Teoria măsurii - enunţuri

17.1. Fie X o mulţime şi $A_n \in \mathcal{P}(X)$, $(n \in \mathbb{N})$. Se notează:
$\limsup A_n = \{x \in X : \{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$ este infinită$\}$
$\liminf A_n = \{x \in X : \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x \in A_n\}$.
Să se arate că:
a) $\limsup A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$, $\liminf A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{k\geq n} A_k$
b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
c) Să se calculeze $\liminf A_n$ şi $\limsup A_n$ în cazul unui şir monoton de mulţimi.

17.2. Fie X o mulţime. Se notează cu χ_A *funcţia caracteristică* ataşată unei submulţimi $A \subseteq X$, $\chi_A : X \to \{0,1\}$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \in X \backslash A \end{cases}$.
Să se stabilească următoarele proprietăţi:
a) $A \subseteq B \Longleftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$; $A = B \Longleftrightarrow \chi_A = \chi_B$
b) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$; $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \max\{\chi_A \cdot \chi_B\}$,
$\chi_{\complement A} = 1 - \chi_A$, $\chi_{A\Delta B} = |\chi_A - \chi_B|$
c) $\chi_{\limsup A_n} = \limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n}$, $\chi_{\liminf A_n} = \liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n}$.

17.3. Fie X o mulţime, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ astfel încât $\cup\mathcal{A} = X$.
Să se arate că $\mathcal{A}$ este algebră de mulţimi dacă şi numai dacă $(\mathcal{A}, \Delta, \cap)$ este inel cu unitate.

17.4. a) Să se arate că familia mulţimilor boreliene din $\mathbb{R}^m$ coincide cu σ-algebra generată de familia mulţimilor compacte.
b) Să se arate că :
$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\} = \sigma\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

17.5. Să se arate că nu există σ-algebre având o infinitate numărabilă de elemente.

18.1. Să se arate că dacă μ este o măsură pe σ-algebra $\mathcal{A}$ atunci:
$\forall A, B \in A \Rightarrow \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

18.2. Să se arate că dacă μ este o măsură pe σ-algebra A şi $A_n \in A$ $(n \in \mathbb{N})$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$ atunci $\mu(\limsup A_n) = 0$.

18.3. Fie μ o măsură pe σ-algebra A şi $A_n \in A$ $(n \in \mathbb{N})$.
Să se arate că $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$ iar dacă $\mu(X) < \infty$ atunci $\mu(\limsup A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

19.1. Să se precizeze care dintre axiomele măsurii exterioare sunt verificate de următoarele funcţii de mulţime $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$
a) $\varphi(A) = 1$
b) $\varphi(A) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } A = \varnothing \\ 1 & \text{dacă } A = X \\ 2 & \text{dacă } A = \{a\} \text{ sau } A = \{b\} \end{cases}$, pentru $X = \{a, b\}$
c) $\varphi(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{card}(A \cap \{1, 2, ..., n\})$, pentru $X = \mathbb{N}$.

19.2. Fie φ o măsură exterioară pe mulţimea X şi $A, B \subseteq X$ astfel încât una dintre mulţimi este φ-măsurabilă. Să se arate că:
$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

19.3. Fie X o mulţime şi $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, $\varphi(A) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } A = \varnothing \\ 1 & \text{dacă } A \neq \varnothing \end{cases}$
Arătaţi că φ este măsură exterioară şi $\mathcal{M}_\varphi = \{\emptyset, X\}$.

19.4. Pentru $A \subseteq \mathbb{R}^m$ şi $x \in \mathbb{R}^m$ se notează $x + A = \{x + a : a \in A\}$ (translaţia mulţimii A cu vectorul x). Să se arate că dacă φ este măsura exterioară Lebesgue din $\mathbb{R}^m$ atunci:
a) $\varphi(x + A) = \varphi(A)$
b) $A \in \mathcal{L} \Rightarrow x + A \in \mathcal{L}$
(Aceste proprietaţi sunt cunoscute sub denumirea de *invarianţa la translaţii* a măsurii exterioare Lebesgue respectiv a măsurabilităţii Lebesgue în $\mathbb{R}^m$. Se arată la fel că φ este *invariantă la simetrii* adică $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \Rightarrow \varphi(A) = \varphi(-A)$ şi
$\forall A \in \mathcal{L} \Rightarrow -A \in \mathcal{L}$, unde $-A = \{-a : a \in A\}$).

