TOPOLOGIE

I. Exemple

♠ Bază numărabilă în $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0\ )$.
♠ Funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă care nu este uniform continuă.
♠ Familie centrată de mulţimi închise în $\mathbb{R}$ având intersecţie vidă.
♠ Spaţiu topologic compact care nu este Hausdorff.
♠ Mulţime nevidă, închisă, conexă din $\mathbb{R}^2$ având interior vid.
♠ Şir fundamental în $\mathbb{Q}$, neconvergent în $\mathbb{Q}$.
♠ Funcţie$f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ continuă care nu are prelungire continuă la $\mathbb{R}$.
♠ Spaţiu topologic local conex care nu este conex.
♠ Metrică în $\mathbb{R}^2$ diferită de metrică euclidiană şi care induce topologia euclidiană.
♠ Mulţime completă care nu este închisă.
♠ Mulţime închisă care nu este completă.
♠ Semimetrică pe $\mathbb{R}$ care nu este metrică.
♠ Mulţime completă din $\mathbb{R}$ care nu este precompactă.
♠ Mulţime precompactă în $\mathbb{R}$ care nu este compactă.
♠ Mulţime compactă care nu este închisă.
♠ Mulţime din $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0\ )$ care este de categoria I dar nu este rară.
♠ Submulţime conexă $A \subseteq \mathbb{R}^2$ pentru care $int(A)$ nu este conexă.
♠ Şir într-un staţiu topologic convergent către două puncte distincte.
♠ Mulţime neconexă din $\mathbb{R}$ având aderenţa conexă.
♠ Mulţime nevidă din $\mathbb{R}$ ce coincide cu frontiera sa.
♠ Mulţime compactă numărabilă în $\mathbb{R}$.
♠ Şir în $\mathbb{R}$ având limita inferioară -∞ şi limita superioară $+\infty$.
♠ Şir în $\mathbb{R}$ având limita inferioară 1 şi limita superioară $+\infty$.

II. Intrebări

♠ Există în $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0\ )$ mulţimi nevide fără nici un punct aderent? Dar fără nici un punct frontieră?
♠ Pentru un spaţiu topologic discret, care este numărul minim de mulţimi dintr-un sistem fundamental de vecinătăţi ale punctului x?
♠ Precizaţi funcţia de vecinătăţi a topologiei discrete.
♠ Precizaţi funcţia de vecinătăţi a topologiei indiscrete.
♠ Există mulţimi din $\mathbb{R}^2$ având un număr finit (nenul) de puncte interioare?
♠ O topologie T1 pe o mulţime finită este oare T2?
♠ Imaginea unei mulţimi deschise printr-o funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este deschisă?
♠ Imaginea unei mulţimi închise printr-o funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este închisă?
♠ Într-un spaţiu metric diametrul unei bile deschise $B(x, r)$ este egal cu diametrul bilei închise $B[x, r]$?
♠ Un spaţiu metric discret este complet?
♠ Există mulţimi finite care nu sunt compacte?
♠ Dacă suma şi produsul a două funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt continue, rezultă că f şi g sunt continue?
♠ Este posibil ca o bilă închisă a unui spaţiu metric să fie mulţime deschisă?
♠ Este mulţimea $\{0, 1\} \times \mathbb{R}$ conexă în $\mathbb{R}^2$?
♠ Există spaţii conexe având două elemente?
♠ Este posibil ca într-un spaţiu metric, reuniunea a două bile deschise disjuncte să fie o bilă închisă?
♠ Există mulţimi nevide, mărginite $A \subseteq \mathbb{R}^2$ pentru care $int(A) = \overline{A}$?
♠ Există mulţimi compacte deschise?
♠ $X = [0, 1]$ cu topologia discretă este compact?
♠ Este mulţimea $\mathbb{Z}$ rară în $(\mathbb{R}, T_0\ )$?
♠ $X = \mathbb{R}$ cu topologia discretă este precompact?

III. Probleme de examen

♠ Să se enumere toate topologiile pe mulţimea $X = \{a, b\}$ şi toate topologiile Hausdorff pe mulţimea $Y = \{a, b, c\}$,unde $a \neq b \neq c \neq a$.

♠ Fie $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$. Să se arate că mulţimea A este conexă şi închisă în $\mathbb{R}^2$. Precizaţi $int(A)$.

♠ Fie X un spaţiu topologic, Y un spaţiu topologic Hausdorff şi A o submulţime densă din X.

Arătaţi că două funcţii continue$f, g : X \to \mathbb{R}$ sunt egale dacă şi numai dacă restricţiile funcţiilor f şi g la mulţimea A coincid.

Este esenţială condiţia ca Y să fie Hausdorff?

♠ Fie $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}, d(x,y) = |1/x - 1/y|$. Arătaţi că d este metrică şi că topologia indusă de d este cea discretă. Este $(\mathbb{N}, d)$ complet?

