Topologie - enunţuri

E01

1.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$o mulţime mărginită superior şi $u \in \mathbb{R}$.
a) Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) $\sup A = u$
(ii) $\forall a \in A \Rightarrow a \leq u$ şi $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists a \in A$ astfel ca $a > u - \varepsilon$
(iii) $\forall a \in A \Rightarrow a \leq u$ şi $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ astfel ca $a_n \to u$
b) $\sup A \leq u \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \leq u)$
c) $\sup A < u \Rightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a < u)$
d) $\sup A > u \Leftrightarrow (\exists a \in A, u < a)$
e) $\sup A \geq u \Leftrightarrow (\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A,$ astfel ca $\exists \lim_{n\to\infty} a_n \geq u)$
Formulaţi propoziţiile analoage pentru inf A.

1.2. Fie mulţimile $X, Y, Z, A \subseteq X,\ B \subseteq Y,\ C \subseteq Z$ şi aplicaţiile $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$. Să se arate că:
a) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, cu "=" dacă f este surjectivă.
b) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$, cu "=" dacă f este injectivă.
c) $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.
d) $f^{-1}(\complement B) = \complement f^{-1}(B)$.
e) Dacă f este injectivă atunci $f(\complement A) \subseteq \complement f(A)$.
f) Dacă f este surjectivă atunci $\complement f(A) \subseteq f(\complement A)$.

1.3. Să se scrie formulele pentru imaginea şi contraimaginea reuniunii şi intersecţiei unei familii de mulţimi printr-o aplicaţie.

1.4. Fie $X = \{a, b, c, d, e\}$ şi familiile de mulţimi:
$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$,
$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$,
$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.
Să se precizeze care dintre acestea sunt topologii şi să se scrie familiile vecinătăţilor punctelor e, c şi a.

1.5. Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie şi $\mathcal{H}$ o topologie pe Y. Să se arate că familia $\{f^{-1}(H) : H \in \mathcal{H}\}$ este topologie pe X.

E02

2.1. în spaţiul topologic $\mathbb{R}$ cu topologia naturală $\mathcal{T}_0$ să se arate că $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

2.2. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, $A, B \subseteq X, \{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(X)$.Să se arate că:
a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
b) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$
c) $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} \overline{A_i}$
d) $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$
Pentru $X = \mathbb{R},\ \mathcal{T} = \mathcal{T}_0$ să se dea exemple de incluziuni stricte.

2.3. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, $A \subseteq X$. Un punct $x \in X$ se numeşte punct de acumulare al mulţimii A dacă $\forall V \in V(x) \Rightarrow A \cap V \backslash \{x\} \neq \emptyset$.

Notând cu A' mulţimea punctelor de acumulare să se arate că $\overline{A} = A \cup A'$. Este mulţimea A' închisă?

2.4. Fie X o mulţime şi aplicaţia $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ cu proprietăţile

a) $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$ b) $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$ c) $A \subseteq \varphi(A)$ d) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$.

$\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$. Atunci există o (unică) topologie pe X astfel încât $\varphi(A) = \overline{A}, \forall A \subseteq X$. (Kuratowski)

2.5. Să se arate că dacă A, B sunt submulţimi ale unui spaţiu topologic atunci

$\text{int}(A \cap B) = (A) \cap \text{int}(B),\ \text{int}(A \cup B) \supseteq \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$

incluziunea putând fi strictă.

2.6. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, A o submulţime oarecare a lui X, G o submulţime deschisă şi F o submulţime închisă.Să se arate că:

a) $\overline{\overline{A} \cap G} = \overline{A \cap G}$

b) $\text{int}(F \cup \text{int}(A)) = \text{int}(F \cup A)$

c) Arătaţi că dacă relaţia de la a) are loc $\forall A \subseteq X$ atunci mulţimea G este deschisă.

E03

3.1. Să se determine topologia generată pe $\mathbb{R}$ de familia de mulţimi $\mathcal{A} = \{[a, a+1] : a \in R\}$.

3.2. Fie $X = \{a, b, c\}$. Să se arate că familia $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ nu este bază pentru nici o topologie pe X.

3.3. Fie $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. a) Să se construiască o subbază pentru topologia discretă pe X care să nu fie bază. b) Să se găsească o subbază cu un număr minim de mulţimi pentru topologia discretă, fiecare mulţime având două elemente.