19.5. Să se arate că dacă φ este o măsură exterioară pe mulţimea X

$A_n \subseteq X$ (n $\in \mathbb{N}$) astfel încât $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(A_n\ ) < \infty$ atunci $\varphi(\limsup A_n\ ) = 0$.
(Borel-Cantelli).

19.6. Fie $\mathcal{A}$ o σ-algebră pe mulţimea X şi μ o măsură finită pe $\mathcal{A}$.

Să se arate că relaţia ρ pe $\mathcal{A}$, $A\rho B \iff \mu(A\Delta B) = 0$ este o relaţie de echivalenţă.

Notând cu $\hat{A}$ clasa de echivalenţă a lui $A \in \mathcal{A}$ şi cu $\widehat{\mathcal{A}}$ mulţimea claselor de echivalenţă, să se arate că aplicaţia $d : \widehat{\mathcal{A}} \times \widehat{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$, $d(\hat{A}, \hat{B}) = \mu(A\Delta B)$ este corect definită şi că $(\widehat{\mathcal{A}}, d)$ este un spaţiu metric complet.

19.7. Fie A o σ-algebră pe X şi μ o măsură pe A. Notăm $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{P}(X) : \exists B \in \mathcal{A}$ astfel încât $N \subseteq B, \mu(B) = 0\}$. Să se arate că familia $\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$ este o σ-algebră iar aplicaţia $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$, $\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$ este corect definită şi este o măsură *completă* care prelungeşte pe μ.

20.1. Fie H un hiperparalelipiped închis din $\mathbb{R}^m$ şi $A \subseteq \mathbb{R}^m$ astfel încât $\mathrm{int}(H) \subseteq A \subseteq H$. Să se arate că $A \in \mathcal{L}$şi $\lambda(A) = \lambda(H)$.

20.2. Fie $E \subseteq [0, 1]$ o mulţime avind măsura exterioară Lebesgue nenulă (în particular putând avea $E = [0, 1]$). Pe E se consideră relaţia de echivalenţă $x\rho y \iff x-y \in \mathbb{Q}$. Se consideră un sistem complet de reprezentanţi $A \subseteq E$ pentru această relaţie de echivalenţă. Să se arate că mulţimea A nu este măsurabilă Lebesgue.(Acesta este celebrul *exemplu al lui Vitali de mulţime nemăsurabilă Lebesgue*).

20.3. Să se arate că pentru orice $\varepsilon > 0$ $\exists G$ submulţime deschisă şi densă în $\mathbb{R}$ astfel încât $\lambda(G) \leq \varepsilon$.

20.4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime măsurabilă Lebesgue având măsura finită. Să se arate că aplicaţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ este continuă.

20.5. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime măsurabilă Lebesgue având măsura finită nenulă şi$0 < \alpha < 1$. Să se arate că:

a) $\exists U \subseteq \mathbb{R}$ interval deschis astfel încât $\lambda(A \cap U) \geq \alpha\lambda(U)$.

b) $\exists \varepsilon > 0$ astfel încât $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq A - A = \{x - y : x, y \in A\}$.

20.6. Fie $\mathcal{C}$ familia reuniunilor finite de intervale disjuncte compacte nedegenerate din $\mathbb{R}$ şi aplicaţia$T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definită prin

$T(\bigcup\limits_{k=1}^{n} [a_k, b_k]) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} ([a_k, a_k + (b_k - a_k)/3] \cup [b_k - (b_k - a_k)/3, b_k])$.

