}{u}du, \qquad x>0.$$

Az $at = x$ jelöléssel az $S_1(a,T) = S(x)$.

Bontsuk fel a $[0,x]$ intervallumot $[k\pi,(k+1)\pi]$ alakú intervallumok $(k = \overline{0,n})$ és $[n\pi, x]$ egyesítésére. Ha bevezetjük a

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin\, u}{u}du = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\, u}{n\pi+u}du$$

jelölést, $n\in\mathbb{N}$, akkor a $\sum_{n=0}^\infty c_n$ egy konvergens alternáló sor lesz, mert $(|c_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ csökkenő sorozat.

Az előbbi jelölésekkel

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k + \frac{2}{\pi}\int_{n\pi}^x \frac{\sin\, u}{u}du,$$

ha $n\pi \le x \le (n+1)\pi$. Innen

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \le S(x) \le \sum_{k=0}^{n} c_k, \text{ ha } n \text{ páros}$$

és

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \le S(x) \le \sum_{k=0}^{n-1} c_k, \text{ ha } n \text{ páratlan.}$$

Ezen egyenlőtlenségek alapján, $x > 0$-ra,

$$0 \leq S(x) \leq c_0 = 2.$$

Az $S$ páratlan függvény, tehát $|S(x)| \leq 2$, ha $x \in \mathbb{R}$. A Dirichlet képlet szerint

$$S(\infty) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{sin\, u}{u} du = 1,$$

ahonnan következik a (6.2) összefüggés és a kovergecia egyenletessége.
■

**6.2. Lemma.** *Legyen* $z, a, b \in \mathbb{R}$ *és* $T > 0$. *Ha*

$$D(T, z, a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin{(z-a)t} - \sin(z-b)t}{t} dt,$$

*akkor*

$$|D(T, z, a, b)| \leq 2,$$

*és,* $a < b$ *esetén,*

$$\lim_{T\to\infty} D(T, z, a, b) = \begin{cases} 1, & ha \quad a < z < b, \\ \frac{1}{2}, & ha \quad z = a \ vagy \ z = b, \\ 0, & \quad különben, \end{cases}$$

*a konvergencia egyenletes, ha* $|z-a| \geq \delta$, $|z-b| \geq \delta$, $\delta > 0$.

**Bizonyítás.** A bizonyítás azonnali az előbbi lemmából

$$D(T, z, a, b) = \frac{S_1(z-a, T) - S_2(z-b, T)}{2}$$

helyettesítéssel. ■

**6.1. Tétel. (Inverziós tétel)** *Ha az $X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F$, karakterisztikus függvénye $\varphi$ és $x_1 < x_2$ az $F$ két folytonossági pontja, akkor*

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t) dt. \tag{6.3}$$

**Bizonyítás.** Legyen $c > 0$ és vezessük be a következő jelölést

$$I_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t) dt.$$

A karakterisztikus függvény értelmezése alapján

$$I_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it(x-x_1)} - e^{it(x-x_2)}}{it} dF(x) dt.$$

Az $x$ szerinti integrál abszolút konvergens és a $t$ szerinti integrál határai végesek, tehát felcserélhetjük az integrálási sorrendet. Így

$$I_c = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{-c}^{0} \frac{e^{it(x-x_1)} - e^{it(x-x_2)}}{it} dt + \int_{0}^{c} \frac{e^{it(x-x_1)} - e^{it(x-x_2)}}{it} dt \right] dF(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{0}^{c} \left[ \frac{e^{-it(x-x_2)} - e^{-it(x-x_1)}}{it} + \frac{e^{it(x-x_1)} - e^{it(x-x_2)}}{it} \right] dt dF(x).$$

Az előbbi lemma jelöléseivel az Euler-képletek alapján

$$I_c = \int_{\mathbb{R}} D(c, x, x_1, x_2) dF(x).$$

Válasszuk a $\delta > 0$ értékét úgy, hogy $x_1 + \delta < x_2 - \delta$ legyen és $F$ az $]x_1 - \delta, x_1 + \delta[$ és az $]x_2 - \delta, x_2 + \delta[$ intervallumon folytonos legyen. Ekkor, az integrál additivitása miatt,

$$I_c = \int_{-\infty}^{x_1-\delta} \ldots + \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} \ldots + \int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \ldots + \int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta} \ldots + \int_{x_2+\delta}^{\infty} D(c, x, x_1, x_2) dF(x).$$

A (6.2) lemma alapján, ha $x < x_1 - \delta$ vagy $x > x_2 + \delta$, akkor

$$\lim_{c\to\infty} \int_{\infty}^{x_1-\delta} D(c, x, x_1, x_2) dF(x) = 0$$

és

$$\lim_{c\to\infty} \int_{x_2+\delta}^{\infty} D(c, x, x_1, x_2) dF(x) = 0.$$

Ha $x \in ]x_1 + \delta, x_2 - \delta[$, akkor

$$\lim_{c\to\infty} \int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} D(c, x, x_1, x_2) dF(x) = F(x_2 - \delta) - F(x_1 + \delta).$$

Ha $x \in ]x_1 - \delta, x_1 + \delta[$, akkor

$$\left| \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} D(c, x, x_1, x_2) dF(x) \right| \leq 2[F(x_1 + \delta) - F(x_1 - \delta)],$$

ha $x \in ]x_2 - \delta, x_2 + \delta[$, akkor

$$\left| \int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta} D(c, x, x_1, x_2) dF(x) \right| \leq 2[F(x_2 + \delta) - F(x_2 - \delta)].$$

Most térjünk határértékre, ha $\delta \to 0$

$$\lim_{c\to\infty} I_c = F(x_2) - F(x_1),$$

amit igazolnunk kellett. ■

Ax így meghatározott eloszlásfüggvény egyértelmű.

**6.2. Tétel.** *A karakterisztikus függvény egyértelműen meghatározza az eloszlásfüggvényt.*

**Bizonyítás.** Az $F$ folytonossági pontjaiban az eloszlásfüggvény az

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{a\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} \varphi(t) dt \tag{6.4}$$

képlettel határozható meg. A szakadási pontokban az eloszlásfüggvény értékét úgy határozzuk meg, hogy a balról folytonos legyen. ■

**9. Alkalmazás.** *Határozzuk meg a* $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ *karakterisztikus függvényhez tartozó eloszlásfüggvényt!*

*A (6.3) képlet alapján*

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - e^{-itx}}{it} \varphi(t) dt,$$

*ha $x$ az $F$ folytonossági pontja. Ezt tovább alakítva*

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin tx}{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos tx}{it} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

*vagy, figyelembe véve, hogy az első integrálban szereplő függvény páros és a másodikban páratlan,*

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

*Innen $x$ szerinti deriválással az*

$$F'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} cos\, tx e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{6.5}$$

*összefüggést kapjuk. Ha a jobboldalt parciálisan integráljuk, akkor*

$$F'(x) = \frac{\sin tx}{\pi x} e^{-\frac{t^2}{2}} \bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{\pi x} \int_0^{\infty} t \sin tx e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

*vagyis*

$$F'(x) = \frac{1}{\pi x} \int_0^\infty t \sin tx e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

*A (6.5) összefüggés $x$ szerinti ismételt deriválásával a*

$$F''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty t \sin tx e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

*képlethez jutunk, ahonnan*

$$F'(x) = -\frac{1}{x} F''(x).$$

*Nem marad más hátra, mint megoldani ezt a differenciálegyenletet az $F(\infty) = 1$ és $F(-\infty) = 0$ feltételek mellett. Így azt kapjuk, hogy*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$

*ami éppen a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.*

A karakterisztikus függvény segítségével meghatározhatjuk a sűrűségfüggvényt is.

**6.3. Tétel.** *Ha az $X$ valószínűségi változó $\varphi$ karakterisztikus függvénye abszolút integrálható, akkor $X$-nek van $f$ sűrűségfüggvénye, az folytonos és az*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt \qquad x \in \mathbb{R}$$

*alakban állítható elő.*

**Bizonyítás.** Legyen $h > 0$ és válasszuk a (6.3) összefüggésben $x_1 = x - h$ és $x_2 = x + h$-t úgy, hogy $x_1$ és $x_2$-ben $F$ folytonos legyen. Ekkor

$$F(x+h) - F(x-h) = \frac{h}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin th}{ht} e^{-itx} \varphi(t) dt.$$

Figyelembe véve, hogy $|\frac{\sin th}{th}| \leq 1$, következik

$$F(x+h) - F(x-h) \leq \frac{h}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < \infty$$

a $\varphi$ abszolút integrálhatósága miatt. Ha $h \to 0$, akkor $F(x+0) - F(x-0) = 0$, tehát $F$ folytonos.