E04

4.1. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi $A \subseteq Y \subseteq$ X. Să se arate că :

$\overline{A}_{\mathcal{T}_Y} = \overline{A} \cap Y$. Are loc o formulă similară pentru interior?

4.2. Fie X, Y spaţii topologice şi $Z := X \times Y$ dotat cu topologia produs. Să se arate că dacă $A \subseteq X, B \subseteq Y$ atunci:

a) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

b) $\text{int}(A \times B) = \text{int}(A) \times \text{int}(B)$

c) $\text{fr}(A \times B) = (\text{fr}(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \text{fr}(B))$.

4.3. În spaţiul topologic $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0\ )$ se consideră $A := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Să se calculeze $\overline{A}$, $\text{int}(A),\ \text{ext}(A),\ \text{fr}(A)$. Să se calculeze apoi aceleaşi mulţimi în spaţiul $\mathbb{Q}$ dotat cu topologia indusă de $\mathcal{T}_0$.

E05

5.1. Fie X, Y spaţii topologice şi $\mathcal{S}$ o subbază pentru topologia lui Y. Să se arate că o aplicaţie $f : X \to Y$ este continuă ddacă $\forall S \in \mathcal{S}$

$\Rightarrow f^{-1}(S)$ este deschisă în X.

5.2. Fie X, Y spaţii topologice, $A \subseteq X$, $x_0 \in A$, şi aplicaţia $f : X \to Y$. Să se arate că dacă f este continuă în x_0 atunci $f|_A : A \to Y$ este continuă în x_0 . Dacă A este deschisă atunci are loc şi reciproca.

5.3. Fie X, Y spaţii topologice, $x \in X$ şi aplicaţia $f : X \to Y$. Dacă $\mathcal{B}_0$ este o bază de vecinătăţi a punctului x iar $\mathcal{C}_0$ este o bază de vecinătăţi a punctului $f(x)$, să se arate că f este continuă în x dacă şi numai dacă: $\forall C \in \mathcal{C}_0 \exists B \in \mathcal{B}_0$ astfel ca $f(B) \subseteq C$.

Să se deducă definiţia $\varepsilon{-}\delta$ a continuităţii pentru o aplicaţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alegând ca sisteme fundamentale de vecinătăţi familiile intervalelor centrate în punctele x respectiv $f(x)$.

5.4. Fie X şi Y spaţii topologice. O aplicaţie $f : X \to Y$ se numeşte î*nchisă* (respectiv deschisă) dacă $\forall A \subseteq X$ închisă (respectiv deschisă) $\Rightarrow f(A)$ închisă (respectiv deschisă).

Să se dea exemple de funcţii :

a) continue care nu sunt nici închise nici deschise.

b) închise şi continue care nu sunt deschise.

5.5. Fie X, Y spaţii topologice şi aplicaţia $f : X \to Y$. Să se arate că f este continuă ddacă $\forall A \subseteq X \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Să se caracterizeze funcţiile cu proprietatea: $\forall A \subseteq X \Rightarrow f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

5.6. Fie X, Y spaţii topologice şi aplicaţiile (numite *proiecţii)*

$p_1 : X \times Y \to X,\ p_2 : X \times Y \to Y,\ p_1(x, y) := x,\ p_2(x, y) := y, \forall (x, y) \in X \times Y$.

Să se arate că:

a) Aplicaţiile p_1 şi p_2 sunt continue şi deschise.

b) Pentru $X = Y = \mathbb{R}$ cu topologia naturală, p_1 nu este închisă.

c) Un şir de puncte $(x_n\ , y_n\ )_{n\in\mathbb{N}}$ converge la (x, y) în topologia produs dacă şi numai dacă $x_n \to x$ şi $y_n \to y$.

d) Dacă T este un spaţiu topologic, o aplicaţie $f : T \to X \times Y$ este continuă într-un punct dacă şi numai dacă $p_1 \circ f$ şi$p_2 \circ f$ sunt continue în acel punct.

