Analiză reală. Trei lucrări de control

$\boxed{1.}$ **a)** Definiţi spaţiul topologic Hausdorff.
b) Daţi exemplu de şir într-un spaţiu topologic având exact două limite.

$\boxed{2.}$ **a)** Definiţi aderenţa şi interiorul unei mulţimi.
b) Precizaţi interiorul şi aderenţa pentru mulţimea $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \le 1\right\} \cup ([1,\infty) \times \{0\})$.

$\boxed{3.}$ **a)** Definiţi funcţia distanţă de la un punct la o submulţime a unui spaţiu semimetric.
b) Trasaţi graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, \{1,2,3\})$, unde d este metrica euclidiană din $\mathbb{R}$.

$\boxed{4.}$ **a)** Definiţi spaţiul topologic compact şi mulţimea compactă.
b) Daţi un exemplu de mulţime compactă care nu este închisă.

$\boxed{5.}$ **a)** Definiţi noţiunea de omemorfism.
b) Găsiţi două omeomorfisme $f : [1,2] \to [3,5]$.

$\boxed{6.}$ **a)** Definiţi spaţiul semimetric complet.
b) Este spaţiul $(\mathbb{Q}, d)$ complet, unde d este metrica discretă? Justificaţi.

$\boxed{1.}$ **a)** Enunţaţi o caracterizare a spaţiilor T1.
b) Daţi exemplu de mulţime finită (a unui spaţiu topologic) care nu este închisă.

$\boxed{2.}$ **a)** Definiţi frontiera şi aderenţa unei mulţimi.
b) Precizaţi frontiera şi aderenţa pentru mulţimea $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \le 4\right\} \cup \{(0,3)\}$

$\boxed{3.}$ **a)** Definiţi funcţia distanţă de la un punct la o submulţime a unui spaţiu semimetric.
b) Trasaţi graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, \{1,2,3\})$, unde d este metrica euclidiană din $\mathbb{R}$.

$\boxed{4.}$ **a)** Definiţi spaţiul topologic conex prin arce.
b) Fie $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Găsiţi $f : [0,1] \to X$ continuă astfel ca $f(0)$ şi $f(1)$ să fie diametral opuse.

$\boxed{5.}$ **a)** Definiţi noţiunea de omemorfism.
b) Găsiţi două omeomorfisme $f : [1,\infty] \to (-\infty, 1]$.

$\boxed{6.}$ **a)** Definiţi spaţiul semimetric precompact şi mulţimea precompactă.
b) Este spaţiul $(\mathbb{Q}, d)$ precompact, unde d este metrica discretă? Justificaţi.

$\boxed{1.}$ **a)** Definiţi funcţia Lipschitz.
b) Este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, \sin x)$ o funcţie Lipschitz? Justificaţi. ($\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}^2$ au metricele euclidiene uzuale).

$\boxed{2.}$ **a)** Definiţi interiorul şi exteriorul unei mulţimi.
b) Precizaţi interiorul şi exteriorul pentru mulţimea $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x < 1, \quad -1 < y \le 1\right\}$

$\boxed{3.}$ **a)** Definiţi spaţiul topologic conex.
b) Găsiţi o topologie $\mathcal{T}$ pe mulţimea $X = \{1,2,3\}$ pentru care $(X, \mathcal{T})$ nu este conex.

$\boxed{4.}$ **a)** Definiţi funcţia distanţă de la un punct la o submulţime a unui spaţiu semimetric.
b) Trasaţi graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$, unde d este metrica euclidiană din $\mathbb{R}$.

$\boxed{5.}$ **a)** Definiţi spaţiul topologic secvenţial compact.
b) Găsiţi un şir al spaţiului topologic $[0,1)$ (dotat cu topologia indusă de cea naturală) care nu are nici un subşir convergent.

$\boxed{6.}$ **a)** Definiţi sistemul fundamental de vecinâtăţi.
b) Daţi exemplu de familie de vecinătăţi a punctului 0 în spaţiul topologic $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$ care nu constituie un sistem fundamental.