Az $f$ meghatározásához írhatjuk

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt.$$

Az $f$ folytonosságát a következőképpen igazoljuk:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |\sin \frac{th}{2}||\varphi(t)| dt.$$

Legyen $\epsilon > 0$ és válasszuk az $A > 0$ elég nagy számot ahhoz, hogy

$$\frac{1}{\pi} \int_{|t|>A} |\varphi(t)| dt < \frac{\epsilon}{2}$$

és $h > 0$ elég kicsi számot úgy, hogy

$$\frac{1}{\pi} \int_{|t|\leq A} \left|\sin \frac{th}{2}\right| |\varphi(t)| dt < \frac{\epsilon}{2}.$$

Innen $|f(x+h) - f(x)| < \epsilon$, amit igazolni kellett. ■

## 6.4. A karakterisztikus függvény konvergenciája

Legyen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eloszlásfüggvények egy sorozata. Sokszor szükséges annak vizsgálata, hogy az $n$ nagy értékei esetén az eloszlásfüggvény hogyan viselkedik. Ehhez a vizsgálathoz nyújt segítséget a következő két tétel. Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a megfelelő karakterisztikus függvény-sorozat.

**6.4. Tétel.** *Ha az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eloszlásfüggvény-sorozat az $F$ eloszlásfüggvényhez konvergál az $F$ minden folytonossági pontjában, akkor a megfelelő $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ karakterisztikus függvény-sorozat minden véges intervallumon egyenletesen konvergál az $F$- nek megfelelő $\varphi$ karakterisztikus függvényhez.*

**Bizonyítás.** Adott az $\epsilon > 0$ rögzített szám. Válasszuk $\lambda > 0$ számot úgy, hogy $F$ a $\lambda$ és $-\lambda$ pontban folytonos legyen, $F(-\lambda) < \frac{\epsilon}{8}$ és $F(\lambda) > 1 - \frac{\epsilon}{8}$. Ekkor

$$|\int_{|x|>\lambda} e^{itx} dF(x)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

A $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ miatt létezik olyan $n_1 = n_1(\epsilon)$, hogy, minden $n > n_1$ esetén,

$$F_n(-\lambda) < \frac{\epsilon}{8}, \qquad F_n(\lambda) > 1 - \frac{\epsilon}{8}$$

és

$$\left|\int_{|x|>\lambda} e^{itx} dF_n(x)\right| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Felhasználva ezeket az egyenlőtlenségeket, írhatjuk

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \left|\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{itx} dF_n(x) - \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{itx} dF(x)\right| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Legyen $[a, b]$ egy véges intervallum és $T > 0$ úgy, hogy $[a, b] \subset [-T, T]$. Osszuk fel a $[-\lambda, \lambda]$ intervallumot $\frac{\epsilon}{8T}$-nél rövidebb részekre az $x_0, ..., x_m$ pontokkal úgy, hogy az osztópontokban az $F$ folytonos legyen:

$$-\lambda = x_0 < x_1 < ... < x_{m+1} = \lambda, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Ekkor

$$\left|\int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{itx} dF_n(x) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{itx} dF(x)\right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{itx} dF_n(x) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{itx_j} dF_n(x) \right| +$$

$$+ \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{itx_j} dF_n(x) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{itx_j} dF(x) \right| +$$

$$+ \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{itx_j} dF(x) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{itx} dF(x) \right| \leq$$

$$\leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} |e^{it(x-x_j)} - 1| dF_n(x) + \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} dF_n(x) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} dF(x) \right| +$$

$$+ \int_{x_j}^{x_{j+1}} |e^{it(x_j - x)} - 1| dF(x) \leq$$

$$\leq |t|(x_{j+1} - x_j) \left[ \int_{x_j}^{x_{j+1}} dF_n(x) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} dF(x) \right] +$$

$$+ |F_n(x_{j+1}) - F(x_{j+1})| + |F_n(x_j) - F(x_j)|.$$

Az $x_j$ pontokban az $F$ folytonos, tehát

$$\left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{itx} dF_n(x) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{itx} dF(x) \right| <$$

$$< \frac{\epsilon}{8} \left[ \int_{x_j}^{x_{j+1}} dF_n(x) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} dF(x) \right] + \frac{\epsilon}{2(m+1)},$$

minden $n \geq n_2^j$, $j = \overline{0, m}$ esetén.

Felhasználva a kapott egyenlőtlenségeket,

$$\left| \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{itx} dF_n(x) - \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{itx} dF(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m} \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{itx} dF_n(x) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{itx} dF(x) \right| <$$

$$< \frac{\epsilon}{8} \left[ \int_{-\lambda}^{\lambda} dF_n(x) + \int_{-\lambda}^{\lambda} dF(x) \right] + \frac{\epsilon}{4} < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2},$$

minden $n > n_2 = \max\{n_2^0, ..., n_2^m\}$ esetén. Így

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

minden $n > \max\{n_1, n_2\}$ és $|t| \leq T$ esetén, ahonnan

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t),$$

tehát a karakterisztikus függvény-sorozat egyenletesen konvergens. ■

**6.1. Megjegyzés.** *Az, hogy $F$ eloszlásfüggvény, lényeges feltétel.* *Legyen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az*

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \leq n, \\ 1, & ha \quad x > n \end{cases}$$

*képlettel értelmezett eloszlásfüggvény-sorozat. Határértéke 0, minden pontban, tehát nem eloszlásfüggvény. A hozzátartozó karakterisztikus függvény-sorozatnak $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi_n(t) = e^{int}$ nincs határértéke a $t = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ pontok kivételével*

A tétel fordítottja is igaz. Ennek bizonyítására szükségünk van az analízisből ismert Helly lemmára.

**6.3. Lemma. (Helly lemma)** *Ha $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem-csökkenő, egyenletesen korlátos valós függvények sorozata, akkor létezik egy konvergens részsorozata, amely pontonként egy nem-csökkenő $F$ függvényhez tart az $F$ minden folytonossági pontjában.*

**6.5. Tétel.** *Ha a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ karakterisztikus függvény-sorozat konvergál valamely, a 0 pontban folytonos $\varphi$ karakterisztikus függvényhez, akkor a megfelelő $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eloszlásfüggvény-sorozat konvergál a $\varphi$-hez tartozó $F$ eloszlásfüggvényhez az $F$ minden folytonossági pontjában.*

**Bizonyítás.** A (6.3)lemma alapján az eloszlásfüggvény-sorozatnak létezik egy $(F_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, amely pontonként egy $F$ nem-csökkenő $F$ függvényhez tart az $F$ minden folytonossági pontjában. Tudjuk, hogy egy $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény akkor eloszlásfüggvény, ha nem-csökkenő, balról folytonos és $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$. Az $F$ a szakadási pontokban mindig meghatározható úgy, hogy balról folytonos legyen. A lemma alapján csak azt kell igazolni, hogy $F(-\infty)=0$, és $F(\infty)=1$.

$F$, mint eloszlásfüggvények határértéke, a $[0,1]$ intervallumban veszi fel értékeit. Ha figyelembe vesszük, hogy nem-csökkenő, elég igazolni, hogy

$$F(\infty)-F(-\infty)=1.$$

Tegyük fel, hogy $F(\infty)-F(-\infty)=a<1$. Legyen $\epsilon>0$ úgy, hogy $0<\epsilon<1-a$. A

$$\varphi(0)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(0)=1$$

és a $\varphi$ folytonossága miatt létezik $t>0$, amelyre

$$\frac{1}{2t}\left|\int_{-t}^{t}\varphi(s)ds\right|>1-\frac{\epsilon}{2}>a+\frac{\epsilon}{2}. \tag{6.6}$$

Másrészt létezik $A>\frac{4}{\epsilon t}$ és $k_0\in\mathbb{N}$, amelyre, minden $k>k_0$ esetén,

$$a_k=F_{n_k}(A)-F_{n_k}(-A)<a+\frac{\epsilon}{4}.$$

A $\varphi_{n_k}$ karakterisztikus függvény, tehát

$$\int_{-t}^{t}\varphi_{n_k}(s)ds=\int_{-t}^{t}\int_{\mathbb{R}}e^{isx}dF_{n_k}(s)ds=\int_{\mathbb{R}}\int_{-t}^{t}e^{isx}dsdF_{n_k}(s)=$$

$$= \int_{|x|>A} \int_{-t}^{t} e^{isx} ds dF_{n_k}(s) + \int_{|x|\le A} \int_{-t}^{t} e^{isx} ds dF_{n_k}(s).$$

Könnyen beláthatjuk a következő egyenlőtlenségeket:

$$\left| \int_{-t}^{t} e^{isx} ds \right| = \left| \frac{2}{x} \sin tx \right| < \frac{2}{A},\ ha\ |x| > A,$$

$$\left| \int_{-t}^{t} e^{isx} ds \right| \le \int_{-t}^{t} ds = 2t,\ \ ha\ |x| \le A.$$

Segítségükkel írhatjuk

$$\left| \int_{-t}^{t} \varphi_{n_k}(s) ds \right| < 2t \int_{|x|\le A} dF_{n_k}(x) + \frac{2}{A} \int_{|x|>A} dF_{n_k}(x) <$$

$$< 2t[F_{n_k}(A) - F_{n_k}(-A)] + \frac{2}{A} = 2ta_k + \frac{2}{A}.$$

Ebből

$$\frac{1}{2t} \left| \int_{-t}^{t} \varphi_{n_k}(s) ds \right| < a_k + \frac{1}{tA} < a + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = a + \frac{\epsilon}{2}.$$

Határértékre térve, ha $k \to \infty$

$$\frac{1}{2t} \left| \int_{-t}^{t} \varphi(s) ds \right| \le a + \frac{\epsilon}{2}$$

ami ellentmond a (6.6) egyenlőtlenségnek, tehát $F(\infty) - F(-\infty) = 1$.