5.7. Să se arate că aplicaţiile "$+$","$\cdot$": $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt continue ($\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ fiind dotat cu topologia produs). Să se deducă faptul că dacă $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu topologic, $x_0 \in X$ şi $f, g : X \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue în x_0 atunci $f + g$ şi $f \cdot g$ sunt continue în x_0

5.8. Fie $X = \{a, b\}$ şi $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$.

a) Arătaţi că în spaţiul topologic $(X, \mathcal{T})$ şirul $a, b, a, b, a, ...$

este convergent către b dar nu converge către a.

b) Spaţiul topologic $(X, \mathcal{T})$ are aceleaşi şiruri convergente ca şi spaţiul topologic $(X, \mathcal{T}_1\ )$ unde $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$ (topologia indiscretă) şi ambele spaţii sunt $(\aleph_0 I)$. Comparaţi cu §5.12.

E06

6.1. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic T1, $A \subseteq X$, $x \in X$.

Să se arate că x este punct de acumulare pentru A ddacă $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, mulţimea $V \cap A$ este infinită.

6.2. Fie $X = \mathbb{R}$ şi $\mathcal{T}$ topologia conumărabilă pe X. Să se arate că:

a) $x_n \to x$ ddacă $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ implică $x_n = x$.(Adică şirurile convergente coincid cu cele staţionare).

b) $\forall A \subseteq X$, A nenumărabilă $\Rightarrow \overline{A} = X$.

c) $(X, \mathcal{T})$ este spaţiu T1 dar nu este T2.

d) Aderenţa mulţimii $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ nu poate fi caracterizată secvenţial.

e) Funcţia $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$, $f(x) = x$,$(x \in \mathbb{R})$ este secvenţial continuă dar nu este continuă.

6.3. Fie X, Y spaţii topologice Y fiind Hausdorff şi $f, g : X \to Y$ două aplicaţii continue. Să se arate că mulţimea $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ este închisă.

6.4. Arătaţi dacă pe mulţimea X există două topologii Hausdorff şi $(\aleph_0 I)$ pentru care şirurile convergente sunt aceleaşi , atunci cele două topologii sunt egale.(A se compara cu #5.8.)

E07

7.1. Fie (X, d) un spaţiu semimetric, $x_0 \in X, r > 0$.

a) Să se arate că $B[x_0, r]$ este o mulţime închisă şi $\overline{B(x_0, r)} \subseteq B[x_0, r]$.

b) Dacă d este metrica discretă atunci $\mathcal{T}_d$ este topologia discretă iar pentru $r = 1$ incluziunea precedentă este strictă (dacă X are mai mult de un punct).

c) Este topologia indiscretă generată de o semimetrică? Dar topologia conumărabilă?

7.2. Fie (X, d) un spaţiu semimetric. Să se arate că topologia $\mathcal{T}_d$ este Hausdorff ddacă d este metrică.

7.3. Fie $(X, d), (X', d')$ spaţii semimetrice şi o aplicaţie $f : X \to X'$. Aplicaţia f se numeşte *uniform continuă* dacă $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ astfel încât $\forall x, y \in X$ cu $d(x, y) < \delta$ implică $d'(f(x), f(y) < \varepsilon$.

Aplicaţia f se numeşte L-lipschitziană , unde $L\ \in\mathbb{R}$, $L \geq 0$, dacă $\forall x, y \in X$ are loc inegalitatea $d'(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$.

Să se exprime continuitatea funcţiei f în termeni ε-δ şi să se deducă faptul că :

f lipschitziană $\Rightarrow$ f uniform continuă $\Rightarrow$ f continuă.

7.4. Fie $(X', d'), (X'', d'')$ spaţii semimetrice. Să se arate că topologia produs pe $X = X' \times X''$ este generată de semimetrica $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, $d((x', x\jmath), (y', y\jmath)) = d'(x', y') + d''(x'', y'')$.

Să se găsească şi alte semimetrici care generează topologia produs. Să se deducă faptul că topologia produs în $\mathbb{R}^2$ este genera tă de metrică euclidiană.

7.5. Fie (X, d) un spaţiu semimetric. Să se arate că aplicaţia

$d : X \times X \to \mathbb{R}$ este continuă în raport cu topologia produs pe $X \times X$.