Definim $K_0 = I = [0, 1]$, $K_1 = T(K_0)$, ..., $K_n = T(K_{n-1})$, $(n \in \mathbb{N})$ şi $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$

Mulţimea K este cunoscută sub denumirea de *mulţimea triadică a lui Cantor*. Să se arate că:

a) $K_n = \bigcup\limits_{\beta_k\in\{0,2\}} (\frac{\beta_1}{3^1} + \frac{\beta_2}{3^2} + ... + \frac{\beta_n}{3^n} + \frac{1}{3^n} \cdot I)$

b) K este compactă

c) $x \in K \iff \exists \alpha_i \in \{0, 2\}$ $(i \in \mathbb{N})$ astfel încât $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i/3^i$

d) $\mathrm{card}\, K = \mathrm{card}\, \mathbb{R}$

e) K este mulţime perfectă (i.e. $K = K'$)

f) $\lambda(K) = 0$.

20.7. Să se arate că pentru orice mulţime măsurabilă Lebesgue A din $\mathbb{R}^m$ există B_1 ,B_2 mulţimi boreliene astfel încât $B_1 \subseteq A \subseteq B_2$ şi $\lambda(B_2 \backslash B_1) = 0$; în plus B_1 poate fi aleasă de tip F_σ iar B_2 de tip G_δ . Să se deducă faptul că A se poate reprezenta ca reuniune a unei mulţimi boreliene cu o mulţime de măsură Lebesgue nulă.

20.8. Dacă X este un spaţiu topologic metrizabil şi μ este o măsură finită pe $\mathcal{B}(X)$ atunci μ este regulată.

21.1. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură $Y \in \mathcal{A}$, şi $f : X \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ o funcţie $\mathcal{A}$-măsurabilă. Să se arate că:

a) $\mathcal{A}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ este o σ-algebră.

(Spaţiul cu măsură $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu|_{\mathcal{A}_Y})$ se numeşte se *spaţiul cu măsură indus* pe Y)

b) $f|_Y : Y \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ este $\mathcal{A}_Y$ -măsurabilă.

c) Dacă $g : Y \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ este o aplicaţie $\mathcal{A}_Y$ -măsurabilă atunci $\exists f : X \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-măsurabilă astfel încât $f|_Y = g$.

21.2. Să se arate că orice aplicaţie continuă $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ este măsurabilă Lebesgue. Mai general, dacă $(X, \mathcal{A})$ este un spaţiu măsurabil şi $\mathcal{T}$ o topologie astfel încât $\mathcal{T} \subseteq A$ şi $f : X \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ este o funcţie continuă atunci f este $\mathcal{A}$-măsurabilă.

21.3. Să se arate că dacă $f : X \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ este $\mathcal{A}$-măsurabilă iar $u : \overleftrightarrow{\mathbb{R}} \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ este boreliană atunci $u \circ f$ este măsurabilă.

(Se va vedea ulterior că prin compunerea a două funcţii măsurabile Lebesgue nu se obţine neapărat o funcţie măsurabilă).

21.4. Fie $f : (0, 2/\pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin(1/x)$. Să se arate că f este măsurabilă (în raport cu spaţiul măsurabil indus de măsura Lebesgue) şi să se calculeze măsura Lebesgue a mulţimii $\{x \in (0, 2/\pi) : f(x) < 0\}$.

21.5. Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil, $Y \in \mathcal{A}$ şi aplicaţia $f : X \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$.

Să se arate că $f|_Y : Y \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ este $\mathcal{A}_Y$ -măsurabilă dacă şi numai dacă $\chi_Y \cdot f$ este $\mathcal{A}$-măsurabilă.

21.6. Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil şi $A_k \in \mathcal{A}$ $(k \in \mathbb{N})$ astfel încât $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k = X$. Să se arate că o aplicaţie $f : X \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ este $\mathcal{A}$-măsurabilă dacă şi numai dacă $\forall k \in \mathbb{N}$ $f|_{A_k}$ este $\mathcal{A}_{A_k}$-măsurabilă.

21.7. Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil şi $f : X \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$. Să se arate că:

a) Dacă f este $\mathcal{A}$-măsurabilă şi $c \in \mathbb{R}$ atunci $\{x \in X : f(x) = c\} \in \mathcal{A}$.

b) Dacă $f(X)$ este cel mult numărabilă atunci are loc şi reciproca proprietăţii de la a).

c) Să se găsească un exemplu de funcţie nemăsurabilă Lebesgue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) = c\} \in \mathcal{L}$.