A (6.3) tétel alapján $\varphi$ az $F$-hez tartozó karakterisztikus függvény. Igazolnunk kell, hogy az $(F_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ részsorozat az F-hez konvergál.

Tételezzük fel, hogy létezik egy olyan $(F_{n_{k'}})_{k'\in\mathbb{N}}$ részsorozat, amely egy $G$ eloszlásfüggvényhez konvergál. Ez a $\varphi$-hez tartozó eloszlásfüggvény, de annak egyértelműsége miatt $G = F$. Ezzel a tételt igazoltuk. ∎

**6.2. Megjegyzés.** *A $\varphi$ origóban való folytonossága lényeges feltétel.*

*Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $[-n,n]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó-sorozat karakterisztikus függvény, illetve eloszlásfüggvénye. Ekkor*

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \le -n, \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2n}, & ha \quad -n < x \le n \\ 1, & ha \quad x > n \end{cases}$$

*és*

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin nt}{nt}.$$

*A*

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \begin{cases} 0, & ha \quad t \ne 0, \\ 1, & ha \quad t = 0 \end{cases}$$

*nem folytonos* 0*-ban.*

*Az eloszlásfüggvény határértéke $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \frac{1}{2}$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, tehát $F$ nem eloszlásfüggvény.*

# 7. Fejezet

# A nagy számok törvényei

A valószínűségről alkotott szemléletes elképzelésünket a következő tapasztalati tényre alapozzuk: ha az $A$ eseményt $n$ független kísérletből $k$ - szor figyeltük meg és ha $n$ nagy, akkor a $\frac{k}{n}$ relatív gyakoriság közel van az $A$ esemény $p$ valószínűségéhez. Ennek a ténynek az alapján építették fel a valószínűségszámítás axiómatikus elméletét. Az elmélet akkor hasznos, ha visszaigazolja a valóságot. A relatív gyakoriság és a valószínűség kapcsolatát a nagy számok törvényei világítják meg.

## 7.1. Nevezetes egyenlőtlenségek

**7.1. Tétel. (Markov egyenlőtlenség)** *Ha az $X$ valószínűségi változó értékei pozitív számok és létezik várható értéke, akkor tetszőleges $\lambda$ pozitív szám esetén*

$$P(X \geq \lambda E(X)) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

*A $\lambda E(X) = \epsilon$ jelöléssel az egyenlőtlenséget a következő alakban is írhatjuk :*

*tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén*

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E(X)}{\epsilon}.$$

**Bizonyítás.** Legyen

$$Y = \begin{cases} X, & ha \quad X \geq \epsilon, \\ 0, & ha \quad X < \epsilon. \end{cases}$$

Ekkor $E(Y) = \epsilon P(Y = \epsilon)$, tehát

$$P(X \geq \epsilon) = P(Y = \epsilon) = \frac{E(Y)}{\epsilon} \leq \frac{E(X)}{\epsilon}.$$

■

**7.2. Tétel. (Csebisev egyenlőtlenség)** *Tegyük fel, hogy az $X$ valószínűségi változónak létezik várható értéke és szórása. Ekkor tetszőleges $\epsilon > 0$ számra*

$$P(|X - E(X)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}.$$

**Bizonyítás.** Legyen $F$ az $X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) = \int_{\epsilon \leq |x - E(X)|} dF(x).$$

Az $|x - E(X)| \geq \epsilon$ miatt

$$1 \leq \frac{|X - E(X)|}{\epsilon} \qquad vagy \qquad 1 \leq \frac{[X - E(X)]^2}{\epsilon^2}.$$

Ezért

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\epsilon \leq |x - E(X)|} [x - E(X)]^2 dF(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon^2}\int_{\mathbb{R}}[x-E(X)]^2dF(x)=\frac{D^2(X)}{\epsilon^2}.$$

Innen

$$P(|X-E(X)|<\epsilon)=1-P(|X-E(X)|\geq\epsilon)\geq 1-\frac{D^2(X)}{\epsilon^2},$$

amit igazolni kellett. ■

**7.1. Megjegyzés.** *Az egyenlőlenséget az $\epsilon = k\sigma = kD(X)$ jelöléssel*

$$P(|X-E(X)|<k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2}$$

*alakban is felírhatjuk.*

**7.2. Megjegyzés.** *A Csebisev egyenlőtlenség a Markov egyenlőtlenséggel is bizonyítható, ha azt $Y=[X-E(X)]^2$ valószínűségi változóra alkalmazzuk azt.*

**7.3. Tétel. (Kolmogorov egyenlőtlenség)** *Ha $X_1,...,X_n$ független valószínűségi változó, akkor, tetszőleges $\epsilon > 0$ szám esetén,*

$$P(\max_{k=\overline{1,n}}\{\,|\sum_{j=1}^{k}[X_j-E(X_j)]\,|\,\}\geq\epsilon)\;\leq\;\frac{1}{\epsilon^2}\sum_{k=1}^{n}D^2(X_k).$$

**Bizonyítás.** Ha bevezetjük az

$$Y_j=X_j-E(X_j),\ j=\overline{1,n},\ S_k=\sum_{j=1}^{k}Y_j,\ k=\overline{1,n}$$

jelölést, akkor $E(Y_j)=0,\ j=\overline{1,n},\ E(S_k)=0,\ k=\overline{1,n}.$

Legyen

$$A=(\max_{k=\overline{1,n}}\{\,|\,S_k\,|\,\}\geq\epsilon),$$

$$A_k = ( \,|\, S_1 \,|\, < \epsilon ) \cap ... \cap ( \,|\, S_{k-1} \,|\, < \epsilon) \cap ( \,|\, S_k \,|\, \geq \epsilon),\ k = \overline{1,n},$$

és

$$A_0 = ( \,|\, S_1 \,|\, < \epsilon ) \cap ... \cap ( \,|\, S_n \,|\, < \epsilon).$$

Az $(A_i)_{i=\overline{0,n}}$ teljes eseményrendszer, mert

$$\Omega = \cup_{k=0}^{n} A_k,\ A_0 \cap A_j = \emptyset,\ j = \overline{1,n}$$

és

$$A = (\max_{k=\overline{1,n}} \{ \,|\, S_k \,|\, \} \geq \epsilon) = \cup_{k=1}^{n} A_k,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

Innen az $S_n$ szórása

$$D^2(S_n) = E(S_n^2) - [E(S_n)]^2 = \sum_{k=0}^{n} P(A_k) E(S_n^2 \,|\, A_k).$$

Rögzített $k$ esetén

$$E(S_n^2 \,|\, A_k) = E[(S_k + \sum_{j=k+1}^{n} Y_j)^2 \,|\, A_k] =$$

$$= E(S_k^2 \ + \ 2 \sum_{j=k+1}^{n} S_k Y_j \ + \ 2 \sum_{\substack{i,j=k+1,\\ i<j}}^{n} Y_i Y_j \ + \sum_{j=k+1}^{n} Y_j^2 \,|\, A_k) =$$

$$= E(S_k^2 \,|\, A_k) \ + \ 2 \sum_{j=k+1}^{n} E(S_k Y_j \ |\, A_k) \ + \ 2 \sum_{\substack{i,j=k+1,\\ i<j}}^{n} E(Y_i Y_j \ |\, A_k) +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{n} E(Y_j^2 \,|\, A_k).$$

Ha $j < k$, akkor $E(Y_j \,|\, A_k) = E(Y_j) = 0$ és így

$$E(S_k Y_j \,|\, A_k) = E(S_k \,|\, A_k) E(Y_j \,|\, A_k) = 0,$$

$$E(Y_iY_j \mid A_k) = E(Y_i \mid A_k)E(Y_j \mid A_k) = 0, \; ha \;\; i < j < k,$$

és

$$E(S_n^2 \mid A_k) = E(S_k^2 \mid A_k) + \sum_{j=k+1}^{n} E(Y_j^2 \mid A_k) \geq$$

$$\geq E(S_k^2 \mid A_k) \geq E(\epsilon^2 \mid A_k) = \epsilon^2,$$

ha $k > 1$. Az $S_n$ szórására kapjuk, hogy

$$D^2(S_n) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)E(S_n^2 \mid A_k) \geq \sum_{k=0}^{n} P(A_k)\epsilon^2 = \epsilon^2 P(A) =$$

$$= \epsilon^2 P(\max_{k=\overline{1,n}}\{\mid S_k \mid\} \geq \epsilon).$$

Innen

$$P(\max_{k=\overline{1,n}}\{\mid S_k \mid\} \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{j=1}^{n} D^2(X_j),$$

amit igazolni akartunk. ■

## 7.2. A nagy számok gyenge törvényei

**7.4. Tétel. (A nagy számok Bernoulli-féle törvénye)** *Jelöljük egy $p > 0$ valószínűségű $A$ esemény gyakoriságát $n$ független kísérletben $X_n$-nel. Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

**Bizonyítás.** Mivel $X_n$ binomiális eloszlású, $E(X_n) = np$ és $D^2(X_n) = npq$. A Csebisev egyenlőtlenség alapján

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) = P(|X_n - np| \geq n\epsilon) \leq \frac{npq}{n^2\epsilon^2} = \frac{pq}{\epsilon^2 n}.$$

Ha $n \to \infty$, akkor annak a valószínűsége, hogy a relatív gyakoriság az $A$ esemény valószínűségétől tetszőleges rögzített $\epsilon$-nál többel térjen el, zéróhoz konvergál. ∎

Ezt a tételt a relatív gyakoriságra vonatkozó nagy számok törvényének is nevezik. A későbbiekben egy másik bizonyítást is adunk erre a tételre.