7.6. Fie d_1, d_2 semimetrici pe mulţimea X. d_1 şi d_2 se vor numi *echivalente* dacă $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$.

a) Să se arate că d_1 , d_2 sunt echivalente dacă şi numai dacă aplicaţia identică $1_X : (X, T_{d_1}) \to (X, T_{d_2})$ este omeomorfism.

b) Dacă d este o (semi)metrică pe X atunci $d/(1+d)$ este o (semi)metrică echivalentă cu d. (Deci orice semimetrică este echivalentă cu o semimetrică mărginită!).

c) Fie $X = \mathbb{R}, d(x,y) = |x-y|, d\prime(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Să se arate că d' este o metrică echivalentă cu d şi totuşi $(\mathbb{R}, d')$ nu este complet.

7.7. Două (semi)metrici d_1 , d_2 pe mulţimea X se numesc *uniform echivalente* dacă aplicaţia identică $1_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$ este un *omeomorfism uniform* (adică este uniform continuă şi are inversa uniform continuă).

a) Să se arate că dacă (X, d_1) este complet iar d_2 este uniform echivalentă cu d_1 atunci (X, d_2) este complet.

b) Fie d_1 , d_2 două (semi)metrici pe X astfel încât (X, d_1) şi

(X, d_2) au aceleaşi şiruri fundamentale. Sunt (semi)metricile uniform echivalente? Dar echivalente?

7.8. Fiie X o mulţime nevidă. Notăm cu $B(X)$ mulţimea funcţiilor reale, mărginite definite pe X şi fie $\rho : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}$,

$\rho(f,g) := sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$.

Să se arate că $(B(X), \rho)$ este un spaţiu metric complet. (De remarcat faptul că în $B(X)$ convergenţa unui şir de funcţii în sensul metricii ρ revine la convergenţa uniformă. Acesta este motivul pentru care de obicei ρ poartă numele de *metrică* uniformă).

7.9. Fie (X_1, d_1), (X_2, d_2) spaţii semimetrice. O aplicaţie $f : X_1 \to X_2$ se numeşte *izometrie* dacă $d_2(f(x), f(y))) = d_1(x, y)$, $\forall x, y \in X_1$.

Să se arate că dacă f este o izometrie bijectivă şi (X_1, d_1) este complet atunci (X_2, d_2) este complet.

7.10. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $a \in X$.

a) Să se arate că aplicaţia $\varphi : X \to B(X)$definită prin

$\varphi(x) := f_x$, $(x \in X)$, unde $f_x : X \to \mathbb{R}$, $f_x(u) := d(x, u) - d(a, u)$,

este corect definită şi este izometrie. ($B(X)$ este dotată cu metrica uniformă).

b) Să se deducă următoarea teoremă a lui Hausdorff:

Pentru orice spaţiu metric (X, d) *există un spaţiu metric complet* (Y, ρ) *şi o izometrie* $\varphi : X \to Y$ *astfel încât* $\overline{\varphi(X)} = Y$.

(Un astfel de spaţiu metric complet (Y, ρ) se numeşte *completatul* spaţiului iniţial (X, d), şi se arată uşor că este unic "până la o izometrie". Identificând spaţiile metrice izometrice se poate spune că: *orice spaţiu metric este conţinut într-un unic spaţiu metric complet în care este dens.*)

7.11. Fie (X, d) un spaţiu semimetric, şi (x_n) un şir fundamental în X. Să se arate că şirul (x_n) este convergent dacă şi numai dacă el conţine un subşir convergent.

7.12. Fie $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât : a) $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

b) f este crescătoare

c) $f(x + y) \le f(x) + f(y)$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}_+$;

d) f este continuă în 0.

Să se arate că dacă (X, d) este un spaţiu metric, atunci $f \circ d$ este o metrică echivalentă cu d. Este aceasta uniform echivalentă?

Să se arate că c) poate fi înlocuită cu condiţia mai tare dar mai uşor de verificat ca f să fie concavă.

7.13. Fie (X, d) un spaţiu semimetric complet, $(Y, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic Hausdorff iar $f : X \to Y$ o aplicaţie continuă.

Să se arate că dacă (F_n) este un şir descendent de mulţimi închise, nevide din X cu $diam(F_n) \to 0$, atunci $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(F_n)$.