21.8. Să se arate că funcţiile monotone, funcţiile derivate şi funcţiile cu variaţie mărginită sunt măsurabile Lebesgue (sunt chiar boreliene).

21.9. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ nemăsurabilă Lebesgue şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in A \\ -x & \text{dacă } x \in X \setminus A \end{cases}$. Să se arate că f nu este măsurabilă Lebesgue.

21.10. Fie $K = \{\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i/3^i : \alpha_i \in \{0, 2\}\}$ mulţimea lui Cantor şi aplicaţia $f : K \to [0, 1]$, $f(\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i/3^i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i/2^{i+1}$.

Să se arate că:

a) Aplicaţia f este crescătoare, surjectivă, continuă, neinjectivă.

b) f are o unică prelungire $\tilde{f} : [0, 1] \to [0, 1]$ continuă şi crescătoare.

c) Definind $g : [0, 1] \to [0, 2], g(x) = \tilde{f}(x) + x$, g este un omeomorfism. (g se numeşte *funcţia lui Cantor*).

d) $\lambda(g(K)) = 1$. (Prin urmare proprietatea unei mulţimi din $\mathbb{R}$ de a avea măsură Lebesgue nulă nu este topologică!).

e) Dacă $B \subseteq g(K)$ este o mulţime nemăsurabilă Lebesgue (o astfel de mulţime există conform construcţiei lui Vitali) atunci $g^{-1}(B)$ este măsurabilă Lebesgue dar nu este boreliană. (Prin urmare incluziunea $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$ este strictă iar măsura $\lambda|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ nu este completă.)

21.11. Să se construiască o aplicaţie măsurabilă Lebesgue $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi o aplicaţie continuă $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $h \circ u$ să nu fie măsurabilă Lebesgue.

21.12. Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil şi $f_n : X \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ un şir de funcţii $\mathcal{A}$-măsurabile. Să se arate că mulţimea punctelor din X în care şirul f_n are limită este măsurabilă (i.e. aparţine lui $\mathcal{A}$).

22.1. Fie $E \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat şi $f, g : E \to \mathbb{R}$ două funcţii continue. Să se arate că dacă $f = g$ λ-a.p.t. atunci $f = g$.

23.1. În spaţiul cu măsură $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ se consideră şirul de funcţii

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n & , \ 1/n \le x \le 2]n \\ (-1)^n & , \ (4n+1)/n < x < (5n+1)/n \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$.

Să se calculeze: $\liminf_{n\to\infty} f_n$ **,** $\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\,\lambda$, $\limsup_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\,\lambda$, $\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) \,\mathrm{d}\,\lambda$, $\int (\limsup_{n\to\infty} f_n) \,\mathrm{d}\,\lambda$.

23.2. Pentru $n \in \mathbb{N}$, fie $X = \{1, 2, ..., n\}$, $A = \mathcal{P}(X)$ şi μ măsura de numărare. Să se arate că orice funcţie $f : X \to \mathbb{R}$ este $\mathcal{A}$-etajată şi să se calculeze $\int f \,\mathrm{d}\,\mu$.

24.1. a) Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură, $A_n \in \mathcal{A}$, $a_n \in [0, \infty]$ $(n \in \mathbb{N})$.

Să se arate că funcţia $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \chi_{A_n}$ este $\mathcal{A}$-măsurabilă şi $\int \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \chi_{A_n} \right) \mathrm{d}\,\lambda = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu(A_n)$.

b) Să secalculeze $\int_{(0,\infty)} e^{-[x]} \,\mathrm{d}\,\lambda(x)$, $\int_{(0,\infty)} \frac{\mathrm{d}\,\lambda(x)}{[x+1]\cdot[x+2]}$.
unde $[\cdot]$ reprezintă funcţia ”partea întreagă”.

24.2. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f : X \to [0, \infty]$ măsurabilă ,$f > 0$ μ-a.p.t., $A \in \mathcal{A}$.
Să se arate că dacă $\int_A f \,\mathrm{d}\,\mu = 0$ atunci $\mu(A) = 0$.