A nagy számok törvényeit általánosabban is megfogalmazhatjuk. Legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valószínűségi változó-sorozat és $h_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel értelemben mérhető függvény, mely minden változóra nézve szimmetrikus.

**7.1. Értelmezés.** *Az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozatról azt mondjuk, hogy* **teljesíti a nagy számok gyenge törvényét** *vagy* **az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozatra érvényes a nagy számok gyenge törvénye**, *ha létezik az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat, amelyre*

$$h_n(X_1, ..., X_n) - a_n \xrightarrow{p} 0.$$

Ezzel egyenértékű értelmezés a következő:

**7.2. Értelmezés.** *Az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változósorozatra* **érvényes a nagy számok gyenge törvénye**, *ha létezik az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat úgy, hogy, minden $\epsilon > 0$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} P(|h_n(X_1, ..., X_n) - a_n| < \epsilon) = 1.$$

**7.3. Megjegyzés.** *A leggyakrabban a $h_n(x_1, ..., x_n) = \frac{x_1+...+x_n}{n}$ függvényt használjuk. Ha létezik $E(X_i)$, $i = \overline{1,n}$, $a_n = \frac{E(X_1)+...+E(X_n)}{n}$ és*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \frac{E(X_1) + ... + E(X_n)}{n}\right| < \epsilon\right) = 1,$$

*minden $\epsilon > 0$ esetén, akkor az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozatra érvényes a nagy számok gyenge törvénye.*

A továbbiakban a nagy számok törvényeinek különböző alakjait bizonyítjuk be.

**7.5. Tétel. (Markov tétele)** *Ha az* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valószínűségi változó-sorozatra teljesül a*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D^2(\sum_{k=1}^{n}X_k)=0$$

*feltétel, akkor, minden* $\epsilon>0$ *számra,*

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)\right|<\epsilon\right)=1,$$

*vagyis a valószínűségi változó-sorozatra érvényes a nagy számok gyenge törvénye.*

**Bizonyítás.** Alkalmazzuk a Csebisev egyenlőtlenséget az $X=\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ valószínűségi változóra. Ekkor

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)\right|<\epsilon\right)\geq 1-\frac{1}{n^2\epsilon^2}D^2(\sum_{k=1}^{n}X_k),$$

ahonnan határértékre térve, ha $n\to\infty$, a kért összefüggést kapjuk. ■

**7.6. Tétel. (Csebisev tétele)** *Ha az* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valószínűségi változó-sorozat egyenletesen korlátos, vagyis* $D^2(X_n)\leq L<\infty$, $n\in\mathbb{N}$ *és páronként független valószínűségi változókból áll akkor, minden* $\epsilon>0-ra$,

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)\right|<\epsilon\right)=1,$$

*vagyis a valószínűségi változó-sorozatra érvényes a nagy számok gyenge törvénye.*

**Bizonyítás.** A valószínűségi változók függetlensége miatt

$$\frac{1}{n^2}D^2\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D^2(X_k)\leq\frac{L}{n},$$

tehát alkalmazhatjuk a Markov tételt. ■

**7.7. Tétel. (Poisson tétele)** *Ha az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat páronként független valószínűségi változókból áll, amelyek eloszlása*

$$p_n=P(X_n=1),\ q_n=P(X_n=0),\ p_n+q_n=1,\ p_n\in]0,1[,$$

*akkor a valószínűségi változó-sorozatra érvényes a nagy számok gyenge törvénye.*

**Bizonyítás.** A Csebisev tételt alkalmazzuk $L=\frac{1}{4}$ esetén, mert $D^2(X_n)=p_nq_n\leq\frac{1}{4}$. ■

**7.4. Megjegyzés.** *Ezt a tételt a következőképpen is megfogalmazhatjuk: Egy kísérlet független ismétlése során az $A$ esemény k-adik ismétléskor $p_k$ valószínűséggel következik be. Akkor*

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-\frac{p_1+...+p_n}{n}\right|<\epsilon\right)=1,\ \epsilon>0,$$

*ahol $m$ az $A$ esemény gyakorisága.*

**7.5. Megjegyzés.** *Ha a Poisson tételben $p_n=p$ és $q_n=q$, akkor Bernoulli tételét kapjuk.*

**7.8. Tétel. (Hincsin tétele)** *Ha az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat azonos eloszlású, páronként független valószínűségi változókból* *áll, amelyeknek létezik véges várható értéke $E(X_n) = a < \infty$, akkor, minden $\epsilon > 0$ esetén,*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a\right| < \epsilon\right) = 1,$$

*vagyis a valószínűségi változó-sorozatra érvényes a nagy számok gyenge törvénye.*

**Bizonyítás.** Legyen $\varphi$ az $X_n$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye és $\varphi_n$ az $Y_n = \frac{X_1+...+X_n}{n}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Ekkor

$$\varphi_n(t) = \left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A $\varphi(t)$ sorbafejtésével

$$\varphi(t) = 1 + \varphi'(0)t + o(t) = 1 + ait + o(t),$$

mert $\varphi'(0) = ai$. Innen

$$\varphi_n(t) = \left[1 + ai\frac{t}{n} + o(\frac{t}{n})\right]^n.$$

Logaritmáljuk és $z = ai\frac{t}{n} + o(\frac{t}{n})$ hatványai szerint sorbafejtük:

$$\ln\varphi_n(t) = n\ln(1+z) = n(z - \frac{z^2}{2} + ...) = n(ai\frac{t}{n} + o(\frac{t}{n})).$$

Határértékre térve

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = e^{iat}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ez az

$$F(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \le a \\ 1, & ha \quad x > a \end{cases}$$

eloszlásfüggvényű valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. A (6.5) tétel értelmében az $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat eloszlásban az állandó $a$ valószínűségi változóhoz tart. A (5.7) tulajdonság szerint az $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat sztochasztikusan is $a$-hoz tart, vagyis, ha $\epsilon > 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a| < \epsilon) = 1,$$

azaz a valószínűségi változó-sorozatra érvényes a nagy számok gyenge törvénye. ■

Az ilyen típusú állításnak igen nagy a gyakorlati jelentősége. Ha az $X$ valószínűségi változónak létezik várható értéke és az X valószínűségi változóra független megfigyelést végzünk, akkor ezek számtani közepe, ha a nagy számok törvénye teljesül, 1-hez tetszőleges közeli valószínűséggel a várható érték körül fog ingadozni, ha a megfigyelések száma elég nagy. Tehát a megfigyelt valószínűségi változó értékeiből következtetni tudunk a várható értékre.

A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozatra érvényes legyen a nagy számok gyenge törvénye.

**7.9. Tétel. (Kolmogorov tétele)** *Az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozatra pontosan akkor érvényes a nagy számok gyenge törvényének*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)\right| < \epsilon\right) = 1,\ \epsilon > 0,$$

*alakja, ha*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{[\sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k))]^2}{n^2 + [\sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k))]^2}\right] = 0. \tag{7.1}$$

**Bizonyítás.** Legyen az

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k))$$

valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$E\left(\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2}\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2} dF_n(x).$$

A (7.1) feltétel elégséges. Valóban

$$P(|Y_n| \geq \epsilon) = P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)| \geq \epsilon) = \int_{|x|\geq\epsilon} dF_n(x) =$$

$$= \frac{1+\epsilon^2}{\epsilon^2}\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2} dF_n(x).$$

Az $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ függvény $x > 0$ esetén növekvő, tehát

$$P(|Y_n| \geq \epsilon) \leq \frac{1+\epsilon^2}{\epsilon^2}\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{x^2}{1+x^2} dF_n(x) \leq \frac{1+\epsilon^2}{\epsilon^2} E\left(\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2}\right).$$

Ha határértékre térünk és figyelembe vesszük a (7.1) összefüggést, akkor kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n| \geq \epsilon) = 0,$$

vagyis az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változókra érvényes a nagy számok gyenge törvénye.