7.14. Fie (X, d) un spaţiu metric, (Y, d') un spaţiu metric complet, $A \subseteq X$ densă (adică $\overline{A} = X$) şi $f : A \to Y$ uniform continuă. Să se arate că există o unică prelungire uniform continuă $\overline{f} : X \to Y$ a lui f.

Să se arate pe un exemplu că prelungirea poate să nu existe dacă f este numai continuă.

E08

8.1. Să se arate că dacă într-un spaţiu topologic $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir convergent către x atunci mulţimea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ este compactă.

8.2. Fie (X, d) un spaţiu semimetric şi $Y \subseteq X$. Să se arate că Y este precompactă dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists F \subseteq Y$ finită astfel încât $Y \subseteq \bigcup_{y\in F} B(y, \varepsilon)$. Să se deducă faptul că mulţimea Y este precompactă dacă şi numai dacă spaţiul semimetric $(Y, d|_{Y\times Y})$ este precompact.

8.3. Fie spaţiul metric $X = B([0,1]) = \{x : [0,1] \to \mathbb{R} : x$ mărginită$\}$ dotat cu metrica uniformă ($\rho(x,y) = \sup\{|x(t) - y(t)| : t \in [0,1]\}$).

Să se arate că mulţimea $Y = \{y \in Y : \rho(y,0) \leq 1\}$ este mărginită şi închisă dar nu este (pre)compactă.

8.4. Fie X şi Y spaţii topologice şi $f : X \to Y$ continuă. Să se arate că dacă X este secvenţial compact atunci $f(X)$ este secvenţial compact.

8.5. *(Teorema lui Cantor).* Dacă (X,d) este spaţiu semimetric compact iar (Y,d') este spaţiu semimetric atunci orice aplicaţie continuă $f : X \to Y$ este uniform continuă.

8.6. a) Fie $(X,\mathcal{T})$ un spaţiu semimetrizabil. Să se arate că X este compact dacă şi numai dacă orice submulţime infinită a lui X are cel puţin un punct de acumulare.*(Bolzano-Weierstrass)*

b) Fie $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},...\}$ şi $\mathcal{T}$ topologia generată de familia $\mathcal{A}$. Să se arate că $(X,\mathcal{T})$ nu este compact deşi verifică propritatea de la a).

8.7. Fie (X,d) un spaţiu semimetric şi $A,B \subseteq X$, nevide disjuncte. Să se arate că dacă A este închisă şi B compactă atunci

$\inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} > 0$. Dacă ambele mulţimi sunt compacte atunci infimul precedent este atins. Să se dea un exemplu de mulţimi închise disjuncte în $\mathbb{R}$ pentru care acest infim nu este atins.

8.8. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi Y_1, Y_2 submulţimi compacte. Să se arate că:

a) $Y_1 \cup Y_2$ este submulţime compactă.

b) Dacă X este spaţiu Hausdorff, $Y_1 \cap Y_2$ este submulţime compactă.

c) Dacă X este o mulţime infinită, a,b două elemente distincte din X şi $\mathcal{T} = \{G \subseteq X : X\backslash G$ este finită$\} \cup \{G \subseteq X : a \notin G, b \notin G\}$, atunci mulţimile $Y_1 = X\backslash\{a\}$, $Y_2 = X\backslash\{b\}$ sunt compacte dar $Y_1 \cap Y_2$ nu este compactă.

8.9. Să se arate că dacă X este spaţiu topologic compact şi Y este spaţiu topologic Hausdorff atunci orice bijecţie continuă $f : X \to Y$ este un omeomorfism.

E9

9.1. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spaţiu topologic. Două mulţimi A,B din X se numesc *separate* dacă $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Să se arate că o submulţime $Y \subseteq X$ este conexă dacă şi numai dacă Y nu poate fi exprimată ca reuniune a două mulţimi nevide separate.

9.2. Se consideră funcţia $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = sin(1/x)$. Să se arate că următoarele spaţii topologice dotate cu urma topologiei euclidiene din $\mathbb{R}^2$ au proprietăţile menţionate:

a) $G = \{(x,f(x)) : x \in (0,1]\}$ este conex.

b) $\overline{G}$ este spaţiu conex dar nu este local conex şi nu este conex prin arce.

c) $\overline{G} \cup ([0,1] \times \{1\})$ este spaţiu conex prin arce dar nu este local conex.