♠ În spaţiul metric $\mathbb{R}^2$ cu metrica euclidiană, notăm

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $S = [0,1] \times \{0\}, A = D \backslash S$.

a) Să se calculeze $\overline{A}$,$int(A)$, $fr(A)$. (Justificare).

b) Este mulţimea $S \backslash \{1/2, 0\}$ conexă?

♠ Fie$(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, A o submulţime oarecare a lui X, G o submulţime deschisă şi F o submulţime închisă.Să se arate că:

a) $\overline{\overline{A} \cap G} = \overline{A \cap G}$

b)$int(F \cup int(A)) = int(F \cup A)$

c) Arătaţi că dacă relaţia de la a) are loc $\forall A \subseteq X$ atunci mulţimea G este deschisă.

♠ Fie X, Y spaţii topologice şi $Z := X \times Y$ dotat cu topologia produs. Să se arate că dacă $A \subseteq X, B \subseteq Y$ atunci:

a) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} b) int(A \times B) = int(A) \times int(B)$

c) $fr(A \times B) = (fr(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times fr(B))$.

♠ Fie $X = \{a, b\}$ şi $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$.

a) Arătaţi că în spaţiul topologic $(X, \mathcal{T})$ şirul $a, b, a, b, a, ...$

este convergent către b dar nu converge către a.

b) Spaţiul topologic $(X, \mathcal{T})$ are aceleaşi şiruri convergente ca şi spaţiul topologic $(X, \mathcal{T}_1)$ unde $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$.

♠ Fie X şi Y spaţii topologice şi$f : X \to Y$ continuă. Să se arate că dacă X este secvenţial compact atunci $f(X)$ este secvenţial compact.

♠ Fie (X, d) un spaţiu semimetric şi $A, B \subseteq X$, nevide disjuncte. Să se arate că dacă A este închisă şi B compactă atunci $\inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} > 0$. Dacă ambele mulţimi sunt compacte atunci infimul precedent este atins. Să se dea un exemplu de mulţimi închise disjuncte în $\mathbb{R}$ pentru care acest infim nu este atins.

♠ Să se arate că într-un spaţiu topologic o mulţime A este rară dacă şi numai dacă există o mulţime deschisă G astfel încât $A \subseteq fr(G)$.

♠ Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şiruri de numere reale astfel încât $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător având limită $+\infty$. Să se arate că:

$\liminf_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$

TEORIA MĂSURII

I. Exemple

♠ Algebră $\mathcal{A} \subseteq P(\mathbb{N})$ care nu este σ-algebră.

♠ Şir descendent de mulţimi A_n pentru care limita şirului $\mu(A_n)$ nu este egal cu măsura intersecţiei mulţimilor A_n .

♠ Măsură exterioară pe $\mathbb{N}$ care nu este măsură.
♠ Mulţime infinită din $\mathbb{R}$ având măsură exterioară Lebesgue nulă.
♠ Funcţie integrabilă Lebesgue care nu este integrabilă Riemann.
♠ Mulţime din $\mathbb{R}$ care nu este închisă şi are măsură Lebesgue nulă.
♠ Funcţie $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ continuă care nu este integrabilă Lebesgue.
♠ Funcţii f,g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nemăsurabile Lebesgue a căror sumă este măsurabilă Lebesgue.
♠ Funcţie măsurabilă Lebesgue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care este limita unui şir de funcţii nemăsurabile Lebesgue.
♠ Şir de mulţimi A_n din $\mathbb{R}$ pentru care şirul funcţiilor caracteristice χ_{A_n} converge punctual dar nu converge în măsură.
♠ Măsură $\mu:\mathcal{L}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ pentru care $\mu(\mathbb{R})=1$.
♠ Inegalitate strictă în lema lui Fatou.
♠ Funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neintegrabilă Lebesgue pentru care $|f|$ este integrabilă Lebesgue.
♠ Funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nemărginită şi integrabilă Lebesgue.