A (7.1) feltétel szükséges is. Valóban, az $\frac{x^2}{1+x^2} < 1$ miatt írhatjuk

$$\begin{aligned} P(|Y_n| \geq \epsilon) &= \int_{|x|\geq\epsilon} dF_n(x) \geq \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{x^2}{1+x^2} dF_n(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2} dF_n(x) - \int_{|x|<\epsilon} \frac{x^2}{1+x^2} dF_n(x). \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\int_{|x|<\epsilon} \frac{x^2}{1+x^2} dF_n(x) \leq \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2} \int_{|x|<\epsilon} dF_n(x) \leq \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2} < \epsilon^2,$$

írhatjuk

$$P(|Y_n| \geq \epsilon) \geq E\left(\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2}\right) - \epsilon^2,$$

vagy

$$0 \leq E\left(\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2}\right) \leq \epsilon^2 + P(|Y_n| \geq \epsilon).$$

Ez az összefüggés tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén igaz, tehát a (7.1) feltétel teljesül. ■

## 7.3. A nagy számok erős törvényei

Ha a sztochasztikus konvergencia helyett az 1 valószínűséggel való konvegenciát állítjuk, a nagy számok erős törvényeit kapjuk.

Legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valószínűségi változó-sorozat és $h_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel értelemben mérhető függvény, mely minden változóra nézve szimmetrikus.

**7.3. Értelmezés.** *Az* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valószínűségi változó-sorozatról azt mondjuk, hogy* **teljesíti a nagy számok erős törvényét** *vagy* **az** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **valószínűségi változó-sorozatra érvényes a nagy számok erős törvénye**, *ha létezik az* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *valós számsorozat, amelyre*

$$h_n(X_1, ..., X_n) - a_n \stackrel{st1}{\to} 0.$$

Ezzel egyenértékű a következő értelmezés

**7.4. Értelmezés.** *Az* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valószínűségi változó-sorozatra* **érvényes a nagy számok erős törvénye**, *ha létezik az* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *valós számsorozat úgy, hogy*

$$P(\lim_{n\to\infty} |h_n(X_1, ..., X_n) - a_n| = 0) = 1.$$

**7.6. Megjegyzés.** *A leggyakrabban a* $h_n(x_1, ..., x_n) = \frac{x_1+...+x_n}{n}$ *függvényt használjuk. Ha létezik* $E(X_i)$, $i = \overline{1,n}$, $a_n = \frac{E(X_1)+...+E(X_n)}{n}$ *és*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \left| \frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \frac{E(X_1) + ... + E(X_n)}{n} \right| = 0 \right) = 1,$$

*akkor az* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valószínűségi változó-sorozatra érvényes a nagy számok erős törvénye.*

**7.10. Tétel. (Kolmogorov tétele)** *Ha az* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *független valószínűségi változó-sorozatra teljesül a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^2(X_n)}{n^2} < \infty$$

*feltétel, akkor*

$$P(\lim_{n\to\infty} |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)| = 0) = 1,$$

*vagyis a valószínűségi változó-sorozatra érvényes a nagy számok erős törvénye.*

**Bizonyítás.** A bizonyításban felhasználjuk a következő, az analízisből ismert, tulajdonságot:

Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat.

(∗) Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ sor konvergens, akkor az $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat 0-hoz konvergál.

A tétel bizonyításához vezessük be a következő jelöléseket:
$Y_n = X_n - E(X_n)$, $Z_n = \frac{1}{n}Y_n$. Ekkor

$$D^2(Z_n) = \frac{1}{n^2}D^2(X_n)$$

és a tétel feltétele

$$\sum_{n=1}^{\infty} D^2(Z_n) < \infty$$

alakban írható fel.

Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ sor 1 valószínűséggel konvergens. Ezért, legyen

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k, \quad A_m = \sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{m+k} - S_m|, \quad A = \inf_{m\in\mathbb{N}} A_m.$$

Meg kell mutatnunk, hogy $P(A = 0) = 1$. A $Z_n$ valószínűségi változók függetlenek, $E(Z_n) = 0$, tehát, a Kolmogorov egyenlőtlenség alapján,

$$P(\sup_{1\le k\le n} |S_{m+k} - S_m| \ge \epsilon) = P\left(\sup_{1\le k\le n}\left|\sum_{j=m+1}^{m+k} Z_j\right| \ge \epsilon\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{k=m+1}^{m+n} D^2(Z_k).$$

Innen

$$P(A_m \ge \epsilon) \le \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{k=m+1}^{\infty} D^2(Z_k),$$

de
$$P(A \geq \epsilon) \leq P(A_m \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} D^2(Z_k), m \in \mathbb{N}.$$
A tétel feltétele alapján, $P(A \geq \epsilon) = 0$ minden $\epsilon > 0$ esetén, vagyis $P(A = 0) = 1$. Így a $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ sor 1 valószínűséggel konvergens és a (*) tulajdonság szerint
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X_k)) = 0$$
1 valószínűséggel. ■

**7.11. Tétel.** *Ha az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat egyenletesen korlátos, vagyis $D^2(X_n) \leq L < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ és páronként független valószínűségi változókból áll, akkor*
$$P\left(\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) \right| = 0\right) = 1,$$
*vagyis a valószínűségi változó-sorozatra érvényes a nagy számok erős törvénye.*

**Bizonyítás.** Az előző tételt alkalmazzuk.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^2(X_n)}{n^2} \leq L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$
tehát a tétel feltétele teljesül. ■

**7.12. Tétel. (Borel tétele)** *Ha az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat páronként független valószínűségi változókból áll, amelyek eloszlása*
$$p_n = P(X_n = 1),\ q_n = P(X_n = 0),\ p_n + q_n = 1,\ p_n \in ]0, 1[,$$

*akkor a valószínűségi változó-sorozatra érvényes a nagy számok erős törvénye.*

**Bizonyítás.** A előbbi tetelt alkalmazzuk $L = \frac{1}{4}$ esetén. ■

**7.7. Megjegyzés.** *Ha $p_n = p$ és $q_n = q$, akkor ez a tétel a nagy számok Bernoulli törvényének erős alakja. Megfogalmazhatjuk a következőképpen is:*

*Jelöljük egy $p > 0$ valószínűségű $A$ esemény gyakoriságát $n$ független kísérletben $X_n$-nel. Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges, akkor*

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{X_n}{n} - p\right| = 0\right) = 1,$$

*vagyis a relatív gyakoriságok sorozata 1 valószínűséggel $p$-hez konvergál.*

A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ azonos eloszlású valószínűségi változó-sorozatra érvényes legyen a nagy számok erős törvénye.

**7.13. Tétel. (Kolmogorov tétele)** *Az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ azonos eloszlású valószínűségi változó-sorozatra akkor és csak akkor érvényes a nagy számok erős törvénye, ha létezik $E(X_n) = a < \infty$.*

**Bizonyítás.** Az elégségesség bizonyításához felhasználjuk a következő összefüggéseket:

a) Létezik $E(X_i) = a < \infty$, $i \in \mathbb{N}$, tehát $E(|X_i|) = b < \infty$.

b) Ha $F$ az $X_i$ eloszlásfüggvénye, $i \in \mathbb{N}$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_i| > n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(k < |X_i| < k+1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} kP(k < |X_i| < k+1) \le \sum_{k=1}^{\infty}\int_{k<|x|<k+1} |x|dF(x) \le b < \infty.$$

Vezessük be az $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozatot a következőképpen

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega), & ha \quad |X_n(\omega)| < n, \\ 0, & ha \quad |X_n(\omega)| \geq n. \end{cases}$$

Igazolni fogjuk, hogy az $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat teljesíti a nagy számok erős törvényét, majd azt, hogy 1 valószínűséggel egyenlő az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozattal.

Felírhatjuk, hogy

$$D^2(Y_n) = E(Y_n^2) = \int_{|x|<n} |x|^2 dF(x) \leq \sum_{k=1}^{n} k^2 P(k-1 \leq |X_i| < k),$$

ahonnan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^2(Y_n)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} P(k-1 \leq |X_i| < k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(k-1 \leq |X_i| < k) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{k^2} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{k},$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^2(Y_n)}{n^2} < 2 \sum_{k=1}^{\infty} k P(k-1 \leq |X_i| < k) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P(k-1 \le |X_i| < k) + 2\sum_{k=1}^{\infty} P(k-1 \le |X_i| < k).$$

A második összeg értéke 0, az elsőre alkalmazzuk a b) növeléseit. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^2(Y_n)}{n^2} < 2E(|X_i|) + 2 < \infty,$$

vagyis a sor konvergens. A (7.10) tétel alapján az $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat teljesíti a nagy számok erős törvényét.

Most igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} P(X_n \neq Y_n) = 0$. Ezért felírjuk

$$P(X_n \neq Y_n,\, n \ge n_0) \le \sum_{n=n_0}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} P(|X_n| \ge n) \le$$

$$\le \sum_{n=n_0}^{\infty} n \int_{n\le|x|<n+1} dF(x) \le \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{n\le|x|<n+1} |x|dF(x) = \int_{|x|\ge n_0} |x|dF(x).$$

Ha $n_0$-t elég nagyra választjuk, akkor

$$P(X_n \neq Y_n,\, n \ge n_0) \le \epsilon,$$

vagyis $\lim_{n\to\infty} P(X_n \neq Y_n) = 0$.