9.3. Să se arate că o mulţime *deschisă* $A \subseteq \mathbb{R}^m$ este conexă dacă şi numai dacă $\forall a,b \in A$ există o linie poligonală de extremităţi a şi b. Să se deducă faptul că pentru mulţimile *deschise* din spaţiul euclidian, conexitatea şi conexitatea prin arce coincid.

9.4. Să se arate că un spaţiu topologic $(X,\mathcal{T})$ este conex dacă şi numai dacă $\forall A \subseteq X, \emptyset \neq A \neq X \Rightarrow fr(A) \neq \emptyset$.

9.5. Să se arate că pentru $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, spaţiile euclidiene $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}^m$ nu sunt omeomorfe.

9.6. Să se arate că dacă $A \subseteq \mathbb{R}^2$ este cel mult numărabilă atunci mulţimea $\mathbb{R}^2\backslash A$ este conexă.

9.7. Utilizând faptul că $\mathbb{R}$ este local conex să se deducă structura mulţimilor deschise din $\mathbb{R}$: orice mulţime deschisă din $\mathbb{R}$ se reprezintă în mod unic ca reuniune cel mult numărabilă de intervale deschise disjuncte.

E10

10.1. Să se arate că într-un spaţiu topologic o mulţime A este rară dacă şi numai dacă există o mulţime deschisă G astfel încât $A \subseteq fr(G)$.

10.2. O mulţime A dintr-un spaţiu topologic $(X,\mathcal{T})$ se numeşte *mulţime de tip G_δ* dacă A se poate reprezenta ca intersecţie numă rabilă de mulţimi deschise; A se numeşte *mulţime de tip F_σ* dacă A se poate reprezenta ca reuniune numărabilă de mulţimi închise.

a) Să se arate că într-un spaţiu semimetric orice mulţime închisă este de tip G_δ şi orice mulţime deschisă este de tip F_σ .

b) $\mathbb{Q}$ nu este mulţime de tip G_δ în $\mathbb{R}$.

10.3. Considerăm $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic (Y, d) un spaţiu semi metric, $x_0 \in X$ şi aplicaţia $f : X \to Y$. Definim aplicaţia $\omega_f : X \to [0, \infty]$ prin $\omega_f(x) = \inf\{\operatorname{diam} f(V) : V \in \mathcal{V}(x)\}$.

(ω_f se numeşte *oscilaţia* funcţiei f). Să se arate că:

a) f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă $\omega_f(x_0) = 0$.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, mulţimea $\{x \in X : \omega_f(x) < \lambda\}$ este deschisă.

c) Mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei f este de tip G_δ.

10.4. Există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ având mulţimea punctelor de continuitate $\mathbb{Q}$? Dar $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$? (v.#26.4).

10.5. Să se arate că orice spaţiu metric complet, nevid şi fără puncte izolate este nenumărabil. Să se deducă: $\operatorname{card} \mathbb{R} > \aleph_0$.

(Un punct al unei mulţimi se numeşte *izolat* dacă nu este punct de acumulare al acesteia.)

10.6. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu metric complet şi $f_i : X \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ aplicaţii continue astfel încât $\forall x \in X$, mulţimea $\{f_i(x) : i \in I\}$ este mărginită. Să se arate că $\exists G \subseteq X$ deschisă nevidă şi $\exists M \in \mathbb{R}$ astfel încât $\forall x \in G, \forall i \in I, |f_i(x)| \leq M$.

(Acest rezultat poartă numele de "principiul mărginirii uniforme").

E14

11.1. a) Pentru $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, spaţiul topologic $(X, \mathcal{T})$ nu este metrizabil.

b) Fie X=$\mathbb{R}$, şi $\mathcal{V}_n(x) = \begin{cases} (x - 1/n, x + 1/n) & \text{dacă } x \neq 0 \\ (-1/n, 1/n)\backslash\{1/k : k \in \mathbb{N}\} & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$, atunci $\{V_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ constituie un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui $x \in X$ pentru o topologie $\mathcal{T}$ iar $(X, \mathcal{T})$ nu este metrizabil.

11.2. Fie $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{G \subseteq \mathbb{R} : 0 \notin G$ sau $\complement G$ este cel mult numărabilă$\}$. Să se arate că:

a) X este spaţiu T4.

b) X nu este compact.

c) X nu este metrizabil.(Se va arăta că punctul 0 nu are un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi).