II. Intrebări

♠ Există mulţimi din $\mathbb{R}$ nemăsurabile Lebesgue având măsura exterioară Lebesgue nulă?
♠ Există mulţimi din $\mathbb{R}$ cu interior vid şi de măsură Lebesgue nenulă?
♠ Există funcţii etajate şi continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care nu sunt constante?
♠ Este orice funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă măsurabilă Lebesgue? Dar integrabilă Lebesgue?
♠ Este măsura exterioară Lebesgue pe $\mathbb{R}$ o măsură (definită pe $\mathcal{P}(\mathbb{R})$)?
♠ Este o mulţime finită din $\mathbb{R}$ măsurabilă Lebesgue?
♠ Este aderenţa unei mulţimi nemăsurabile Lebesgue din $\mathbb{R}$ o mulţime măsurabilă Lebesgue?
♠ Este interiorul unei mulţimi nemăsurabile Lebesgue din $\mathbb{R}$ o mulţime măsurabilă Lebesgue?
♠ Dacă un şir de funcţii integrabile Lebesgue f_n :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ converge uniform către 0, este şirul $(\int f_n d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent?
♠ Poate fi o mulţime de nivel a unei funcţii nemăsurabile Lebesgue f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o mulţime măsurabilă Lebesgue?
♠ Există mulţimi boreliene din $\mathbb{R}$ care nu sunt nici deschise nici închise?
♠ Poate fi scrisă o mulţime nemăsurabilă Lebesgue din $\mathbb{R}$ ca reuniune nenumărabilă de mulţimi măsurabile Lebesgue?
♠ Există algebre care nu sunt σ-algebre?
♠ Există în $\mathbb{R}^2$ mulţimi nenumărabile având măsură Lebesgue nulă?
♠ Este produsul a două funcţii integrabile Lebesgue o funcţie integrabilă Lebesgue?
♠ Dacă f este o funcţie $\mathcal{A}$-etajată care nu se anulează, este funcţia $1/f$ $\mathcal{A}$-etajată?
♠ Există în $\mathbb{R}^m$ mulţimi deschise, nevide având măsura Lebesgue nulă?
♠ Poate fi scrisă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ ca limita punctuală a unui şir crescător de funcţii etajate?
♠ Poate fi reuniunea a două mulţimi nemăsurabile Lebesgue din $\mathbb{R}$ o mulţime măsurabilă Lebesgue?
♠ Este măsura de numărare o măsură completă?
♠ Este limita punctuală a unui şir descrescător de funcţii integrabile nenegative o funcţie integrabilă?
♠ Există funcţii nenule f pentru care $f^+ = f^-$?

III. Probleme de examen

♠ Să se arate că funcţia f:$[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x):=e^{-[2x]}$ este măsurabilă Lebesgue($[\cdot]$ fiind funcţia "parte întreagă").
Să se calculeze $\int f d\lambda$.

♠ Să se calculeze:
a) $\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)} n\ln(1+\frac{e^{-x}}{2n})d\lambda(x)$
b) $h'(0)$, unde $h(t)=\int_{(1,\infty)}(x^{100}+t)^{-1}d\lambda(x)$, $(t>-1)$

♠ Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+1)^2}\chi_{[n,2n]}(x)$.
Să se arate că f este măsurabilă Lebesgue şi să se calculeze $\int f d\lambda$

♠ a) Să se arate că familia mulţimilor boreliene din $\mathbb{R}^m$ coincide cu σ-algebra generată de familia mulţimilor compacte.

b) Să se arate că :

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\} = \sigma\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

♠ Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime măsurabilă Lebesgue având măsura finită. Să se arate că aplicaţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ este continuă. Calculaţi limitele acestei funcţii în -∞ şi $+\infty$.

♠ a)Să se arate că funcţiile monotone şi funcţiile derivate definite pe $\mathbb{R}$ sunt măsurabile Lebesgue.

b) O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $f(\mathbb{R})$ este finită este măsurabilă Lebesgue?

♠ Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil şi $f_n : X \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii $\mathcal{A}$-măsurabile. Să se arate că mulţimea punctelor din X în care şirul f_n are limită este măsurabilă (i.e. aparţine lui $\mathcal{A}$).

♠ Fie $E \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat şi $f, g : E \to \mathbb{R}$ două funcţii continue. Să se arate că dacă $f = g$ λ-a.p.t. atunci $f = g$.

♠ Fie $(\mathcal{X}, A, \mu)$ un spaţiu cu măsură finită şi $f_n : X \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii integrabile uniform convergent către funcţia $f : X \to \mathbb{R}$. Să se arate că f este integrabilă şi $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$. Rămâne valabil rezultatul dacă $\mu(X) = \infty$?

♠ Fie $Y = L^1([0,1], \mathcal{L}, \lambda)$ şi $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$,

$d(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$. Să se arate că:

a) d este semimetrică.

b) Dacă $f_n \to f$ λ-a.p.t atunci $f_n \to f$ în sensul semimetricii d. Are loc şi reciproca?

♠ Fie $f :\to [0, \pi/2]$ $f(x) = \begin{cases} \sin(x^2) & \text{dacă } \cos x \in \mathbb{Q} \\ x^4 & \text{dacă } \cos x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Să se studieze integrabilitatea Riemann şi Lebesgue a funcţiei f.

Observaţii:

1. Pentru *exemple* va trebui precizat (dacă este cazul) şi spaţiul topologic sau spaţiul cu măsură.

2. Pentru *intrebări* se va da o justificare (scurtă) in caz afirmativ sau un contraexemplu în cazul când răspunsul este negativ.