A szükségesség igazolásához legyen $S_n = X_1 + ... + X_n$. Tudjuk, hogy

$$\frac{X_n}{n} = \frac{1}{n}S_n - \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}S_{n-1} \stackrel{st1}{\to} 0,$$

tehát

$$P(\limsup_{n\to\infty}(|X_n| > n)) = P\left(\limsup_{n\to\infty}\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| > 1\right)\right) = 0.$$

Az $(|\frac{X_n}{n}| > 1)_{n\in\mathbb{N}}$ események függetlenek, tehát a Borel (1.3) tétele értelmében

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n) < \infty.$$

Ezért

$$E(|X_i|) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)P(k \leq |X_i| < k+1) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} kP(k \leq |X_i| < k+1) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P(|X_k| > k) < \infty,$$

tehát létezik az $E(X_i)$, $i \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

## 8. Fejezet

# Határeloszlás-tételek

Amikor valamely fizikai állandót a kísérletet végző meg akar mérni, akkor előre tudja, hogy mérési eredménye vaószínűleg nem lesz pontos; a mérési eredmény a mérendő állandótól eltér, az eltérés egy normális eloszlású véletlen mennyiség. A kísérlet eredményét ugyanis sok kis véletlen tényező befolyásolja (az eszköz beállítása, mechanikai, kémiai hatások, stb), amelyeknek nagyságát, mibenlétét a kísérletező személy nem tudja befolyásolni, sem megszüntetni.

A határeloszlás-tételek egy valószínűségi változó-sorozat eloszlásfüggvényének határértékével foglalkoznak. Ha a valószínűségi változó-sorozat határeloszlása a normális eloszlás, akkor centrális határeloszlásról beszélünk.

A centrális határeloszlás-tételek igazolják, hogy a véletlen hibák normális eloszlásúak.

## 8.1. Centrális határeloszlás-tétel.

Legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy független valószínűségi változó-sorozat és tegyük fel, hogy létezik

$$E(X_k) = m_k, \quad D^2(X_k) = \sigma_k^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\sigma_{(n)}^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2, \qquad X_{nk} = \frac{X_k - m_k}{\sigma_{(n)}},$$

és

$$X_{(n)} = \frac{1}{\sigma_{(n)}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m_k) = \sum_{k=1}^{n} X_{nk}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Az $X_{(n)}$ valószínűségi változó az $X_1 + ... + X_n$ összeg **standardizált alakja.**

Jelölje $F_n$, $F_{(n)}$ és $F_{nk}$ illetve $\varphi_n$, $\varphi_{(n)}$, és $\varphi_{nk}$ az $X_n$, $X_{(n)}$ és az $X_{nk}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét illetve karakterisztikus függvényét.

Az előbbi jelölésekkel

$$E(X_{(n)}) = 0, \quad D^2(X_{(n)}) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**8.1. Értelmezés.** *Az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat teljesíti a* **Lindenberg-feltételt**, *ha, bármely $\tau > 0$ esetén,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_{(n)}^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|<\tau\sigma_{(n)}} (x - m_k)^2 dF_k(x) = 0. \tag{8.1}$$

A Lindenberg-feltételt a következő alakban is írhatjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<\tau} x^2 dF_{nk}(x) = 0, \tag{8.2}$$

minden $\tau > 0$ esetén.

**8.1. Lemma.** *Minden $x$ valós számra igaz a következő egyenlőtlenség*

$$\left|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**Bizonyítás.** Az egyenlőtlenséget a matematikai indukció módszerével igazoljuk.

$n = 0$ esetén

$$|e^{ix} - 1| \leq \left|\int_0^x e^{it} dt\right| \leq \left|\int_0^x |e^{it}|\, dt\right| = |x|.$$

Tételezzük fel, hogy $n$-re igaz és bizonyítsuk $n+1$-re.

$$\left|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(ix)^k}{k!}\right| = \left|\int_0^x \left[e^{it} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\right] dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_0^x \left|e^{it} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\right| dt\right| \leq \left|\int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt\right| = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!},$$

tehát az egyenlőtlenség minden $n \in \mathbb{N}$-re igaz. ■

**8.1. Tétel. (Lindenberg-Feller tétel)** *Ha az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat teljesíti a Lindenberg-feltételt, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} F_{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,\ x \in \mathbb{R},$$

*vagyis az $(X_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat eloszlásban a standard normális eloszláshoz tart.*

**Bizonyítás.** Az $X_n$, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változók függetlensége miatt az $X_{nk}$, $k = \overline{1,n}$ valószínűségi változók is függetlenek és így

$$\varphi_{(n)}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{nk}(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

A (6.5) tétel értelmében elegendő igazolni, hogy $|t| < T$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{(n)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

és a konvergencia egyenletes.

Ezt három lépésben valósítjuk meg:

(i) Igazoljuk, hogy $\delta > 0$ rögzített szám esetén létezik olyan $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$, hogy

$$|\varphi_{nk}(t) - 1| < \delta, \qquad k = \overline{1,n},\ n > N.$$

Valóban,

$$\varphi_{nk}(t) - 1 = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_{nk}(x) - \int_{\mathbb{R}} dF_{nk}(x) - it \int_{\mathbb{R}} x dF_{nk}(x),$$

ahol az utolsó integrál 0, mert $E(X_{nk}) = 0$. Így

$$|\varphi_{nk}(t) - 1| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{itx} - 1 - itx\,| dF_{nk}(x).$$

A (8.1) lemmát felhasználva kapjuk, hogy

$$|\varphi_{nk}(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}} x^2 dF_{nk}(x).$$

A Lindenberg-feltétel miatt, bármely $\tau > 0$ esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, amelyre

$$\int_{|x|>\tau} x^2 d\, F_{nk}(x) < \tau^2, \qquad n > N,\ k = \overline{1,n}.$$

Ezért, minden $k = \overline{1,n}$ esetén,

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 dF_{nk}(x) = \int_{|x|\leq\tau} x^2 d\, F_{nk}(x) + \int_{|x|>\tau} x^2 d\, F_{nk}(x) \leq \tau^2 + \tau^2 \ = \ 2\tau^2.$$

Ha $\tau^2 = \frac{\delta}{T^2}$, akkor a

$$|\varphi_{nk}(t) - 1| < \delta, \qquad k = \overline{1,n},\ n > N$$

összefüggést kapjuk.

(ii) Igazoljuk, hogy $|t| < T$ esetén

$$\ln \varphi_{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} [\varphi_{nk}(t) - 1] \,+\, R_n(t),$$

ahol $\lim_{n\to\infty} R_n(t) = 0$.

Ehhez írjuk fel a $\ln(1+x)$ sorbafejtését $x = \varphi_{nk}(t) - 1$ esetén:

$$\ln \varphi_{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \ln \varphi_{nk}(t) = \sum_{k=1}^{n} \ln[1 + (\varphi_{nk}(t) - 1)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\varphi_{nk}(t) - 1] \,+\, R_n(t),$$

ahol

$$R_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} [\varphi_{nk}(t) - 1]^j.$$

Most az $R_n$-t kell megbecsülnünk.

$$|R_n(t)| \le \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{|\varphi_{nk}(t) - 1|^j}{j} \le \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{|\varphi_{nk}(t) - 1|^j}{2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_{nk}(t) - 1|^2}{2} \cdot \frac{1}{1 - |\varphi_{nk}(t) - 1|}.$$

Ha az (i)-ben $\delta = \frac{1}{2}$ értéket választunk, akkor $n > N(\frac{1}{2})$ esetén

$$|R_n(t)| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_{nk}(t) - 1|^2}{2[1 - |\varphi_{nk}(t) - 1|]} < \sum_{k=1}^{n} |\varphi_{nk}(t) - 1|^2 \le$$

$$\leq \max_{k=\overline{1,n}} |\varphi_{nk}(t) - 1| \, \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} D^2(X_{nk}) = \frac{t^2}{2} \max_{k=\overline{1,n}} |\varphi_{nk}(t) - 1|$$

mert $\sum_{k=1}^{n} D^2(X_{nk}) = 1$. Most alkalmazzuk (i)-t $\delta = \frac{2\epsilon}{T^2}$ választással. Ekkor

$$|R_n(t)| < \epsilon \quad \text{minden} \quad n > \max\left\{ N\left(\frac{1}{2}\right), N\left(\frac{2\epsilon}{T^2}\right) \right\} \quad \text{esetén.}$$

(iii) Végül igazoljuk, hogy $|t| < T$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} [\varphi_{nk}(t) - 1] = -\frac{t^2}{2} + r_n(t),$$

ahol $\lim_{n\to\infty} r_n(t) = 0$.