11.3. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic. Să se arate că:

a) Dacă $\mathcal{T}$ are o bază numărabilă atunci X este separabil.

b) Dacă X este spaţiu semimetrizabil separabil atunci topologia sa are bază numărabilă.

c) Dacă X este semimetrizabil separabil iar $Y \subseteq X$ atunci Y este separabil (în raport cu toplogia indusă). Să se dea un exemplu prin care să se arate că semimetrizabilitatea spaţiului este esenţială.

(În terminologia clasică un spaţiu topologic cu bază numărabilă se spune că satisface *a doua axiomă a numărabilităţii* -sau *axioma* $(\aleph_0 II)$-)

11.4. a) Fie X un spaţiu topologic semimetrizabiul. Să se arate că dacă orice funcţie reală continuă $f : X \to \mathbb{R}$ este mărginită atunci X este compact.

b) Să se construiască un exemplu de spaţiu topologic necompact astfel încât orice funcţie reală continuă este mărginită (chiar constantă).

(Un spaţiu topologic cu proprietatea de la a) se numeşte *pseudocompact*).

11.5. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic semimetrizabil. Să se arate că X este compact dacă şi numai dacă orice semimetrică d care îi induce topologia este mărginită.

E12

12.1. Fiind date $A \subseteq \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ şi $u \in \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$, să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $\sup A = u$

(ii) $\forall a \in A \Rightarrow a \leq u$ şi $\forall u' < u \exists a' \in A$ astfel ca $a' > u'$

(iii) $\forall a \in A \Rightarrow a \leq u$ şi $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ astfel ca $a_n \to u$.

Formulaţi caracterizările similare pentru $\inf A$.

12.2. Fie $(x_n\ )_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n\ )_{n\in\mathbb{N}}$ şiruri de numere reale astfel încât $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător având limită $+\infty$. Să se arate că:

$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$

(Generalizare a lemei *Stolz-Cesaro*).

12.3. Fie $\mathcal{T}_s = \{\overleftrightarrow{\mathbb{R}}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{[-\infty, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.$\mathcal{T}_s$ este topologie pe $\overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ (numită *topologia superioară a dreptei reale extinse*). $(X, \mathcal{T})$ fiind un spaţiu topologic şi $x_0 \in X$ să se arate că o funcţie $f : (X, \mathcal{T}) \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ este continuă în x_0 dacă şi numai dacă:

$\limsup_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. (adică ddacă f este *s.s.c.* în x_0)

(În mod analog se defineşte *topologia inferioară a dreptei* $\mathcal{T}_i$, şi se obţine caracterizarea *i.s.c*).

12.4. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale cu proprietatea $x_{n+m} \leq x_n + x_m, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Să se arate că în $\overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{n}$.

12.5. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic compact şi $f : X \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ o aplicaţie inferior semicontinuă. Să se arate că $\exists\ x_0 \in X$ astfel încât $f(x_0) = \inf f(X)$. (Generalizarea teoremei lui *Weierstrass*).

12.6. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, $A \subseteq X$ şi $f : X \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \in X \backslash A \end{cases}$ (*funcţia caracteristică* a mulţimii A).

Să se arate că

a) f este i.s.c. $\Leftrightarrow$ A deschisă .

b) f este s.s.c $\Leftrightarrow$ A este închisă.

12.7. Să se arate că dacă X este un spaţiu topologic şi $f_i : X \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ sunt funcţii i.s.c. şi $g_i : X \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ funcţii s.s.c. $(i \in I)$ atunci $\sup_{i\in I} f_i$ este o funcţie i.s.c. iar $\inf_{i\in I} g_i$ este o funcţie s.s.c.

12.8. Să se arate că dacă (X, d) este un spaţiu metric, şi $f : X \to [a, b] \subseteq \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ este o funcţie i.s.c. atunci există un şir crescător de funcţii continue având limita punctuală f.

(Problema se poate reduce la cazul $[a, b] = [0, 1]$, unde se poate lua $f_n(x) = \inf\{f(z)+nd(x, z) : z \in X\}$; f_n este n-lipschitziană).