24.3. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură , $f : X \to [0, \infty]$ măsurabilă şi $\mathcal{D} = \{(y_0, y_1, ..., y_n) : 0 \leq y_0 < y_1 < ... < y_n < \infty, n \in \mathbb{N}\}$.
Pentru $d = (y_0, y_1, ..., y_n) \in \mathcal{D}$ se notează
$\sigma_d = \sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i\mu(\{x \in X : y_i \leq f(x) < y_{i+1}\}) + y_n\mu(\{x \in X : f(x) \geq y_n\})$.
Să se arate că $\int f \,\mathrm{d}\,\mu = \sup\{\sigma_d : d \in D\}$.
(σ_d reprezintă ”suma Lebesgue-Darboux” inferioară, dar spre deosebire de cazul integralei Riemann , diviziunile sunt pe verticală !).

24.4. Fie $\|\cdot\|$ norma Cebâşev în $\mathbb{R}^m$ (i.e. $\|(x_1, ..., x_m)\| = \max\{|x_1|, ..., |x_m|\}$) , $\alpha > 0$, $A = B[0, 1]$ (= bila unitate), $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \|x\|^{-\alpha} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$
Să se arate că f este λ-integrabilă pe A dacă şi numai dacă $\alpha < m$. Să se arate apoi aceeaşi proprietate pentru norma euclidiană.

24.5. Să se dea un exemplu în care inegalitatea din lema lui Fatou să fie strictă.

24.6. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură, $Y \in \mathcal{A}$, $f : X \to [0, \infty]$ o funcţie $\mathcal{A}$-măsurabilă. Notând cu ν restricţia măsurii μ la $\mathcal{A}_Y$ să se arate că $\int_Y f \,\mathrm{d}\,\mu = \int_Y f|_Y \,\mathrm{d}\,\nu$

25.1. a) Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură, $(Y, \mathcal{B})$ un spaţiu măsurabil şi $u : X \to Y$ o funcţie $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ măsurabilă (în sensul că $u^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{B}$).
Atunci aplicaţia $\nu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$, $\nu(B) = \mu(\nu^{-1}(B))$ este o măsură notată $\mu\nu^{-1}$. Dacă $g : Y \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ este o funcţie $\mathcal{B}$-măsurabilă atunci
$\int\limits_{u^{-1}(B)} g \,\mathrm{d}\,\nu = \int\limits_B (g \circ u) \,\mathrm{d}\,\mu$ (în sensul că exististenţa uneia dintre integrale implică şi existenă celeilalte).
b) Să se deducă faptul că dacă $g : \mathbb{R} \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ este integrabilă atunci $\int g(x) \,\mathrm{d}\,\lambda(x) = \int g(-x) \,\mathrm{d}\,\lambda(x)$, iar dacă în plus g este impară atunci $\int g(x) \,\mathrm{d}\,\lambda(x) = 0$.
c) Dacă $g : \mathbb{R} \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ este integrabilă şi $a \in \mathbb{R}$ atunci $\int g(x) \,\mathrm{d}\,\lambda(x) = \int g(x + a) \,\mathrm{d}\,\lambda(x)$,

25.2. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură finită şi $f_n : X \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii integrabile uniform convergent către funcţia $f : X \to \mathbb{R}$. Să se arate că f este integrabilă şi $\int f_n \,\mathrm{d}\,\mu \to \int f \,\mathrm{d}\,\mu$.

25.3. Să se arate că dacă f este o funcţie integrabilă pe spaţiul cu măsură $(X, \mathcal{A}, \mu)$ atunci $\lim_{n\to\infty} n \cdot \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq n\}) = 0$.

25.4. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură finită şi $M(X)$ mulţimea funcţiilor $\mathcal{A}$-măsurabile şi finite μ-a.p.t. Se consideră aplicaţia $d : M(X) \times M(X) \to \mathbb{R}$, $d(f, g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \,\mathrm{d}\,\mu$. Să se arate că:
a) d este semimetrică.
b) $(M(X), d)$ este spaţiu semimetric complet.