Ehhez végezzük el a következő átalakításokat:

$$r_n(t) = \frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} [\varphi_{nk}(t) - 1] = \frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx) dF_{nk}(x) =$$

$$= \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} D^2(X_{nk}) + \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx) dF_{nk}(x) =$$

$$= \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} x^2 dF_{nk}(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx) dF_{nk}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \left( e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) dF_{nk}(x).$$

Így

$$|\, r_n(t)| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\mathbb{R}} \left( e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) dF_{nk}(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{|x|\leq\tau} \left( e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) dF_{nk}(x) \right| +$$

$$+ \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{|x|>\tau} \left( e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) dF_{nk}(x) \right| .$$

A (8.1) lemma szerint $n = 2$-re

$$\left| \int_{|x|\leq\tau} \left( e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) dF_{nk}(x) \right| \leq \int_{|x|\leq\tau} \frac{|tx|^3}{6} dF_{nk}(x)$$

és $n = 1$-re

$$\left| \int_{|x|>\tau} \left( e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) dF_{nk}(x) \right| \leq$$

$$\leq \int_{|x|>\tau} \left( \frac{t^2x^2}{2} + \frac{t^2x^2}{2} \right) dF_{nk}(x),$$

ahonnan

$$|\, r_n(t)| \leq \frac{t^3}{6}\tau \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} x^2 dF_{nk}(x) + t^2 \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\tau} x^2 dF_{nk}(x).$$

A Lindenberg-feltétel alapján létezik olyan $n_0$ természetes szám, hogy, $n > n_0$ esetén,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\tau} x^2 dF_{nk}(x) \leq \frac{\epsilon}{2T^2}.$$

A $\tau = \frac{3\epsilon}{T^3}$ választással

$$|\, r_n(t)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ha $n > n_0$.

Az (i),(ii)és (iii) pontokat összesítve következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{(n)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

és a konvergencia egyenletes. ■

**8.2. Tétel. (Ljapunov tétele)** *Ha az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat esetén létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_{(n)}^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E(|X_k - m_k|^{2+\delta}) = 0, \tag{8.3}$$

*akkor*

$$\lim_{n\to\infty} F_{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,\ x \in \mathbb{R},$$

*vagyis az $(X_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat eloszlásban a standard normális eloszláshoz tart.*

**Bizonyítás.** Elég igazolni, hogy a (8.3) feltételből következik a Lindenberg-feltétel. Ezért írjuk

$$\frac{1}{\sigma_{(n)}^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|>\tau\sigma_{(n)}} (x-m_k)^2 dF_k(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sigma_{(n)}^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|>\tau\sigma_{(n)}} \frac{|x-m_k|^{2+\delta}}{(\tau\sigma_{(n)})^\delta} dF_k(x),$$

mert $|x - m_k| > \tau\sigma_{(n)}$ miatt

$$\frac{|x-m_k|^\delta}{(\tau\sigma_{(n)})^\delta} > 1.$$

Tehát

$$\frac{1}{\sigma_{(n)}^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|>\tau\sigma_{(n)}} (x-m_k)^2 dF_k(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\tau^\delta \sigma_{(n)}^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|>\tau\sigma_{(n)}} |x-m_k|^{2+\delta} dF_k(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\tau^\delta} \frac{1}{\sigma_{(n)}^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E(|x-m_k|^{2+\delta}).$$

Mindkét oldalon határértékre térve, amikor $n \to \infty$, következik, hogy a Lindenberg-feltétel teljesül. ■

**8.3. Tétel.** *Tegyük fel, hogy az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat minden tagja azonos eloszlású valószínűségi változó és létezik $E(X_n) = a < \infty$ és $D^2(X_n) = \sigma^2 < \infty$. Akkor az $(X_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat eloszlásban a standard normális eloszláshoz tart, vagyis*

$$\lim_{n\to\infty} F_{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

**Bizonyítás.** Ebben az esetben a Lindenberg feltétel a következő alakú lesz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma^2} \int_{|x-a|>\tau\sigma\sqrt{n}} (x-a)^2 dF(x) = 0,$$

ahol $F$ az $X_n$ eloszlásfüggvénye. Jelen esetben ez teljesül minden $\tau > 0$ esetén. ■

**8.1. Megjegyzés.** *A centrális határeloszlás-tételek értelmében, ha nagyon sok olyan független valószínűségi változó összegét vesszük, amelyek sztochasztikusan kicsik, akkor az összeg aszimptótikusan normális eloszlású lesz. Ez a gondolat magyarázza a tételek gyakorlati fontosságát. A gyakorlati alkalmazásokban igen sok esetben az a helyzet, hogy valamely jelenségre nagyon sok, de önmagában véve jelentéktelen véletlen ok hat. Ezek összegződéséből kerekedik ki az a normális eloszlású hatás, mely a jelenségre jellemző. Például elektromos energiát* *termelő erőműben megfigyelhető, hogy a nap valamely időpontjában az energiafogyasztás értéke egy az időpontre jellemző állandó érték körül ingadozik és az ingadozások nagysága normális eloszlású. Ennek az a magyarázata, hogy az energiát sok, önmagában véve elhanyagolható mennyiségű energiát igénylő fogyasztó használja fel. Az adott időpontban egy felhasználó vagy használ energiát vagy nem, de az egyes fogyasztók ezt egymástól függetlenül teszik.*

## 8.2. Moivre-Laplace tételek

Tekintsük az $X$ binomiális eloszlású valószínűségi változót, melynek eloszlása

$$X\begin{pmatrix} k \\ P(B_{n,k}) \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}},$$

ahol $P(B_{n,k}) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $p \in ]0,1[$, $q = 1-p$. A $P(B_{n,k})$ valószínűségekre szeretnénk aszimptótikus becslést adni, ha $k$ úgy konvergál a végtelenhez, hogy $]n(p-\epsilon), n(p+\epsilon)[$ intervallumnál szűkebb intervallumban változhat. A Moivre -Laplace tétel segítségével, rögzített $p$ esetén, könnyen kaphatunk közelítőleg pontos numerikus értéket az egyébként nehezen kiszámítható $P(B_{n,k})$ számokra.

**8.4. Tétel. (Moivre-Laplace tétel)** *Ha*

$$a \leq \frac{|k-np|}{\sqrt{npq}} \leq b$$

*vagyis korlátos, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{npq}P(B_{n,k})}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(k-np)^2}{npq}}} = 1,\ k = \overline{0,n}.$$

*Ha bevezetjük az*

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \qquad \textit{és} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

*jelölést, akkor az előbbi állítással egyenértékű a következő:*

$$P(B_{n,k}) \simeq \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

*ahol* $\simeq$ *aszimptótikus egyenlőséget jelent.*

**Bizonyítás.** Felhasználjuk a Stirling-formulát, amely tetszőleges pozitív egész $n$ esetén

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\theta_n},$$

ahol $|\theta_n| \leq \frac{1}{12n}$. Felhasználjuk továbbá, hogy

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \;\; ha \;\; |x| < 1.$$

A Stirling-képlet alapján

$$P(B_{n,k}) = \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \cdot \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}} e^{\theta_{n,k}} p^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} e^{\theta_{n,k}},$$

ahol $\theta_{n,k} = \theta_n - \theta_k - \theta_{n-k}$,

$$|\theta_{n,k}| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right).$$

Először igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \to \infty} e^{\theta_{n,k}} = 1. \tag{8.4}$$

Ehhez felhasználjuk, hogy $x$ korlátos, $a \leq x \leq b$,

$$k = np + x\sqrt{npq} \geq np + a\sqrt{npq} = np\left(1 + a\sqrt{\frac{q}{np}}\right)$$

és

$$n - k = nq - x\sqrt{npq} \geq nq - b\sqrt{npq} = nq\left(1 - b\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).$$

Innen

$$|\theta_{n,k}| \leq \frac{1}{12n}\left[1 + \frac{1}{p(1 + a\sqrt{\frac{q}{np}})} + \frac{1}{q(1 - b\sqrt{\frac{p}{nq}})}\right]$$

tehát $\lim_{n\to\infty} \theta_{n,k} = 0$ és így (8.4) teljesül.

Most igazoljuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n.k}}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = 1, \tag{8.5}$$

ahol

$$A_{n,k} = \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}.$$

Az $A_{n,k}$ logaritmálásával

$$\ln A_{n,k} = -k \ln \frac{k}{np} - (n-k)\ln \frac{n-k}{nq} =$$

$$= -(np + x\sqrt{npq})\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (nq - x\sqrt{npq})\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).$$

Ha $n$ elég nagy, akkor

$$\left|x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right| < 1, \qquad \left|x\sqrt{\frac{q}{np}}\right| < 1.$$

A logaritmus sorbafejtése után

$$\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)=x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{1}{2}\frac{qx^2}{np}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),$$

illetve

$$\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)=-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{1}{2}\frac{px^2}{nq}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Így

$$\ln A_{n,k}=-(np+x\sqrt{npq})\left[x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{1}{2}\frac{qx^2}{np}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right]-$$

$$-(nq-x\sqrt{npq})\left[-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{1}{2}\frac{px^2}{nq}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right],$$

ahonnan

$$\ln A_{n,k}=-\frac{x^2}{2}+O(\frac{1}{\sqrt{n}}),$$

amiből következik a (8.5) összefüggés.