25.5. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f : X \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ o funcţie integrabilă. Să se arate că:
a) dacă $\forall A \in \mathcal{A}$, $\int_A f \,\mathrm{d}\,\mu \geq 0$ atunci$f \geq 0$ μ-a.p.t.
b) dacă $\forall A \in \mathcal{A}$, $\int_A f \,\mathrm{d}\,\mu = 0$ atunci $f = 0$ μ-a.p.t.

25.6. a) Dacă $a \in \mathbb{R}$,$\alpha > 0$ atunci funcţia $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\alpha x}$ este integrabilă Lebesgue.
b) Dacă $a > 0$, $\alpha > 0$ atunci funcţia $f : (0, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^\alpha$ este integrabilă Lebesgue dacă şi numai dacă $\alpha < 1$.
c) $\forall t > 0$ funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}x^{t-1}$ este integrabilă Lebesgue. (Funcţia $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\Gamma(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-x}x^{t-1} \,\mathrm{d}\,\lambda(x)$ se numeşte *funcţia gamma a lui* Euler; este uşor de văzut - şi se cunoaşte de la cursul de analiză - că $\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$ $\forall t > 0$ şi $\Gamma(n) = (n - 1)!$ $\forall n \in \mathbb{N}$).
d) Folosind b) să se arate că există funcţii integrabile f pentru care f^2 nu este integrabilă.

25.7. Folosind teorema de derivare sub semnul integral să se arate că funcţia gamma a lui Euler este derivabilă şi să i se calculeze derivata.

25.8. Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} e^{\sin x - x} \sin(x^2/n) \,\mathrm{d}\,\lambda(x)$.

25.9. Fie $f : X \to [0, \infty)$ o funcţie μ-integrabilă cu $\int f \,\mathrm{d}\,\mu = c$, unde $0 < c < \infty$ şi $\alpha > 0$..
Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n \int \ln(1 + (f(x)/n)^\alpha) \,\mathrm{d}\,\mu(x)$.

25.10. Să se arate că pentru $p, q > 0$ avem: $\int\limits_{(0,1)} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} \,\mathrm{d}\,\lambda(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}$.

25.11. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1+x/n)^n e^{-2x} \,\mathrm{d}\,x$

25.12. Dacă $\alpha > 0$ atunci $\lim_{n\to\infty} \int_0^n x^{\alpha-1}(1-x/n)^n \,\mathrm{d}\,x = \Gamma(\alpha)$.

25.13. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură , aplicaţia $f : X \to \overleftrightarrow{\mathbb{R}}$ şi $Y \in \mathcal{A}$. Să se arate că f este integrabilă pe Y dacă şi numai dacă $f|_Y$ este integrabilă în $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu|_{\mathcal{A}_Y})$ şi în acest caz cele două integrale coincid.

26.1. Fie $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin(x^2) & \text{dacă } \cos x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x & \text{dacă } \cos x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ .Să se studieze integrabilitatea Riemann şi Lebesgue a funcţiei f.

26.2. Fie f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \cdot y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dacă } x \cdot y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$. Să se arate că f este integrabilă Lebesgue pe $[0, 1] \times [0, 1]$ şi să se calculeze integrala.

26.3. Fie $A \subseteq [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Să se arate că funcţia χ_A este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă $\lambda(\mathrm{fr}\, A) = 0$.

26.4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cup \{0\} \\ 1/q & \text{dacă } x = p/q, \text{ cu } p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ q \in \mathbb{N},\ (p, q) = 1 \end{cases}$.

Să se arate că limita funcţiei f în orice punct este 0. Să se studieze integrabilitatea Riemann a funcţiei f pe $[0, 1]$.

(f este cunoscută sub numele de *funcţia lui* Riemann. Să se modifice f pentru a se obţine o funcţie continuă în orice punct iraţionl şi discontinuă în orice punct raţional).

26.5. Fie $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$.

Să se arate că F este derivabilă, $f = F'$ este continuă pe $(0, 1]$, există limita $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 f(x) \,\mathrm{d}\,x$ dar f nu este integrabilă.