Utolsó lépésként igazoljuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{npq}}. \tag{8.6}$$

Ehhez felírhatjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\sqrt{\frac{np}{k}}\sqrt{\frac{nq}{n-k}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\sqrt{\frac{1}{1+x\sqrt{\frac{q}{np}}}\cdot\frac{1}{1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}}}.$$

Figyelembe véve, hogy az utolsó tényező 1-hez tart, a (8.6) egyenlőséget kapjuk.

A tétel következik a (8.4), (8.5) és (8.6) összefüggésből. ■

**8.2. Megjegyzés.** *A Moivre-Laplace tétel általánosítható multinomiális vektorváltozó esetére is.*

Az előbbi tételben a $P(X = k)$ valószínűségekre adtunk becslést. A Moivre-Laplace tétel globális alakja a

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq k \leq b} P(B_{n,k})$$

valószínűség becslését adja, ahol $0 < a < b$.

**8.5. Tétel. (Moivre-Laplace tétel globális alakja)** *Ha $X$ binomiális eloszlású valószínűségi változó,*

$$X \begin{pmatrix} k \\ P(B_{n,k}) \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}},$$

*ahol $P(B_{n,k}) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $p \in ]0,1[$, $q = 1-p$, és $0 < a < b$, akkor*

$$\lim_{n \to \infty} \left[ P\left( a \leq \frac{k-np}{\sqrt{npq}} < b \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] = 0$$

*vagy*

$$P\left( a \leq \frac{k-np}{\sqrt{npq}} < b \right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

**Bizonyítás.** Legyen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ azonos eloszlású valószínűségi változó-sorozat a következőképpen

$$P(X_n = 1) = p, \;\; P(X_n = 0) = q, \;\; p + q = 1, \;\; p \in ]0,1[.$$

Ekkor $E(X_k) = p$, $D^2(X_k) = pq$ és $X = X_1 + ... + X_n$. Ha

$$X_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} X_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - p}{\sqrt{npq}} = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

és $F_{(n)}$ a megfelelő eloszlásfüggvény, akkor a (8.3) tétel szerint

$$\lim_{n\to\infty} F_{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

Mivel $X_{(n)}$ értékei az $\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ törtek, azért

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

ahonnan a tétel állítása következik. ■

**8.1. Következmény.** *Az*

$$L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

*Laplace-függvény segítségével*

$$P(a \leq \frac{k-np}{\sqrt{npq}} < b) \simeq L(b) - L(a),\ a < b.$$

**10. Alkalmazás.** *Gyakorlati feladatokban igen gyakran szükséges a $P(a < k < b)$ alakú valószínűség kiszámítása.*

*Ehhez felírhatjuk az*

$$P(a < k < b) = P\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} < \frac{k-np}{\sqrt{npq}} < \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

*összefüggést, ahonnan*

$$P(a < k < b) \simeq L\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - L\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

**11. Alkalmazás.** *Adjunk becslést a*

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\epsilon\right)$$

*valószínűségre!*

*Az előbbi alkalmazás eredményét felhasználva, kapjuk*

$$P\left(\left|\frac{k}{n})-p\right|<\epsilon\right)=P(np-n\epsilon<k<np+n\epsilon)\simeq$$

$$\simeq L\left(\frac{n\epsilon}{\sqrt{npq}}\right)-L\left(-\frac{n\epsilon}{\sqrt{npq}}\right)=2L\left(\frac{n\epsilon}{\sqrt{npq}}\right)=2L\left(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

**12. Alkalmazás.** *Határozzuk meg, hogy a binomiális modell esetén, legalább hányszor kell egy kísérletet elvégezni ahhoz, hogy*

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\epsilon\right)\geq\alpha,$$

*ahol* $\alpha\in]0,1[$ *adott!*

*Az előbbi alkalmazás eredményét felhasználva a*

$$2L\left(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=\frac{1}{2}\alpha$$

*egyenlet megoldása (n-re) lesz a keresett ismétlésszám.*

**13. Alkalmazás.** *Igazoljuk, hogy, ha X hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó, vagyis*

$$X\left(\begin{array}{c}k\\P(B_{n,k})\end{array}\right)_{k=\overline{0,n}},$$

*ahol* $P(B_{n,k}) = \frac{C_a^b C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $n \leq \min(a, b)$ *és* $a + b \to \infty$, *akkor*

$$P(B_{n,k}) \simeq \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$$

*és*

$$P(a < k < b) \simeq L\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - L\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

*Ha* $a + b \to \infty$ *akkor a hipergeometrikus eloszlás a binomiális eloszláshoz tart, innen következnek az előbbi összefüggések.*

## 8.3. Egyéb határeloszlás-tételek

**8.6. Tétel.** *Ha az* $X$ *egy* $n$ *szabadságfokú* $\chi^2$*- eloszlású valószínűségi változó, akkor a standardizált*

$$Y = \frac{X - E(X)}{D(X)}$$

*valószínűségi változó aszimptótikusan standard normális eloszlású, ha* $n \to \infty$.

**Bizonyítás.** Ha $X$ egy $n$ szabadságfokú $\chi^2$- eloszlású valószínűségi változó, akkor $n$ darab standard normális eloszlású valószínűségi változó négyzetösszegeként állítható elő. Legyenek ezek $X_1, ..., X_n$. Az $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változó-sorozat független, azonos eloszlású valószínűségi változóból áll, tehát alkalmazható rá a (8.3) tétel. $E(X_n^2) = 1$,

$$D^2(X_n) = E(X_n^4) - [E(X_n^2)]^2 = 3 - 1 = 2,$$

tehát

$$X_{(n)} = \frac{1}{\sigma_{(n)}}\sum_{k=1}^{n}[X_k^2 - E(X_k^2)]$$

és $\sigma^2_{(n)} = \sum_{k=1}^n D^2(X_k^2)$. Ezért $X_{(n)} = \frac{N-n}{\sqrt{2n}}$ és így a (8.3) tétel szerint

$$\lim_{n\to\infty} F_{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,\ x \in \mathbb{R},$$

amit bizonyítani kellett. ■

**8.7. Tétel.** *Ha az $X$ egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, akkor az*

$$Y = \frac{X - E(X)}{D(X)}$$

*valószínűségi változó aszimptótikusan standard normális eloszlású lesz, ha $\lambda \to \infty$.*

**Bizonyítás.** A (6.5) tétel alapján, elég igazolni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Tudjuk, hogy $E(X) = D^2(X) = \lambda$ és

$$\varphi_Y(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Viszont $Y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}X - \sqrt{\lambda}$, tehát

$$\varphi_Y(t) = e^{-i\sqrt{\lambda}t}\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) = e^{\lambda(e^{it/\sqrt{\lambda}}-1)-i\sqrt{\lambda}t}.$$

Innen

$$\ln\varphi_Y(t) = \lambda\left[\frac{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}{1!} + \frac{i^2\frac{t^2}{\lambda}}{2!} + O\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}\right)\right] - i\sqrt{\lambda}t = -\frac{t^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

vagy, határértékre térve $\lim_{\lambda\to\infty}\varphi_Y(t) = -\frac{t^2}{2}$. ■

# Irodalomjegyzék

[1] **Adams Malcolm, Guillemin Victor:** *Measure Theory and Probability*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin (1996);

[2] **Agratini Octavian:** *Capitole speciale de matematici,* Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca (1996);

[3] **Baróti György, Bognár Jánosné, Fejes Tóth Gábor, Mogyoródi József:** *Valószínűségszámítás*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (1997);

[4] **Blaga Petru:** *Calculul probabilităţilor, Culegere de probleme*, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj (1984);

[5] **Blaga Petru, Rădulescu Marcel:** *Calculul probabilităţilor*, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj (1987).

[6] **Cseke Vilmos:** *A valószínűségszámítás és gyakorlati alkalmazásai*, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár (1982);

[7] **Denkinger Géza:** *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest (1978);

[8] **Denkinger Géza:** *Valószínűségszámítás gyakorlatok*, Tankönyvkiadó, Budapest (1980);

[9] **Feller William:** *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*, Műszaki Kiadó, Budapest (1978);

[10] **Mihoc Ion:** *Calculul probabilităţilor 'c si statistică matematică,* Partea I, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca (1995);

[11] **Mihoc Ion:** *Calculul probabilităţilor 'c si statistică matematică,* Partea II, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca (1996);

[12] **Mogyoródi József, Somogyi Árpád:** *Valószínűségszámítás I, II*, ELTE Könyvkiadó, Budapest (1990);

[13] **Prékopa András:** *Valószínűselmélet műszaki alkalmazásokkal*, Műszaki Kiadó, Budapest (1972);

[14] **Rényi Alfréd:** *Probability theory*, Akadémiai Kiadó, Budapest (1970);

[15] **Rényi Alfréd:** *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest (1989);

[16] **Resnick Sidney I.:** *A Probability Path*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin (1999);

[17] **Shyryaev A.:** *Probability* , Springer, (1995);